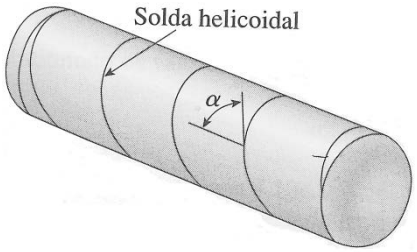
PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – Prova Substitutiva – 02/12/2015

Duração: 100 minutos

Resolução

1ª Questão (3,0 pontos)



Um vaso de pressão cilíndrico é construído a partir de uma placa de aço longa e fina, enrolando-se a placa de aço em torno de um mandril e então se soldando ao longo das bordas da placa para fazer uma junção helicoidal, conforme a figura. A solda helicoidal faz um ângulo α = 45º com o eixo longitudinal. O vaso tem raio interno *r* = 1,8 m e espessura da parede *t* = 20mm. A pressão interna *p* é 800 kPa. Pede-se calcular:
a) a tensão circunferencial na parede cilíndrica do vaso;
b) a tensão longitudinal na parede cilíndrica do vaso;
c) a tensão de cisalhamento máxima na parede cilíndrica do vaso;
d) a tensão normal que age perpendicularmente à solda;
e) a tensão de cisalhamento que age paralelamente à solda.

Resolução:

a) $\sigma_c = \dfrac{pr}{t} = \dfrac{800*1{,}8}{0{,}02} kPa \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 72MPa}$ (0,5)

b) $\sigma_L = \dfrac{1}{2}\sigma_c \Rightarrow \boxed{\sigma_L = 36MPa}$ (0,5)

c) $\sigma_1 = \sigma_c\,;\ \sigma_2 = \sigma_L\,;\ \sigma_3 = 0\,;$ (0,5)

$\tau_{máx} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 36MPa}$ (0,5)

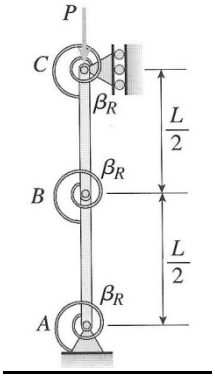
d) e e)

$$[T] = \begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} - \text{sen}\,\alpha\,\vec{j}\,;\ \vec{\rho} = T[\vec{n}] = 72\cos\alpha\,\vec{i} - 36\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}\,;$$

$\sigma = \vec{\rho}\cdot\vec{n} = 72\cos\alpha^2 + 36\,\text{sen}^2\,\alpha\ ;\ \alpha = 45^o \Rightarrow \boxed{\sigma_w = 54MPa}$ (0,5)

$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 \Rightarrow \boxed{\tau_w = 18MPa}$ (0,5)

2ª Questão (2,0 pontos)

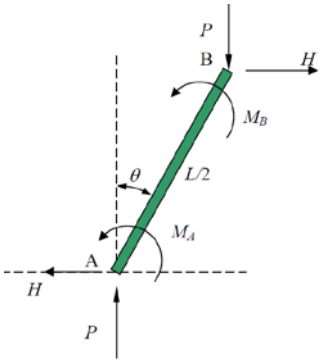


A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo de duas barras rígidas *AB* e *BC*, cada uma com comprimento *L/2*. Em *A*, *B* e *C* existem molas, cada uma com rigidez à rotação β_R. Pede-se determinar o valor da carga crítica.

Resolução:

Impondo o equilíbrio das barras AB e BC na configuração de equilíbrio não-trivial (isto é, após a flambagem do mecanismo), teremos:

- Equilíbrio da barra AB:



Observações:

i) O esforço horizontal *H* poderia ser admitido imediatamente como nulo (em decorrência da simetria da estrutura), mas vamos considerá-lo em nossa solução;

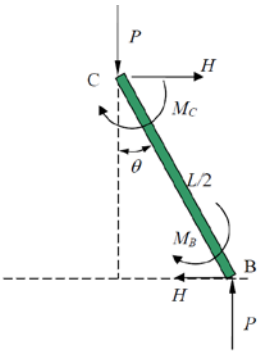
ii) Observe que o equilíbrio de forças verticais e horizontais já está garantido;

iii) Os momentos M_A e M_B são esforços restauradores (tendem a fazer com que a configuração da estrutura volte à configuração de referência).

Impondo o equilíbrio de momentos tomando A como polo, virá

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + M_B = P\frac{L}{2}sen\theta + H\frac{L}{2}\,cos\theta \qquad (1)$$

- Equilíbrio da barra BC:



Impondo o equilíbrio de momentos tomando C como polo, virá:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_B + M_C = P\frac{L}{2}sen\theta - H\frac{L}{2}\cos\theta \qquad (2)$$

Somando (1) com (2), virá:

$$M_A + 2M_B + M_C = PLsen\theta \qquad (3)$$

Da linearidade das molas A, B e C, teremos:

$$M_A = \beta_R\theta; \quad M_B = \beta_R(2\theta); \quad M_C = \beta_R\theta$$

(observe que o ângulo de rotação na mola B é o dobro do ângulo de rotação nas molas A e C).
Substituindo (4) em (3), teremos:

$$6\beta_R\theta = PLsen\theta$$

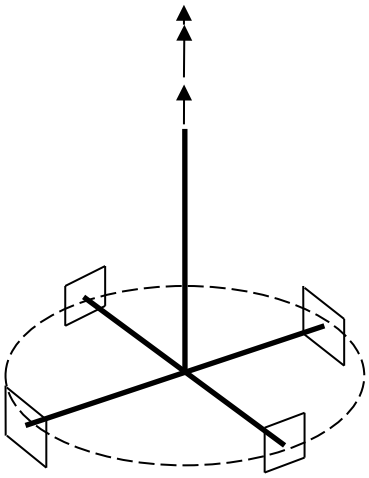
que linearizada fornece:

$$6\beta_R\theta = PL\theta \Rightarrow (PL - \beta_R)\theta = 0$$

E, para que haja soluções diferentes da trivial, devemos ter:

$$PL - 6\beta_R = 0 \Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{6\beta_R}{L}} \qquad (2,0)$$

3ª Questão (5,0 pontos)



A estrutura indicada na figura abaixo é formada por barras de seção transversal circular cheia (diâmetro d, tal que d/L<< 1), de tal forma que as quatro barras horizontais estejam regularmente espaçadas na circunferência de raio L e engastadas em seus pontos extremos. Pede-se determinar, para os carregamentos *F* e *T* indicados:
a) o deslocamento vertical da extremidade *A* da barra vertical;
b) a rotação da extremidade *A* da barra vertical.

Dados: *EI*, *GJ*, *L*, iguais para todas as barras.

Resolução:

a) Para o cálculo do deslocamento vertical da extremidade *A*, apenas a força *F* contribui. Desprezando-se a energia de deformação devida à força normal, apenas as barras horizontais colaboram para esse deslocamento. Como a estrutura tem dois planos de simetria, cada barra horizontal é representada pela barra hiperestática equivalente, já que o nó central da estrutura, pela simetria, não pode sofrer rotação:

Assim, além de um quarto da força *F* teremos um momento M_0 aplicado à extremidade da barra ligada ao nó central:

Adotando M_0 como incógnita hiperestática, pelo teorema da energia complementar mínima, tem-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_0} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}dx = 0$$

Como: $M(x) = Px - M_0$ e $\frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$ conclui-se que $M_0 = \frac{PL}{2}$.

O deslocamento vertical δ da barra vertical será o mesmo deslocamento da extremidade de cada barra horizontal. Assim, pelo teorema de Castigliano,

$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx$ e, como, $\frac{\partial M}{\partial P} = x$, conclui-se que $\boxed{\delta = \frac{FL^3}{48EI}}$ (2,0)

b) Para o cálculo da rotação da extremidade *A*, apenas o momento de torção *T* contribui. Mas, além de ele torcer a barra vertical, ele provoca flexão das barras horizontais no plano horizontal.

Considerando a simetria da estrutura, na aplicação do momento de torção, o seu nó central deve permanecer na mesma posição. Assim, cada barra horizontal pode ser representada pela barra equivalente:

Assim, além de estar submetida a um quarto do momento *T*, a barra horizontal estará também submetida a uma força *P*:

Adotando *P* como incógnita hiperestática, pelo teorema da energia complementar mínima tem-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx = 0$$

Como: $M(x) = M_0 - Px$ e $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$ conclui-se que $P = \frac{3M_0}{2L}$.

A rotação θ_1 da extremidade da barra horizontal pode ser obtida pelo teorema de Castigliano:

$\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_0} \Rightarrow \theta_1 = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}dx$ e, como, $\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$, conclui-se que $\theta_1 = \frac{TL}{16EI}$

Para obter a rotação θ sofrida pela extremidade superior da barra vertical, à rotação θ_1 deve ser somada a rotação θ_2 provocada pela torção da barra vertical:

$$\theta_2 = \frac{TL}{GJ}.$$

Assim: $\theta = TL\left(\frac{1}{16EI} + \frac{1}{GJ}\right)$. (3,0)