Universidade de São Paulo - Instituto de Física

Exercício Oito

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

Um pêndulo esférico é formado por uma pequena massa m presa à extremidade de uma corda ideal de comprimento l que está fixa na outra extremidade, de tal maneira que o movimento dessa partícula acontece numa superfície esférica.

(a) Escreva a lagrangiana do pêndulo

(b) Obtenha as equações de Euler-Lagrange.

(c) Determine com qual velocidade angular $\dot{\phi}(\theta_0)$ a partícula se moverá em um círculo em torno do eixo $\hat{z}$, com a corda fazendo um ângulo θ_0 constante na vertical.

(d) Para o caso em que a amplitude de oscilação em torno de θ_0 é pequena, obtenha a frequência de pequenas oscilações.

(e) Mostre que

$$\frac{|\dot{\phi}(\theta_0)|^2}{\omega^2_{\text{peq. oscil.}}} = \frac{1}{1 + 3\cos^2(\theta_0)}$$

Sugestões: Resolva o problema em coordenadas esféricas. Obtenha a frequência de pequenas oscilações a partir do potencial efetivo.

2 Resposta

(a): Vamos escrever a lagrangiana desse sistema. Note que como o sistema pede coordenadas esféricas basta que nós notemos que

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) \tag{1}$$

Que é a energia cinética em coordenadas esféricas quando $r = l$. Note que utilizamos que $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$. Para obter essa energia cinética basta escrever as transformações de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas colocando $r = l$ e então derivar e quadrar os resultados. A soma será o termo entre parenteses acima. Da mesma forma, podemos então escrever

$$U = -mgl\cos(\pi - \theta) = mgl\cos(\theta) \tag{2}$$

e então a lagrangiana será

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{ml^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2}{2} - mgl\cos(\theta) \tag{3}$$

(b): Escrevendo as equações de Euler-Lagrange nós teremos que

2.1 Equação para θ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mgl\sin(\theta) + ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \tag{5}$$

então

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta) + ml^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 \tag{6}$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) = 0 \tag{7}$$

2.2 Equação para ϕ

Note que a lagrangiana não depende de ϕ de modo que teremos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} \tag{8}$$

e então a equação é simplesmente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\right) = 0 \tag{9}$$

(c): Seja então o ângulo θ_0 fixo. Então teremos da equação do movimento para θ que

$$\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)\dot{\phi}^2 = -\frac{g}{l}\sin(\theta_0) \tag{10}$$

donde

$$\dot{\phi}(\theta_0)^2 = \frac{g}{l\cos(\pi - \theta_0)} \tag{11}$$

(d): Consideremos, como a sugestão do exercício nos recomendou, que temos a energia total do sistema

$$E = T + U = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + U_{ef} \tag{12}$$

Onde nós definimos o potencial efetivo como sendo

$$U_{ef} := \frac{ml^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2}{2} + mgl\cos(\theta) \tag{13}$$

Note que da equação anterior para ϕ nós temos que

$$\dot{\phi}^2 = \frac{A^2}{(ml^2)^2 \sin^4(\theta)} \tag{14}$$

Onde A é uma constante. Nesse caso o potencial efetivo vai ficar

$$U_{ef} = \frac{A^2}{2ml^2 \sin^2(\theta)} + mgl\cos(\theta) \tag{15}$$

Portanto

$$U'_{ef}(\theta) = \frac{-A^2}{ml^2}\frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - mgl\sin(\theta) \tag{16}$$

E, calculando a segunda derivada nós teremos que

$$U''_{ef}(\theta) = \frac{A^2}{ml^2}\left(\frac{1+2\cos(\theta)}{\sin^4(\theta)}\right) - mgl\cos(\theta) \tag{17}$$

De modo que nós teremos (fazendo $\omega^2 = U''_{ef}/ml^2$)

$$\omega^2_{\text{peq. osc.}} = \frac{A^2}{m^2l^4}\left(\frac{1+2\cos(\theta_0)}{\sin^4(\theta_0)}\right) - \frac{g}{l}\cos(\theta_0) \tag{18}$$

(e): Por fim vamos verificar a identidade que o exercício pede. Para isso vamos utilizar que, quando $\theta = \theta_0$ teremos a relação

$$A^2 = (ml^2\sin^2(\theta_0))^2\dot{\phi}^2 \tag{19}$$

E então teremos

$$\omega^2_{\text{peq. osc.}} = \dot{\phi}^2(1+2\cos^2(\theta_0)) - \frac{g}{l}\cos(\theta_0) \iff \tag{20}$$

$$\frac{\omega^2_{\text{peq. osc.}}}{\dot{\phi}^2} = (1+2\cos^2(\theta_0)) - \frac{g}{l}\cos(\theta_0)\cdot\left(\frac{-l\cos(\theta_0)}{g}\right) \tag{21}$$

Portanto nós conseguimos que

$$\frac{\omega^2_{\text{peq. osc.}}}{\dot{\phi}^2} = (1+3\cos^2(\theta_0)) \tag{22}$$

Que corresponde ao que o exercício pede para que seja demonstrado.