

# Experiência 05

## Medindo Distância e Volume: Normas e Determinantes

23 de março de 2015

### 1 Medidas de distância — normas

É muito comum ser necessário estimar a distância entre dois vetores. Como fazer isso? No  $\mathbb{R}^2$ , a maneira como você está acostumado é usar a *distância Euclidiana*, ou seja,

$$d_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A Figura 1 ilustra um problema importante. Você está no Parque do Ibirapuera morrendo de calor e quer achar o caminho mais rápido para uma barraquinha de sorvete. A solução você sabe que é escolher o caminho de menor distância Euclidiana, como mostra a figura.

A distância Euclidiana é a única maneira de medir distância? Observe a Figura 2, que mostra o mapa de uma região de São Paulo. Qual é a menor distância entre o Café Journal e o Chichohamburger? Se você fosse um pombo, você responderia que a menor distância é  $d_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7,81$  quarteirões (o caminho da esquerda). Se no entanto você não souber voar, esse caminho não é uma opção viável — a menor distância *viável* (a pé) é um dos caminhos mostrados à direita (há outras opções também). Nesse caso, a melhor maneira de medir distância é

$$d_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 11 \text{ quarteirões}.$$

Agora, imagine que você precise cortar uma peça com o contorno dado pela curva azul  $f(x)$  da Figura 3, definida no intervalo  $x \in [-5\pi/4, 5\pi/4]$ . Você manda dois estagiários

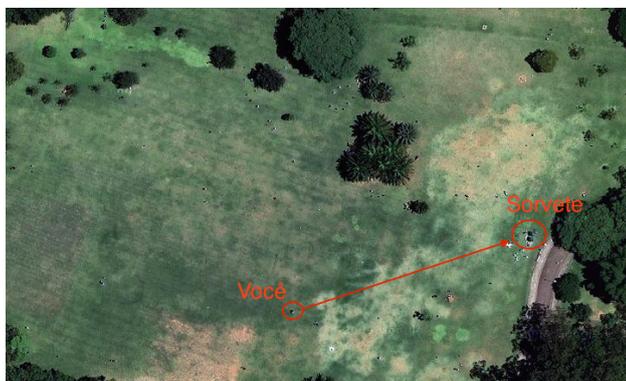


Figura 1: Distância Euclidiana usada para resolver um problema importante no Parque do Ibirapuera.

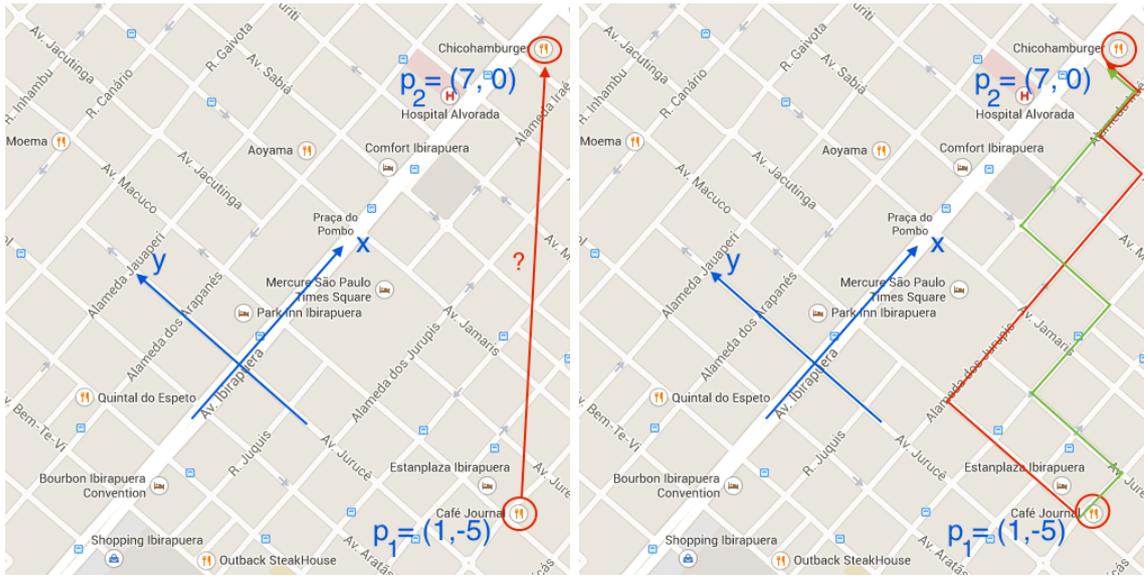


Figura 2: Qual é o caminho mais curto para o Chicohamburger?

cutarem cada um uma peça. Um entrega a peça com o perfil da curva verde, o outro com o perfil da curva vermelha. Qual é a melhor aproximação para a curva azul, a curva vermelha ou a curva verde? A curva verde é tal que

$$\sqrt{\int_{-5\pi/4}^{5\pi/4} (f(x) - f_{\text{verde}}(x))^2 dx} = 0,076,$$

enquanto que para a curva vermelha, vale

$$\sqrt{\int_{-5\pi/4}^{5\pi/4} (f(x) - f_{\text{verm}}(x))^2 dx} = 0,083.$$

Ou seja, pensando no espaço das funções contínuas, a curva verde está mais próxima da curva azul, pelo critério da distância Euclidiana.

No entanto, se você procurar a máxima distância entre dois pontos quaisquer das curvas, o resultado é

$$\max_{-5\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4} |f(x) - f_{\text{verde}}(x)| = 0,0667, \quad \max_{-5\pi/4 \leq x_n \leq 5\pi/4} |f(x) - f_{\text{verm}}(x)| = 0,0437.$$

Ou seja, a pelo critério da máxima distância, a curva verde está mais perto da azul do que a vermelha. Qual é a melhor solução? Depende do problema: por exemplo, se a peça que você está cortando precisar se encaixar em uma outra, provavelmente a curva vermelha é uma solução melhor.

A conclusão é que existem diferentes maneiras de se medir distância em um espaço vetorial. Vamos chamar qualquer medida de distância válida em um espaço vetorial de *norma vetorial*. Os exemplos acima são três das principais — a norma Euclidiana ( $\ell_2$ ), a norma “de Manhattan” ( $\ell_1$ ), e a norma min-max ( $\ell_\infty$ ). O que elas todas têm em comum? O que define que uma função de dois pontos pode ser uma distância? Se você pensar, são só três propriedades: dado um espaço vetorial  $V$ , uma norma é uma função  $\|\mathbf{u}\|$  de  $V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , vale

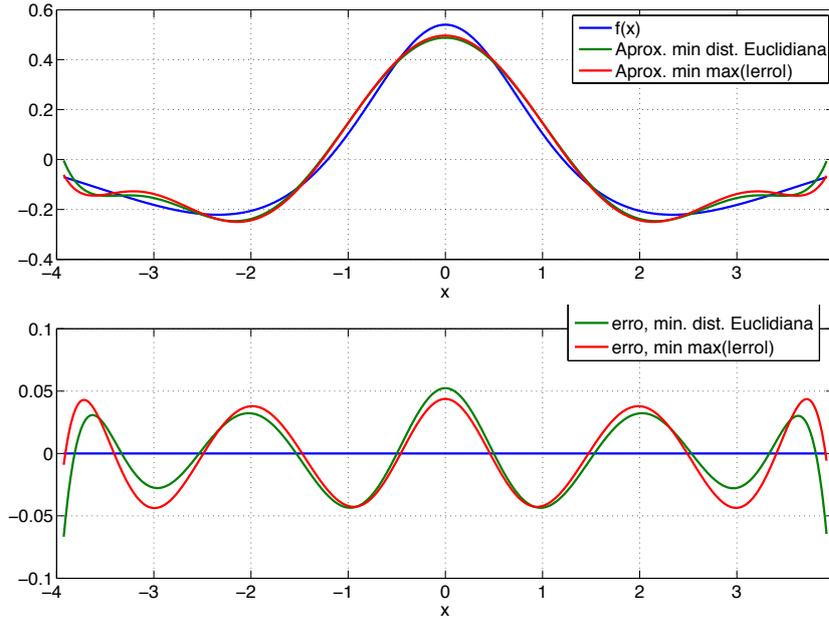


Figura 3: Duas aproximações para a função azul: em verde, minimizando a distância Euclidiana; em vermelho, minimizando a máxima distância. Acima, a curva original e as duas aproximações; abaixo, o erro em cada ponto.

1.  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ , para todo  $\mathbf{u} \in V$ ;
2.  $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;
3.  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$  (desigualdade triangular).

A norma mais conhecida de todas é a norma Euclidiana, que para o  $\mathbb{R}^n$  é definida por<sup>1</sup>

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

O equivalente para o espaço  $\mathcal{C}_{[0,1]}$  das funções contínuas entre 0 e 1 é

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x) \, dx}.$$

Outras normas muito usadas são

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |u_i|, \text{ para o } \mathbb{R}^n, & \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(x)| \, dx, \text{ para o } \mathcal{C}_{[0,1]}, \\ \|\mathbf{u}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|, \text{ para o } \mathbb{R}^n, & \|f\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, \text{ para o } \mathcal{C}_{[0,1]}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>A norma Euclidiana é conhecida como “norma  $\ell_2$ ” para o caso do conjunto de vetores ser enumerável, como o  $\mathbb{R}^n$ , ou “norma  $\mathcal{L}_2$ ”, para o caso do conjunto de vetores ser não enumerável, como o espaço das funções contínuas. Os símbolos  $\ell$  ou  $\mathcal{L}$  são Lebesgue, um matemático que derivou resultados importantes em Teoria da Medida.

Os símbolos usados para essas normas vêm do fato de que, para qualquer  $p \geq 1$ , as funções

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}, \text{ para o } \mathbb{R}^n, \quad \|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ para o } \mathcal{C}_{[0,1]}$$

também são normas, e  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{u}\|_\infty$ .

Provar que todas essas funções são normas não é sempre fácil, exceto para os casos das normas 1, 2 e  $\infty$ . É interessante você verificar que esses três casos realmente obedecem todas as condições que uma função precisa satisfazer para ser uma norma.

*Exercício 1.* Desenhe uma figura no Matlab dos pontos do  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem

1.  $\|\mathbf{p}\|_2 \leq \alpha$ ,
2.  $\|\mathbf{p}\|_1 \leq \alpha$ ,
3.  $\|\mathbf{p}\|_\infty \leq \alpha$ .

Use  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1$ .

*Exercício 2.* Alguma das funções abaixo é uma norma? Se não for uma norma, procure um exemplo em que uma das três condições falhe.

1. Considere  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ :

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \mathbf{p},$$

- 2.

$$g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{p},$$

- 3.

$$h(\mathbf{p}) = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{p} \right\|_1.$$

## 2 Revisão - Cálculo de áreas usando determinantes

Uma aplicação interessante para o determinante é o cálculo de áreas e volumes. A base para isso é o

**Teorema 1** Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , a área do paralelogramo definido por suas colunas é  $|\det A|$ . Se  $A$  é uma matriz  $3 \times 3$ , o volume do paralelepípedo determinado pelas colunas de  $A$  é  $|\det A|$ .

A demonstração desse teorema é simples e pode ser encontrada, por exemplo em [Lay, 2011, pag. 180].

Como exemplo de aplicação, vamos calcular a área do paralelogramo determinado pelos pontos  $(-2, -2)$ ,  $(0,3)$ ,  $(4, -1)$  e  $(6,4)$ , como mostrado na Figura 2(a).

Podemos transladar o paralelogramo de forma que ele tenha vértice na origem. Por exemplo, subtraindo o vértice  $(-2, -2)$  de cada um dos quatro vértices, obtemos um novo

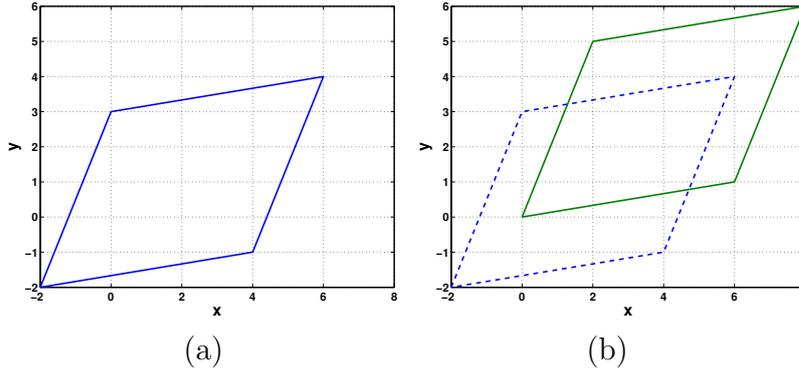


Figura 4: Paralelogramo para o qual queremos calcular a área.

paralelogramo de mesma área com vértices  $(0,0)$ ,  $(2,5)$ ,  $(6,1)$  e  $(8,6)$  mostrado em linha cheia na Figura 2(b). Esse paralelogramo é definido pelas colunas de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Como  $|\det A| = |-28|$ , a área do paralelogramo é 28.

Outro teorema útil é

**Teorema 2** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear determinada por uma matriz  $2 \times 2$   $A$ . Se  $S$  é um paralelogramo em  $\mathbb{R}^2$ , então

$$\{\text{área de } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{área de } S\}. \quad (2)$$

Da mesma forma, Se  $T$  é uma matriz  $3 \times 3$  e  $S$  é um paralelepípedo em  $\mathbb{R}^3$ , então

$$\{\text{volume de } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{volume de } S\}. \quad (3)$$

A demonstração encontra-se, por exemplo, em [Lay, 2011, pág. 182].

É interessante notar que, como qualquer figura plana pode ser decomposta em paralelogramos infinitesimais, o Teorema 2 aplica-se igualmente a qualquer figura plana ou espacial  $S$ .

### 3 Solução de sistemas de equações não-lineares

Como dissemos anteriormente, transformações lineares são também usadas para resolver problemas não lineares. Nesta aula vamos ver um exemplo de como isso é feito, descrevendo um algoritmo para achar zeros de sistemas de equações não lineares. Problemas desse tipo são comuns em engenharia, por exemplo, para resolver circuitos com dispositivos como diodos ou transistores, para determinar a vazão em redes de distribuição de água, e muitas outras aplicações. O algoritmo que veremos aqui é usado em programas profissionais para simulação de circuitos eletrônicos, como o Spice.

Vamos começar pensando no problema da Figura 5. A mola está presa a um pino a uma distância de 1 m de uma parede vertical, e pelo outro lado presa a uma massa de 0,1 kg. Supondo que a mola está em repouso quando tem um comprimento de  $l_0 = 1$  m, e que a constante da mola é  $k = 10$  N/m, qual é a posição  $x$  em que a massa fica em repouso?

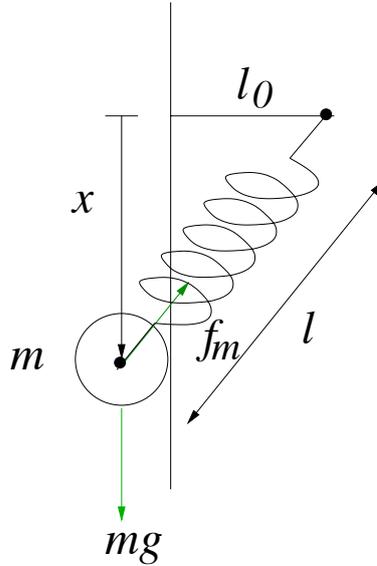


Figura 5: Em que ponto a massa fica em equilíbrio?

O ponto de repouso acontece quando a componente vertical da força  $f_m$  da mola for igual ao peso, ou seja, quando

$$f_m \frac{x}{l} = mg.$$

O comprimento da mola  $l$  em função de  $x$  é  $l = \sqrt{x^2 + l_0^2}$ , e  $f_m = k(l - l_0)$ , ou seja, o problema que precisamos resolver é

$$f(x) = k \left( \sqrt{x^2 + l_0^2} - l_0 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_0^2}} - mg = 0,$$

ou, substituindo os valores,

$$f(x) = 10 \left( \sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0. \quad (4)$$

Uma equação esquisita como essa precisa ser resolvida numericamente. Há vários métodos de solução numérica de equações, vamos estudar aqui o método de Newton-Raphson, que é muito utilizado. A ideia é que queremos resolver o problema

$$\text{Ache } x_* \text{ tal que } f(x_*) = 0.$$

Imagine que temos uma aproximação inicial  $x_0$ . Uma segunda aproximação pode ser conseguida usando a derivada de  $f(x)$ , pois sabemos que

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x_0)}{dx}.$$

O algoritmo então aproxima a função no ponto  $x_0$  pela reta tangente à curva  $f(x)$ , e acha o zero estimado pela tangente, ou seja,  $x_1$  é definido por (ver Figura 6)

$$f(x_0) + (x_1 - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

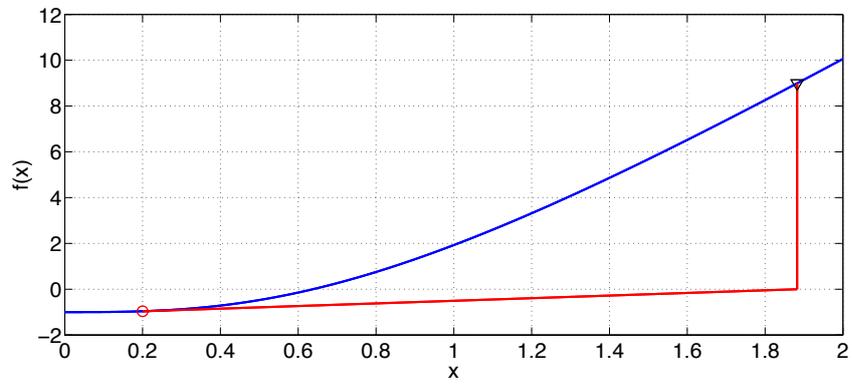


Figura 6: Primeira iteração do algoritmo de Newton-Raphson, com  $x_0 = 0,2$ .

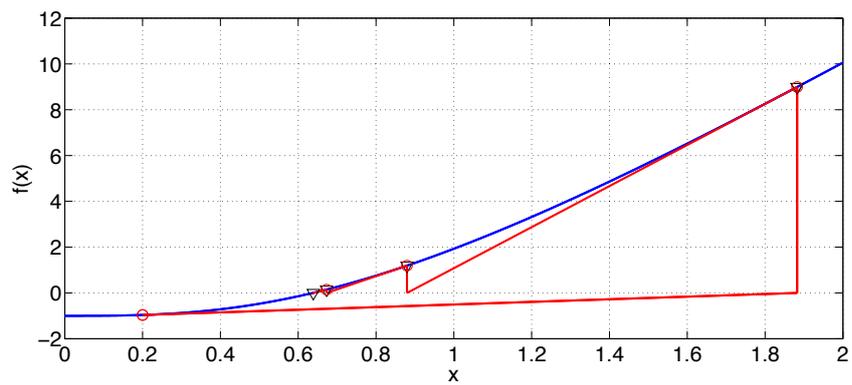


Figura 7: Quatro primeiras iterações do algoritmo de Newton-Raphson, com  $x_0 = 0,2$ .

O algoritmo então continua, calculando novas aproximações  $x_2, x_3, \dots$  (ver Figura 7)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{df(x_n)}{dx}}.$$

Um ponto importante desse método é decidir quando parar — se tudo estiver correndo bem, a cada iteração o valor de  $x_n$  se aproxima mais do valor exato  $x_*$ , mas nunca chega realmente lá. Como decidir quando parar? Esse é um ponto delicado, que é resolvido em geral segundo alguma condição como as seguintes (ou uma mistura delas):

1. A diferença  $|x_{n+1} - x_n|$  fica menor do que um certo  $\delta > 0$  pré-determinado;
2. O valor da função  $|f(x_{n+1})|$  fica menor do que um certo  $\varepsilon > 0$  pré-determinado;
3. O número de iterações ultrapassa um valor limite  $N_{it} < \infty$  pré-determinado.

Nenhum desses critérios é perfeito — o que queremos medir de verdade é  $|x_* - x_{n+1}|$ , mas isso não é possível calcular, por isso usa-se algum outro critério de qualidade. Por exemplo, ao se usar o primeiro critério, estamos assumindo que, quando a variação  $|x_{n+1} - x_n| < \delta$ , então  $|x_{n+1} - x_*| < K\delta$  para um  $K$  não muito grande — mas isso não é garantido. No curso de Métodos Numéricos Aplicados esse problema vai ser estudado em mais profundidade.

Esse algoritmo funciona sempre? Infelizmente, não. A *convergência* do algoritmo depende do problema e do valor inicial escolhido. Por exemplo, o que acontece se o valor inicial for  $x_0 = 0$ ?

### 3.1 Newton-Raphson em duas (ou mais) dimensões

Vamos adaptar agora o algoritmo de Newton-Raphson para resolver um sistema de equações não-lineares, como por exemplo

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - y = 0, \\ f_2(x,y) = x^3 - \cos(y) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Para resolver um problema deste tipo, o algoritmo de Newton-Raphson usa uma aproximação linear das funções  $f_1(x,y)$  e  $f_2(x,y)$  em torno de um ponto. Usando derivadas parciais, em torno do ponto  $(x_0, y_0)$  podemos escrever

$$\begin{aligned} f_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f_1(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}, \\ f_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f_2(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y}, \end{aligned}$$

ou seja, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ f_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{f}(x_0, y_0)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\triangleq J(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.$$

A matriz  $J(x_0, y_0)$  é o *jacobiano* de  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  calculado no ponto  $(x_0, y_0)$ . Suponha que o ponto  $(x_0, y_0)$  está mais ou menos próximo da solução do problema que queremos resolver. Então, uma solução melhor pode ser obtida achando  $\Delta x_0, \Delta y_0$  tais que

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) \\ f_2(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Com isso podemos definir uma recursão (algoritmo de Newton-Raphson)

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n) \begin{bmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

Os critérios de parada usados são semelhantes aos anteriores, apenas agora usando uma norma para medir distância. Defina  $\mathbf{p}_n = [x_n \ y_n]^T$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{p}_n) = [f_1(x_n, y_n) \ f_2(x_n, y_n)]^T$ , então escolhe-se uma norma adequada  $\|\cdot\|$ , e os critérios de parada ficam

1. A diferença  $\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n\|$  fica menor do que um certo  $\delta > 0$  pré-determinado;
2. O valor da função  $\|\mathbf{f}(\mathbf{p}_{n+1})\|$  fica menor do que um certo  $\varepsilon > 0$  pré-determinado;
3. O número de iterações ultrapassa um valor limite  $N_{it} < \infty$  pré-determinado.