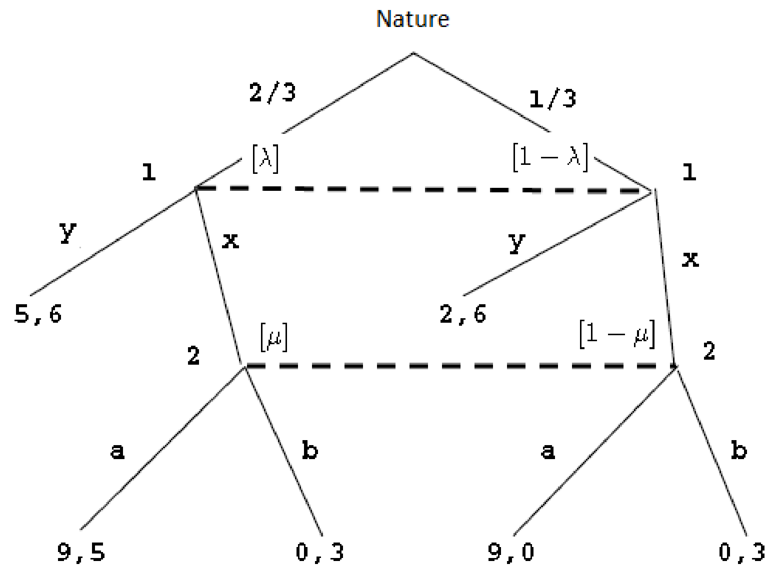
EAE 5706: Microeconomia II

2^o Semestre de 2017

Prova 2: Teoria dos Jogos

Questão 1. Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



No início do jogo, a natureza escolhe aleatoriamente entre "esquerda" e "direita" com probabilidades 2/3 e 1/3, respectivamente. As crenças dos jogadores 1 e 2 são denotadas pelos parâmetros λ e μ, com λ, $\mu \in [0, 1]$, conforme indicado na figura acima. Responda as seguintes questões:

a. Caracterize o conjunto de todos os *weak Perfect Bayesian equilibrium* em estratégias puras em que o conjunto de informação do jogador 2 não é alcançado em equilíbrio. Justifique a sua resposta. (1,0 ponto)

b. Caracterize o conjunto de todos os *equilíbrios sequenciais* em estratégias puras em que o conjunto de informação do jogador 2 não é alcançado em equilíbrio. Justifique a sua resposta. (1,0 ponto)

Respostas.

a. O conjunto de todos os *weak Perfect Bayesian equilibria* em estratégias puras em que o conjunto de informação do jogador 2 não é alcançado em equilíbrio é caracterizado pelo seguinte par de estratégias e crenças: (y, b), com $\lambda = \frac{2}{3}$ e $\mu \leq \frac{3}{5}$.

b. Considere uma estratégia totalmente mista em que o jogador 1 escolhe x com probabilidade $\xi > 0$. Dada esta estratégia, a crença do jogador 2 deve ser tal que:

$$\mu_\xi = \frac{\frac{2}{3}\xi}{\xi} = \frac{2}{3},$$

pela regra de Bayes. Logo, em qualquer equilíbrio sequencial, $\mu = \frac{2}{3}$. No entanto, note que como $\mu = \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, então, pelo item anterior, não pode existir nenhum equilíbrio sequencial em que o conjunto de informação do jogador 2 não seja alcançado em equilíbrio.

Questão 2. Considere o seguinte jogo na forma normal:

		Jogador 2		
		L	C	R
Jogador 1	T	$-2,-2$	$-1,1$	$0,0$
	M	$1,-1$	$3,5$	$3,4$
	B	$0,0$	$4,2$	$2,4$

Responda as seguintes questões:

a. Encontre todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras e mistas deste jogo. Quais são os *Nash threat payoffs* dos jogadores? Quais são os payoffs de minmax e maxmin dos jogadores? (0,75 ponto)

b. Discuta se é possível sustentar um equilíbrio de Nash perfeito de subjogo em que (M, C) seja jogado em todos os períodos de um jogo infinitamente repetido usando uma estratégia de tipo *Nash reversion.* Justifique a sua resposta. (0,75 ponto)

c. Derive as condições sob as quais é possível sustentar um equilíbrio de Nash perfeito de subjogo em que (M, C) seja jogado em todos os períodos de um jogo infinitamente repetido, usando (T, L) como punição por um número finito de períodos em caso de desvio. Descreva as estratégias dos jogadores. Justifique a sua resposta. (1,5 pontos)

Respostas.

a. O único equilíbrio de Nash do jogo é caracterizado pelo seguinte par de estratégias mistas: $\left(\sigma_1(M) = \frac{2}{3},\ \sigma_1(B) = \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\sigma_2(C) = \frac{1}{2},\ \sigma_2(R) = \frac{1}{2}\right)$. Assim, os *Nash threat payoffs* dos jogadores são os seguintes:

$$\underline{v}_1 = 3$$

$$\underline{v}_2 = 4$$

Os *minmax* payoffs são:

$$\underline{\underline{v}}_1^{\min\max} = \underline{\underline{v}}_2^{\min\max} = 1$$

Os *maxmin payoffs* são:

$$\underline{\underline{v}}_1^{\max\min} = \underline{\underline{v}}_2^{\max\min} = 1$$

b. Considere a seguinte estratégia de revesão ao equilíbrio de Nash: jogar M/C no primeiro período e, em qualquer período subsequente, desde que nenhum jogador tenha desviado em um período anterior; caso contrário jogar a estratégia consistente com o único equilíbrio de Nash (em estratégias mistas) do jogo. Observe que a condição para que o jogador 1 não tenha incentivo para desviar é a seguinte:

$$\underbrace{3 + \delta\frac{3}{1-\delta}}_{\text{cooperação}} \geq \underbrace{4}_{\text{desvio}} + \underbrace{\delta\frac{3}{1-\delta}}_{\text{punição}}$$

Note que esta condição nunca poderá ser satisfeita, pois $3 > 4$, de forma que um equilíbrio em que (M, C) é jogado em todos os períodos não pode ser sustentado por meio de uma estratégia de reversão ao equilíbrio de Nash.

c. Considere o seguinte perfil de estratégias:

- Fase E: Jogar (M, C). Caso algum jogador desvie de (M, C), mudar para a fase P. Caso contrário, continuar na fase E.

- Fase P: Jogar (T, L) por K períodos e depois retornar à fase E. Caso algum jogador desvie de (T, L), recomeçar a fase P.

Usando o *one-shot deviation principle*, podemos mostrar que a condição para que o jogador 1 não tenha incentivo para desviar na fase E é a seguinte:

$$3 + 3\delta + 3\delta^2 + ... + 3\delta^K + 3\delta^{K+1} + ... \geq 4 - 2\delta - 2\delta^2 - ... - 2\delta^K + 3\delta^{K+1} + ...$$

$$3 + 5\delta + 5\delta^2 + ... + 5\delta^K \geq 4 \;\Rightarrow\; 5\delta\frac{1-\delta^K}{1-\sigma} \geq 1$$

Note que o jogador 1 também é aquele que menos ganha ao retornar para a fase E. Observe que a condição para que ele não tenha incentivo para desviar na fase P é a seguinte:

$$-2 - 2\delta - 2\delta^2 - ... - 2\delta^{K-1} + 3\delta^K + ... \geq 1 - 2\delta - 2\delta^2 - ... - 2\delta^{K-1} - 2\delta^K + 3\delta^{K+1} ...$$

$$-2 + 3\delta^K \geq 1 - 2\delta^K \;\Rightarrow\; \delta^K \geq \frac{3}{5}$$