Cálculo IV, Prova de Recuperação 2013, A. Noturno (1)

1) Resolva detalhadamente a eq. dif. usando uma série de potências centrada em $x=0$:

$$y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0$$

Sol.: Suponha que exista uma solução da eq. dif. na forma

$$(I) \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

e que a série seja convergente se $|x| < R$, onde R é o raio de convergência.

Derivando encontramos

$$(II) \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$(III) \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \, n \cdot (n-1) \, x^{n-2}$$

Subtituindo (I), (II) e (III) na eq. dif. temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \, x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n (n-1) \, x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

Agora precisamos "juntar" os somatórios

1ro passo: Menor potência de x em cada somatório

somatório 1: x^0

" 2: x^1

" 3: x^0

∴ Temos que escrever o primeiro termo do primeiro e terceiro somatório fora.

$$\underbrace{a_2 \cdot 2(2-1)\,x^0 - a_0 \cdot x^0}_{} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\,x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$(2a_2 - a_0)\underbrace{x^0}_{1}$$

2do passo: Mudança de Variáveis Simultânea

Somatório 1: $k = n-2$, $n = k+2$, $n = 3 \Rightarrow k = 1$

" 2: $k = n$

3: $k = n$

Logo,

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+2} \cdot (k+2)(k+1)\,x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k = 0$$

Juntando os somatórios temos

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}\,(k+2)(k+1) - a_k \cdot k - a_k \right] x^k = 0$$

igualdade de polinômios

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 & \leftarrow k=0 \quad (IV) \\ a_{k+2}\,(k+2)(k+1) - (k+1)\,a_k = 0 & \leftarrow \forall k \geq 1 \quad (V) \end{cases}$$

De (IV) temos que $\boxed{a_2 = \frac{a_0}{2}}$ (VI).

De (V) encontramos a lei de recorrência

$$a_{k+2}(k+2)\cancel{(k+1)} = \cancel{(k+1)}a_k \quad , k+1 \neq 0$$

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{a_k}{k+2}} \text{ (VII)} \quad \text{Lei de Recorrência } k \geq 1.$$

Encontrando os primeiros termos usando (VII).

$a_2 = \frac{a_0}{2}$ (VI).

$k=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1}{3}$

$k=2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0/2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$

$k=3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{a_1/3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5}$

$k=4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0/2\cdot 4}{6} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}$

$k=5 \Rightarrow a_7 = \frac{a_5}{7} = \frac{a_1/3\cdot 5}{7} = \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$

Neste ponto já podemos conjeturar que os coeficientes são da forma:

Subíndice par (2n). $\Rightarrow$ $\boxed{a_{2n} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}}$ (VIII)

O denominador significa um produto que começa em 2 e termina em (2n).

Subíndice ímpar 2n+1 $\Rightarrow$ $\boxed{a_{2n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \quad \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}}$ (IX).

O denominador significa um produto que começa em 3 e termina em (2n+1).

As fórmulas (VIII) e (IX) podem ser provadas por indução. Vamos provar (VIII).

$$P(n): \; a_{2n} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}$$ sentença aberta

Base: $P(1)$ é verdadeira. De fato,

$$a_{2\cdot 1} = a_2 = \frac{a_0}{2} \quad \checkmark$$

eq. (VI).

Denominador começa em 2 e termina em $2\cdot 1$

H.I.: Considere $P(n)$ verdadeira para algum n.

Queremos provar $P(n+1)$ é verdadeira

$$P(n+1): \; a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}$$

H.I.

$$a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{2n+2}$$

Esta última igualdade é a relação de recorrência (VII) colocando $k=2n$. Pelo princípio de indução finita temos que (VIII) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Retornando a (I) vemos que a série deve ser separada em duas partes, uma para potências de x pares e outra para potências de x ímpares:

$$(I) \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} + a_1 x^1$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

$$y(x) = a_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\right)}_{y_2(x)}.$$

Os coeficientes a_0 e a_1 podem tomar valores arbitrários. A solução geral da eq. dif. será

$$\boxed{\begin{aligned} y_{g.h.}(x) &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad a_0 \text{ e } a_1 \in \mathbb{R} \\ y_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!} \\ y_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}}$$

(2) Resolva detalhadamente o problema de valor inicial

$$2x^2y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$$

A eq. dif. é do tipo Cauchy-Euler.

Sol.: A eq. dif. é do tipo Cauchy-Euler.

Vamos procurar soluções da forma

(I) $y(x) = x^r$

Derivando

(II) $y'(x) = r x^{r-1}$

(III) $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$

Substituindo (I), (II) e (III) na eq. dif.

$$2\underbrace{x^2 x^{r-2}}_{x^r} r(r-1) + \underbrace{x\cdot x^{r-1}}_{x^r}\cdot r - 3x^r = 0$$

$$x^r\left(2r(r-1) + r - 3\right) = 0$$

Como o problema de condição inicial foi definido em $x=1$ vamos procurar uma solução para $x>0$. Logo $x^r \neq 0$

Com isso

$$2r(r-1) + r - 3 = 0$$

$$\boxed{2r^2 - r - 3 = 0}$$ Eq. Auxiliar

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$\boxed{r_1 = -1}$ e $\boxed{r_2 = \frac{3}{2}}$ Voltando em (I)

(IV) $$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{3/2}}$$ (Tipo I). C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Derivando

(V) $$\boxed{y'_{gh}(x) = -C_1 x^{-2} + \frac{3}{2} C_2 x^{1/2}}$$

- Usamos agora (IV) e a primeira restrição: $y(1) = 1$

$$y(1) = 1 = C_1 1^{-1} + C_2 \cdot 1^{3/2} = C_1 + C_2$$

(VI) $$\boxed{C_1 + C_2 = 1}$$

- Usando (V) e a segunda restrição: $y'(1) = 4$

$$y'(1) = 4 = -C_1 \cdot 1^{-2} + \frac{3}{2} C_2 \cdot 1^{1/2} = \frac{3}{2} C_2 - C_1$$

(VII) $$\boxed{-C_1 + \frac{3}{2} C_2 = 4}$$

Devemos encontrar C_1 e C_2 de (VI) e (VII)

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$+ \quad -C_1 + \frac{3}{2}C_2 = 4$$

$$\cancel{\frac{5}{2}} C_2 = 5$$

(VIII) $\boxed{C_2 = 2}$

Subtituindo (VIII) em (VI)

$$\boxed{C_1 = -1}$$

Logo, substituindo C_1 e C_2 em (IV) temos

$$\boxed{y_{P.V.I.}(x) = -x^{-1} + 2x^{3/2}} \qquad \boxed{x > 0}$$

ou

$$\boxed{y_{P.V.I.}(x) = -\frac{1}{x} + 2\sqrt{x^3}}$$

3) Resolva a eq. dif. $xy''(x) + 2xy'(x) + 6e^x y(x) = 0$ usando uma série de potências centrada em $x=0$.

Sol.: $x=0$ é um ponto singular da eq. dif.

Para saber se é regular ou irregular vamos re-escrever a eq. dif. na sua forma padrão

$$y''(x) + 2y'(x) + \frac{6e^x}{x} y(x) = 0$$

Como $\lim_{x \to 0} (x \cdot 2) = 0$ e $\lim_{x \to 0} \left(x^2 \frac{6e^x}{x}\right) = 0$ (ambos existem e são finitos)

o ponto $\boxed{x=0 \text{ é singular regular}}$

Para usar o método da série de potências todos os coeficientes precisam ser potências de x. Por isso, vamos escrever a função exponencial pela sua série de Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Como primeira aproximação usaremos que <u>perto de $x=0$</u>

$$e^x \approx 1$$

Com isto, a eq. dif. é reescrita como

(I) $\quad x y''(x) + 2x y'(x) + 6 y(x) = 0$

Vamos procurar uma solução na forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{proposta de } \underline{\text{Frobenius}}$$

$r \in \mathbb{R}$, a ser determinado

(II) $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

Derivando

(III) $\quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$

(IV) $\quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$

Subtituindo (II), (III) e (IV) em (I) temos

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+r} = 0$$ ⑨

$$x^r \Big[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+r) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n}_{\downarrow} \Big] = 0$$

$$x^r \Big[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n-1}}_{\downarrow} + \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n (n+r) + 6a_n) x^n \Big] = 0$$

$$x^r \Big[\underbrace{a_0 r (r-1) x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n-1}}_{k=n-1\ ,\ n=k+1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (2a_n (n+r) + 6a_n) x^n}_{n=k} \Big] = 0$$

$n=1 \Rightarrow k=0$

$$x^r \Big[a_0 r (r-1) x^{-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+r+1)(k+r) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (2a_k (k+r) + 6a_k) x^k}_{} \Big] = 0$$

$$x^r \Big[a_0 r (r-1) x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_{k+1} (k+r+1)(k+r) + 2a_k (k+r) + 6a_k \Big) x^k \Big] = 0$$

igualdade de polinômios

$$\begin{cases} a_0 r (r-1) = 0 & (\mathrm{V}) \\ a_{k+1} (k+r+1)(k+r) + 2a_k (k+r) + 6a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 & (\mathrm{VI}) \end{cases}$$

Como $a_0 \neq 0$ temos

$\boxed{r(r-1) = 0 \quad \text{Eq. Indicial}}$

$\boxed{r = r_2 = 0}$ caso (i) e $\boxed{r = r_1 = 1}$ caso (ii)

raizes indiciais ou expoentes na singularidade

$r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$

$$a_{k+1} (k+r+1)(k+r) = -2a_k (k+r) - 6a_k = -2a_k \cdot k - 2a_k \cdot r - 6a_k$$

$$= \cancel{}$$

$$= -2a_k \big[k + r + 3 \big]$$

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{-2(k+r+3)\,a_k}{(k+r+1)(k+r)}}$$ Eq. Geral de Recorrência $k \geq 0$

Caso i) $r = r_1 = 1$

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{-2(k+4)\,a_k}{(k+1)(k+2)}}$$ Eq. de Recorrência $r = 1$, $k \geq 0$

$$k=0 \Rightarrow a_1 = \frac{-2\cdot 4\, a_0}{1\cdot 2}$$

$$k=1 \Rightarrow a_2 = \frac{-2\cdot 5\, a_1}{2\cdot 3} = \frac{(-2)5}{2\cdot 3}\frac{(-2)\cdot 4}{1\cdot 2}a_0 = \frac{(-2)^2\cdot 4\cdot 5\cdot a_0}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3}$$

$$k=2 \Rightarrow a_3 = \frac{-2\cdot 6\, a_2}{3\cdot 4} = \frac{-2\cdot 6}{3\cdot 4}\frac{(-2)^2\cdot 4\cdot 5\cdot a_0}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} = \frac{(-2)^3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, a_0}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4}$$

Conjetura: $$\boxed{a_n = \frac{(-2)^n\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(n+3)\,a_0}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdots n(n+1)} \quad \forall n \geq 1}$$

Significado do Numerador: Produto que começa em 4 e termina em $(n+3)$

" Denominador: Produto que começa em $1\cdot 2$ e termina em $n(n+1)$.

Voltando em (II)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \underset{\boxed{r_1=1}}{=} x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^1\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right]$$

Pondo $a_0 = 1$ temos que

$$\boxed{y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots(n+3)}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdots n(n+1)}x^n\right]}$$ primeira solução fundamental da eq. dif.

Como estamos no caso em que $r_1 > r_2$ e $r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$ a segunda solução fundamental terá a forma

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln|x| + \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) x^n\right]$$

veja Teorema 5.6.1, pág 245, Boyce e Diprima (um dos textos do curso)

4) Use a transformada de Laplace para resolver detalhadamente o problema de valor inicial

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

Sol.: Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ a transformada de Laplace da função $y(t)$. Aplicando a transformada de Laplace nos dois lados da eq. dif. temos

$$\mathcal{L}\{y''(t) - y'(t) - 6y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$$

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''(t)\}} - \underbrace{\mathcal{L}\{y'(t)\}} - 6\mathcal{L}\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)} - \underbrace{y'(0)} - (sY(s) - \underbrace{y(0)}) - 6Y(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) - s \cdot 1 - (-1) - sY(s) + 1 - 6Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 - s - 6) - s + 2 = 0$$

$$Y(s)(s^2 - s - 6) = s - 2$$

(I) $Y(s) = \dfrac{s-2}{s^2 - s - 6} = \dfrac{s-2}{(s-3)(s+2)}$

Vamos procurar coeficientes A e B tais que

Decomposição em Frações Parciais

(II) $\dfrac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+2}$

a) Multiplicando por $(s-3)$ (II)

$$\frac{s-2}{s+2} = A + B\frac{(s-3)}{s+2}$$

– Avaliando em $s=3$

$$\boxed{A = \frac{s-2}{s+2}\Big|_{s=3} = \frac{1}{5}}$$

b) Multiplicando por $(s+2)$ (II)

$$\frac{s-2}{s-3} = \frac{A(s+2)}{s-3} + B$$

– Avaliando em $s=-2$

$$\boxed{B = \frac{s-2}{s-3}\Big|_{s=-2} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}}$$

Logo, voltando primeiro em (II) e depois em (I) temos

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

Sabendo que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ se $s > a$

podemos encontrar as tranformadas inversas

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}}$$

P.V.I.

5) Encontre a transformada de Laplace Inversa da função

$$F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$$

Sol.: Note que o denominador pode ser fatorado

como $s^2-4s+3 = (s-3)(s-1)$ logo

(I) $$F(s) = \frac{(s-2)\,e^{-s}}{(s-3)(s-1)}$$

Agora vamos decompor em frações simples $\frac{s-2}{(s-3)(s-1)}$

$$\frac{s-2}{(s-3)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1}$$

$$A = \left.\frac{s-2}{s-1}\right|_{s=3} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left.\frac{s-2}{s-3}\right|_{s=1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\frac{s-2}{(s-3)(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-1}\right)$ e voltando em (I)

(II) $$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s-3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s-1}\right)$$

- Sabemos que $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ se $s > a$

logo $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}$ e $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{t}$

- Mas os somandos em $F(s)$ estam multiplicados por e^{-s}.
Por isso temos que usar o Segundo Teorema da Translação.
Forma Inversa

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$$

$a > 0$

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } 0 \le t \le a \end{cases}$$ função salto unitário

- Voltando a (II) vamos calcular a transformada inversa de Laplace

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s-3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s-1}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s-3}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s-1}\right\}$$

$a = 1$ $\qquad a = 1$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{3(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1) + \frac{1}{2}e^{(t-1)}\,\mathcal{U}(t-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-1)\left[e^{3(t-1)} + e^{t-1}\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-1)\left[e^{2(t-1)}e^{(t-1)} + \frac{e^{2(t-1)}}{e^{2(t-1)}}e^{(t-1)}\right]$$

$$f(t) = \mathcal{U}(t-1)\,e^{2(t-1)}\left[\frac{e^{(t-1)} + e^{-(t-1)}}{2}\right]$$

$$f(t) = \mathcal{U}(t-1)\,e^{2(t-1)}\cosh(t-1)$$

6) Resolva detalhadamente o problema de valores de contorno: (15)

$$y'' + 4y = \cos(x) \quad , \quad y'(0) = 0 \ , \ y'(\pi) = 0$$

Sol.: Iniciamos resolvendo a eq. homôgenea correspondente

$$y'' + 4y = 0 \quad , \text{ Proposta de solução } y(x) = e^{rx}$$

troca $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 + 4 = 0$ Eq. Auxiliar

$r^2 = -4 = \pm 2i$ Tipo III $(\alpha = 0, \beta = 2)$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

Agora vamos procurar uma solução particular da eq. não homogênea $y'' + 4y = \cos(x)$ (I)

Método dos Coeficientes Indeterminados

proposta: $y_p(x) = D_1 \cos(x) + D_2 \operatorname{sen}(x)$

$$y_p'(x) = -D_1 \operatorname{sen}(x) + D_2 \cos(x)$$

$$y_p''(x) = -D_1 \cos(x) - D_2 \operatorname{sen}(x)$$

Subtituindo em (I)

$$-D_1 \cos(x) - D_2 \operatorname{sen}(x) + 4\left(D_1 \cos(x) + D_2 \operatorname{sen}(x)\right) = 1 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(x)$$

$$3D_1 \cos(x) + 3D_2 \operatorname{sen}(x) = 1 \cos(x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(x)$$

$$D_1 = 1/3 \quad e \quad D_2 = 0$$

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{3}\cos(x)}$$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1\cos(2x) + C_2\,\text{sen}(2x) + \frac{1}{3}\cos(x).}$$

$$\boxed{y'_{g.n.h.}(x) = -2C_1\,\text{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x) - \frac{1}{3}\,\text{sen}(x)}$$

- Vamos usar a primeira restrição: $y'(0)=0$

$$y'_{g.n.h}(0) = 0 = -2C_1\,\cancel{\text{sen}(0)}^{0} + 2C_2\underbrace{\cos(0)}_{1} - \frac{1}{3}\,\cancel{\text{sen}(0)}^{0}$$

$$2C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

- Segunda restrição: $y'(\pi)=0$

$$y'_{g.n.h.}(\pi) = -2C_1\,\cancel{\text{sen}(2\pi)}^{0} - \frac{1}{3}\,\cancel{\text{sen}(\pi)}^{0} = 0$$

$$0 = 0$$

Não existe nenhuma restrição sobre C_1, existem infinitas soluções desto problema da forma

$$\boxed{y_{P.V.C}(x) = C_1\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(x) \qquad C_1 \in \mathbb{R}}$$

7) Encontre os autovalores reais e autofunções do problema de valores de contorno:

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y'(\pi) = 0$$

Sol.: $y'' + \lambda y = 0$ Eq. Dif.

$r^2 + \lambda = 0$ Eq. Auxiliar

$r^2 = -\lambda$

Temos três casos a considerar

i) $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$

ii) $\lambda = 0$

iii) $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

i) $r^2 = -\mu^2$ (Tipo III)

$r = \pm \mu i$ $(\alpha = 0, \beta = \mu)$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$

$$y'_{gh}(x) = -\mu C_1 \operatorname{sen}(\mu x) + \mu C_2 \cos(\mu x)$$

- Usando a primeira restrição: $y'(0) = 0$

$$y'(0) = 0 = -\mu C_1 \overbrace{\cancel{\operatorname{sen}(0)}}^{0} + \mu C_2 \underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$\mu C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

- Usando a segunda restrição

$$y'(\pi) = 0 = -\mu C_1 \operatorname{sen}(\mu \pi)$$

Como queremos outras soluções além da trivial $C_1 \neq 0$ e consideramos $\mu > 0$, logo

$$\operatorname{sen}(\mu\pi) = 0 \Rightarrow \mu\pi = n\pi, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\mu = n}$$

Temos autovalores

$\boxed{\lambda = \mu^2 = n^2, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1.}$

e autovetores (salvo uma constante C_1)

$y(x) = \cos(\mu x)$

$\boxed{y(x) = \cos(nx), \; n \in \mathbb{N}}$

ii) $\lambda = 0$

$r^2 = 0$ Tipo II

$\boxed{r = 0}$ dupla

$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 x \underbrace{e^{0x}}_{1}$

$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 + C_2 x}$

$\boxed{y'_{gh}(x) = C_2}$

Usando a primeira restrição : $y'(0) = 0$

$y'(0) = 0 = C_2$

$\boxed{C_2 = 0}$

A segunda restrição : $y'(\pi) = 0$

$y'(\pi) = 0 = C_2$

$\boxed{C_2 = 0}$

Se chega na mesma conclusão. Como C_1 não sofre nenhuma restrição temos que $\boxed{\lambda = 0 \text{ é um autovalor}}$ e $\boxed{y(x) = 1 \text{ é uma autofunção associada}}$ (existem infinitas, basta multiplicar por C_1).

iii) $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$

$r^2 = \mu^2$ (Tipo I, $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\begin{aligned} y_{gh}(x) &= C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \operatorname{senh}(\mu x) \\ y'_{gh}(x) &= \mu C_1 \operatorname{senh}(\mu x) + \mu C_2 \cosh(\mu x) \end{aligned}}$$

Usando a primeira restrição: $y'(0) = 0$

$$y'(0) = 0 = \mu C_1 \cancel{\overset{0}{\operatorname{senh}(0)}} + \mu C_2 \underbrace{\cosh(0)}_{1}$$

$$\mu C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

Usando a segunda: $y'(\pi) = 0$

$$y'(\pi) = \mu C_1 \operatorname{senh}(\mu \pi)$$

$\mu > 0$ e $\operatorname{senh}(\mu\pi) \neq 0$ logo $C_1 = 0$

e somente existe a solução trivial neste caso.

Resumindo, os autovalores e autofunções associadas são

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda = 0, \quad y(x) = 1 \\ &\qquad\quad e \\ &\lambda = n^2, \quad y(x) = \cos(nx) \\ &n \in \mathbb{N} \\ &n \geq 1 \end{aligned}}$$

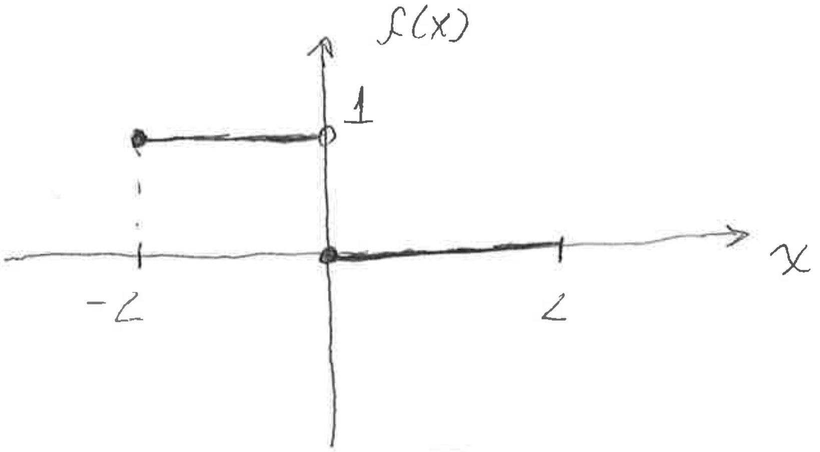
Se permitimos $n = 0$ então o segundo tipo inclue o primeiro.

8) Encontre a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -L \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < L \end{cases} \quad \text{e } f(x+2L) = f(x)$$

Faça os gráficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $f(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-L \leq x \leq L$.

Sol.:



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

Fórmulas da Série de Fourier

Neste problema basta integrar de $-L$ a zero.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} 1\,dx = \frac{1}{L}\, x\Big|_{-L}^{0} = \frac{1}{L}\left(0-(-L)\right) = 1$$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = +\frac{1}{\cancel{L}}\,\frac{\cancel{L}}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\Big|_{-L}^{0}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left[\overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}}}(0) - \overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}}}\left(\frac{n\pi}{\cancel{L}}\cancel{L}\right)\right]$$

$\boxed{a_n = 0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx = \frac{-1}{\cancel{L}}\,\frac{\cancel{L}}{n\pi}\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\Big|_{-L}^{0}$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\left[\cos(0) - \cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{L}}(-\cancel{L})\right)\right]$$

$$\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

- Se n é par ($n=2k$) então $b_n = \boxed{b_{2k} = 0}$
- Se n é ímpar ($n=2k+1$, $k=0,1$) então $b_n = \boxed{b_{2k+1} = \frac{-2}{n\pi}}$

$k=0,1,2,\ldots$

Logo, a série de Fourier de $f(x)$ será

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{(2k+1)\pi}\,\mathrm{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{L}x\right)$$

trocando por
$2k+1$

As três primeiras aproximações serão

$$f(x) \approx \frac{1}{2}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

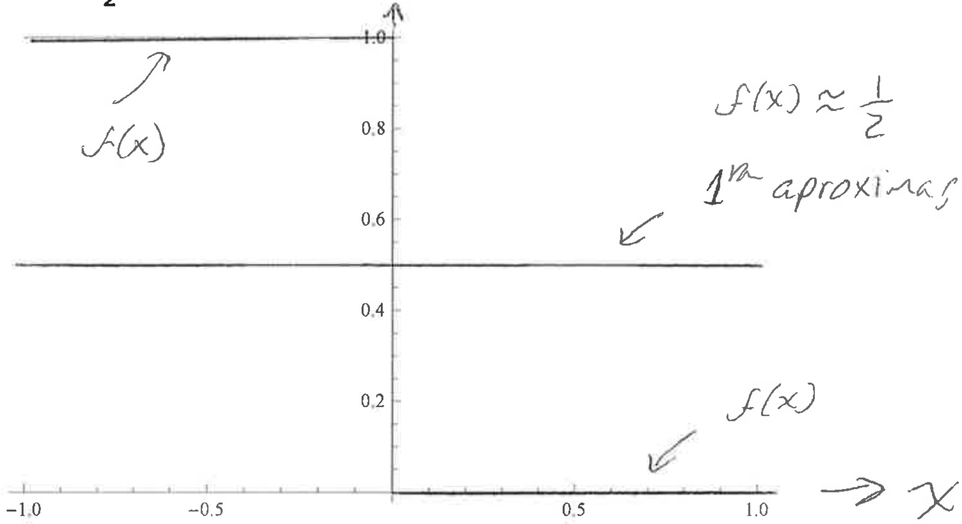
$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen}\left(3 \frac{\pi}{L} x\right)$$

A próxima página mostra os gráficos para $L = 1$.

$L = 1$

In[3]:= `Plot[{1/2, If[-1 < x < 0, 1, 0]}, {x, -1, 1}]`

Out[3]=

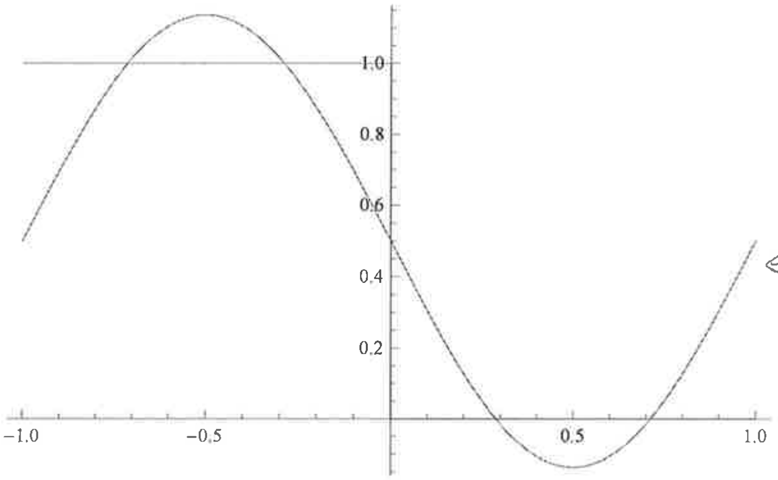


$f(x) \approx \frac{1}{2}$

1^{ra} aproximação

In[4]:= `Plot[{1/2 - (2/π) Sin[π x], If[-1 < x < 0, 1, 0]}, {x, -1, 1}]`

Out[4]=

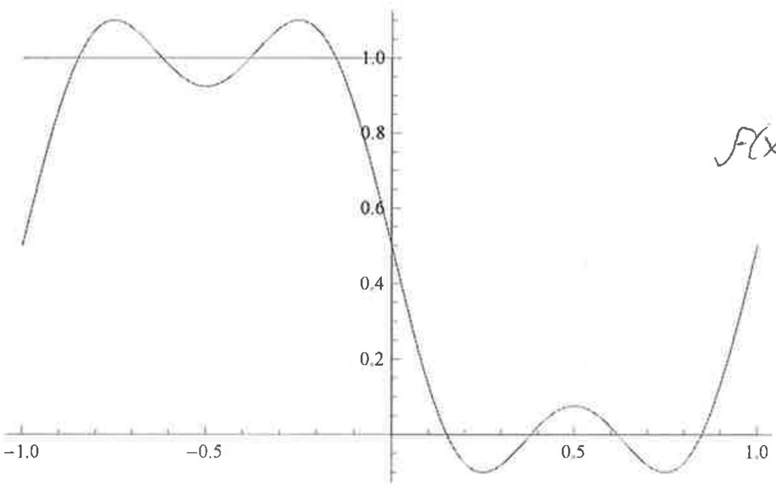


$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x)$

2^{da} aproximação

In[5]:= `Plot[{1/2 - (2/π) Sin[π x] - (2/(3 π)) Sin[3 π x], If[-1 < x < 0, 1, 0]}, {x, -1, 1}]`

Out[5]=



$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x) - \frac{2}{3\pi}\,\mathrm{sen}(3\pi x)$

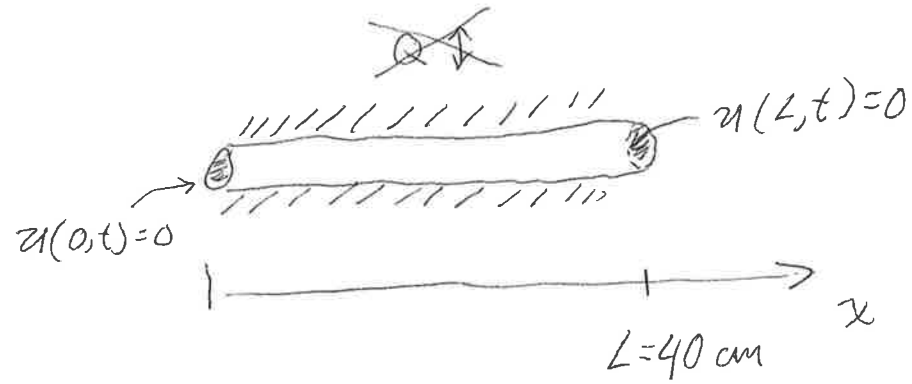
3^{ra} aproximação

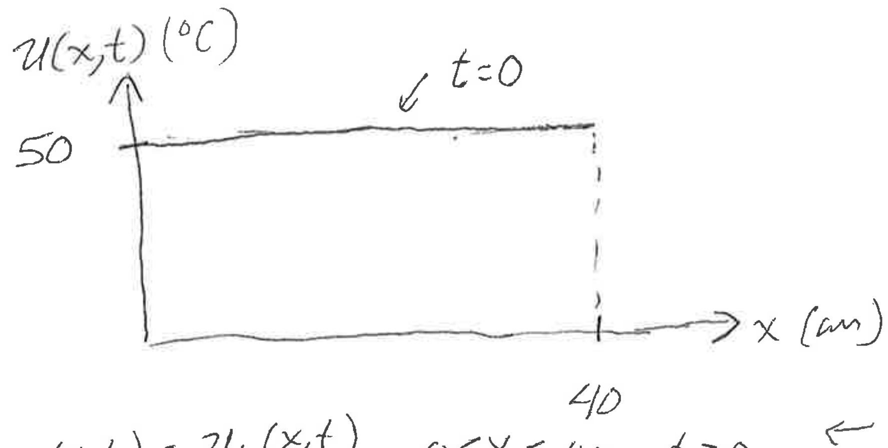
9) Considere a condução do calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de 0°C para todo $t>0$. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a distribuição inicial de temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for

$$u(x,0)=50, \quad 0<x<40$$

Considere $\alpha=1$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs. x" usando o primeiro somando da solução para diferentes valores de x e t, respectivamente.

Sol.:





$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), \quad 0<x<40, \; t>0 & \leftarrow \text{Eq. do Calor} \\ u(0,t)=0=u(L,t), \quad \forall t\geq 0 & \leftarrow \text{Condições de Fronteira Homogêneas} \\ u(x,0)=50, \quad 0<x<40, \; t=0 & \leftarrow \text{Condição Inicial} \end{cases}$$

A solução para este tipo de problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{onde}$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx \quad \text{e } n \in \mathbb{N}$$

Vamos calcular os C_n

$$C_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{40}_{\,2}} \int_0^{40} 5\cancel{0} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{40} x\right) dx = \frac{5}{2} \int_0^{40} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{40} x\right) dx$$

$$C_n = -\frac{5}{\cancel{2}} \frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{40} x\right) \Big|_0^{40} = -\frac{100}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{40}} \cancel{40}\right) - \cos(0)\right]$$

$$C_n = -\frac{100}{n\pi} \left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

$$C_n = -\frac{100}{n\pi} \left[(-1)^n - 1\right]$$

- Se n é par $(n=2k)$ então $C_n = 0$
- Se n é ímpar $(n=2k+1)$ então $C_n = \dfrac{200}{n\pi}$ ou $C_{2k+1} = \dfrac{200}{(2k+1)\pi}$

com $k = 0, 1, \cdots$

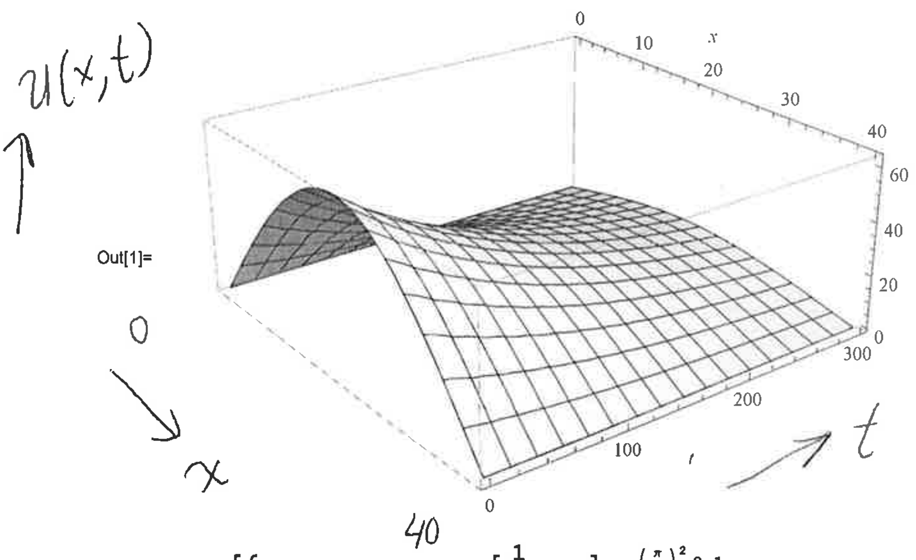
Logo, a solução é

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{200}{(2k+1)\pi} e^{-\alpha^2 \left(\frac{(2k+1)\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left((2k+1) \frac{\pi}{40} x\right)}$$

Colocando $\alpha = 1$ a primeira aproximação é

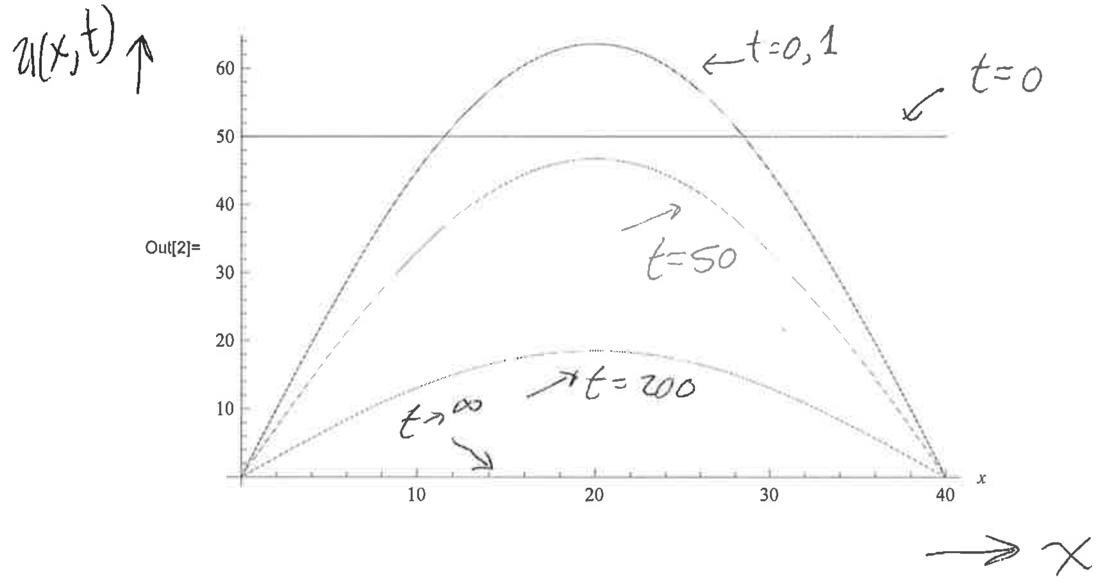
$$u_1(x,t) \approx \frac{200}{\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{40} x\right)$$

Out[1]=



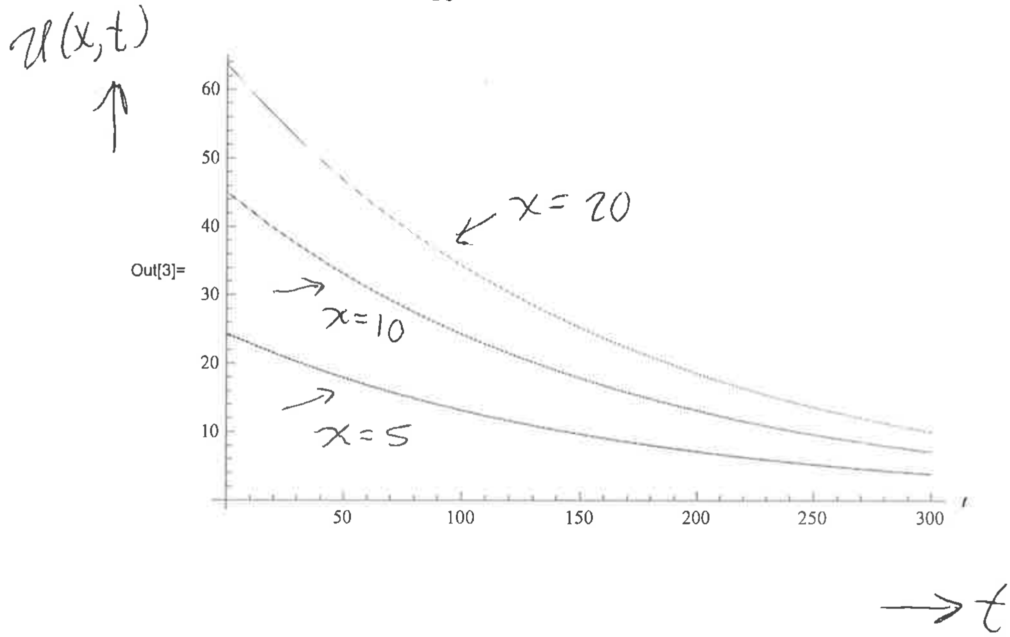
In[2]:= $\texttt{Plot}\left[\left\{50,\ (200/\pi)\ \texttt{Sin}\left[\frac{1}{40}\pi x\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 0.1},\ (200/\pi)\ \texttt{Sin}\left[\frac{1}{40}\pi x\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 50},\ (200/\pi)\ \texttt{Sin}\left[\frac{1}{40}\pi x\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 200}\right\},\ \{x,\ 0,\ 40\},\ \texttt{AxesLabel} \to \texttt{Automatic}\right]$

Out[2]=



In[3]:= $$\text{Plot}\left[\left\{(200/\pi)\ \text{Sin}\left[\frac{1}{40}\,\pi\,5\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t},\ (200/\pi)\ \text{Sin}\left[\frac{1}{40}\,\pi\,10\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t},\ (200/\pi)\ \text{Sin}\left[\frac{1}{40}\,\pi\,20\right] e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t}\right\},\ \{t, 0, 300\},\ \text{AxesLabel} \rightarrow \text{Automatic}\right]$$

Out[3]=

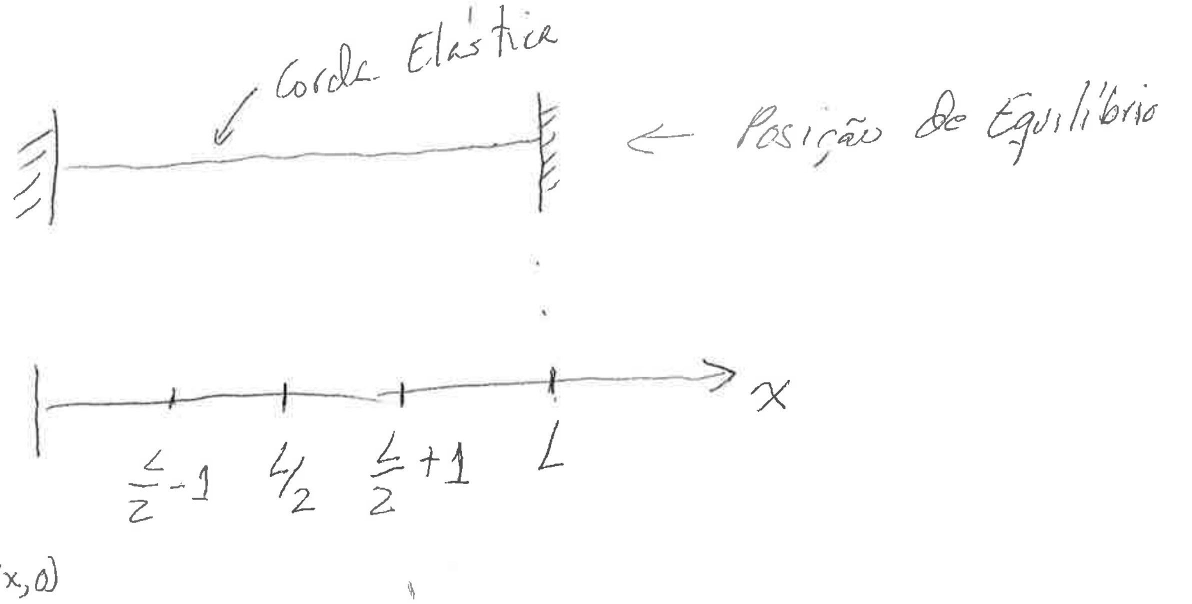


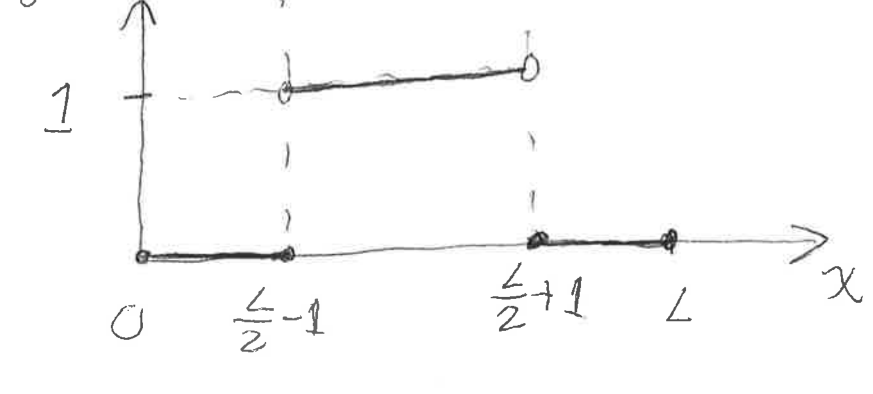
10) Considere uma corda elástica de comprimento L ($L>2$) cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio, com velocidade inicial:

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{L}{2}-1 < x < \frac{L}{2}+1 \\ 0 & \text{outros intervalos} \end{cases}$$

Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. Considere a velocidade de propagação horizontal da onda $v = 1\,m/s$ e faça os gráficos "u vs. t" e "u vs x" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de x e t, respectivamente.

Sol.:





- $-a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$, $0 < x < L$, $t > 0$
  Eq. Dif. em Derivadas Parciais de Onda.
- $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, $\forall t \geq 0$
  Condição de Contorno Homogênea. Os extremos da corda estam fixos (não oscilam)
- $u(x,0) = 0$, $\forall x$ em $0 \leq x \leq L$, $t = 0$
  A corda parte de sua posição de equilíbrio
- $u_t(x,0) = g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{L}{2} - 1 < x < \frac{L}{2} + 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases}$$

  Velocidade vertical inicial

Condições Iniciais ($t=0$)

Como pode ser visto no livro de texto ou nas notas de aula a solução para este tipo de problema é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(a n \frac{\pi}{L} t\right) \text{ onde}$$

$$a \cdot n \cdot \frac{\pi}{L} \cdot C_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx \quad , n \in \mathbb{N}$$

Vamos calcular C_n, $a = 1\,m/s = v$

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_{\frac{L}{2}-1}^{\frac{L}{2}+1} 1 \cdot \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{-2}{n\pi} \frac{L}{n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \Bigg|_{\frac{L}{2}-1}^{\frac{L}{2}+1}$$

$$C_n = \frac{-2L}{(n\pi)^2} \left[\cos\left(n\pi \frac{\frac{L}{2}+1}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi\left(\frac{L}{2}-1\right)}{L}\right) \right]$$

$$C_n = \frac{-2L}{(n\pi)^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\pi}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{n\pi}{L}\right)\right]$$

Usando que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)\,sen(b)$

e $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)\,sen(b)$

teremos

$$C_n = \frac{-2L}{(n\pi)^2}\left[\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)} - sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}\right) - \left(\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)} + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{C_n = \frac{4L}{(n\pi)^2}\,sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)}$$

logo, a solução do problema será

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(n\pi)^2}\,sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}t\right)}$$

- Seja $L=4$, teremos

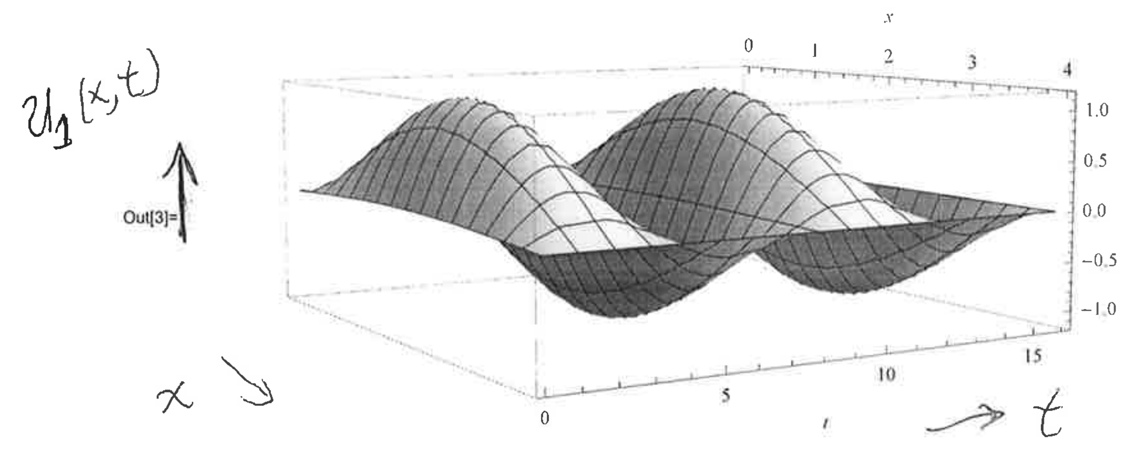
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)sen\left(\frac{n\pi}{4}x\right)sen\left(\frac{n\pi}{4}t\right)$$

- Tomando o primeiro somando $(n=1)$

$$u_1(x,t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \underbrace{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\,\underbrace{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)sen\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

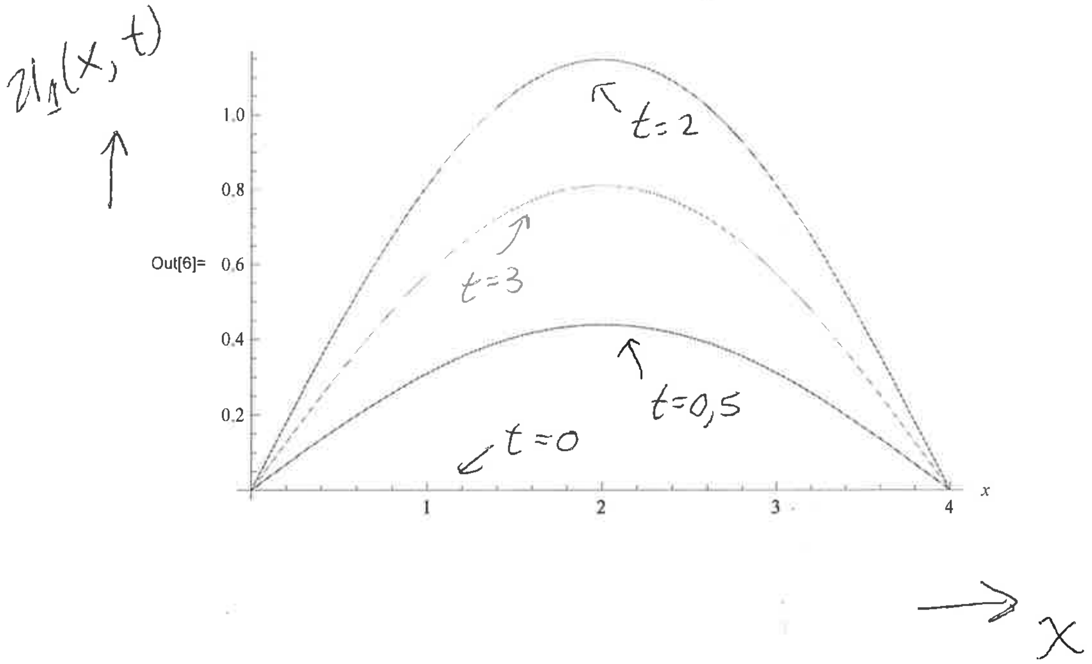
In[3]:= $\texttt{Plot3D}\left[(4/\pi)^2 \,\texttt{Sin}\left[\frac{1}{2}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, x\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, t\right],\right.$
$\left.\{x, 0, 4\}, \{t, 0.1, 16\}, \texttt{AxesLabel} \to \texttt{Automatic}\right]$

Out[3]=



In[6]:= $\texttt{Plot}\left[\left\{(4/\pi)^2 \,\texttt{Sin}\left[\frac{1}{2}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, x\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, 0.5\right],\right.\right.$
$(4/\pi)^2 \,\texttt{Sin}\left[\frac{1}{2}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, x\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, 2\right],$
$\left.(4/\pi)^2 \,\texttt{Sin}\left[\frac{1}{2}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, x\right] \texttt{Sin}\left[\frac{1}{4}\pi\, 3\right]\right\},$
$\left.\{x, 0, 4\}, \texttt{AxesLabel} \to \texttt{Automatic}\right]$

Out[6]=



```
In[7]:= Plot[{(4 / π)^2 Sin[1/2 π] Sin[1/4 π] Sin[1/4 π 0.5] Sin[1/4 π t],
    (4 / π)^2 Sin[1/2 π] Sin[1/4 π] Sin[1/4 π 2] Sin[1/4 π t],
    (4 / π)^2 Sin[1/2 π] Sin[1/4 π] Sin[1/4 π 3] Sin[1/4 π t]},
   {t, 0, 4}, AxesLabel → Automatic]
```

Out[7]=