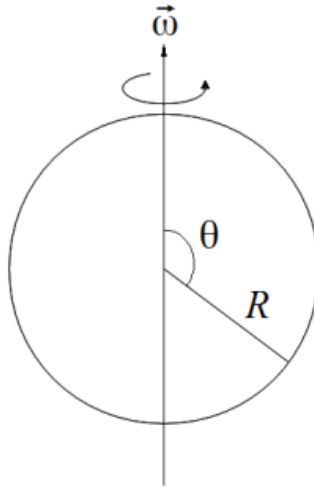


Exercício Sete

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

O movimento sem atrito de uma argola de massa m está restrito ao aro de raio R . O aro gira com velocidade angular ω em torno de um eixo vertical que coincide com um diâmetro, como mostra a figura.



- (a) Calcule a força centrífuga.
- (b) Calcule a força de Coriolis.
- (c) Escreva a lagrangiana L do sistema.
- (d) Mostre que a grandeza

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L$$

é uma constante do movimento e identifique essa constante.

- (e) Obtenha a equação do movimento da argola e identifique as forças inerciais nessa equação.
- (f) Determine as posições de equilíbrio da argola para os casos em que $\omega < \sqrt{g/R}$ e $\omega > \sqrt{g/R}$.

- (g) Identifique os pontos de equilíbrio estável e calcule a frequência de pequenas oscilações em torno desses pontos.

Sugestão: Considere a aproximação para pequenos ângulos, ou seja, substitua $\theta = \theta_0 + \alpha$ na equação do movimento, onde θ_0 é um ponto de equilíbrio estável e α é uma pequena perturbação desse equilíbrio $\alpha \ll 1$. Considere então apenas termos de primeira ordem.

2 Resposta

(a): Vamos determinar a força centrífuga associada. Usando que podemos mapear a posição da argola utilizando coordenadas esféricas então nós teremos que

$$\vec{F}_{Ce} = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

Onde nós vamos utilizar que

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -R\omega \sin(\theta)\hat{\theta} \times \hat{r} = R\omega \sin(\theta)\hat{\phi} \quad (2)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = R\omega^2 \sin(\theta)[\cos(\theta)\hat{r} \times \hat{\phi} - \sin(\theta)\hat{\theta} \times \hat{\phi}] = R\omega^2 \sin(\theta)[- \cos(\theta)\hat{\theta} - \sin(\theta)\hat{r}] \quad (3)$$

logo

$$\vec{F}_{Ce} = mR\omega^2 \sin(\theta)[\sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}] \quad (4)$$

é a força centrífuga do problema.

(b): A velocidade da argola com relação ao referencial que gira será simplesmente a velocidade

$$\vec{v}_{esf} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r\sin(\theta)\dot{\phi}) = (0, R\dot{\theta}, 0) \quad (5)$$

Então nós teremos que a força de Coriolis será

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = R\omega\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{r} \times \vec{\theta} = R\omega\dot{\theta} \cos(\theta)\hat{\phi} \quad (6)$$

Portanto

$$\vec{F}_C = -2m\omega R\dot{\theta} \cos(\theta)\hat{\phi} \quad (7)$$

(c): Vamos tentar escrever agora a lagrangiana desse sistema. Vamos utilizar o resultado que obtivemos no exercício 3 onde a energia cinética de um sistema que gira da mesma forma que o desse problema em coordenadas esféricas é dada por

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + r^2\omega^2 \sin^2(\theta) + 2r^2\dot{\phi}\omega \sin^2(\theta)) \quad (8)$$

Se usarmos agora que $\dot{r} = \dot{\phi} = 0$ e que $r = R$ nós vamos ficar com

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2(\theta)) \quad (9)$$

Agora, a energia potencial associada à partícula massiva (argola) é

$$U = mgz = mgR \cos(\theta) \quad (10)$$

Nesse caso teremos a lagrangiana do sistema como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2(\theta)) - mgR \cos(\theta) \quad (11)$$

(d): Veja que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + mgR \sin(\theta) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad (13)$$

Então

$$\dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}^2 \quad (14)$$

Se escrevermos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p_{\theta} = mR^2\dot{\theta} \quad (15)$$

Então nós teremos que

$$\dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{p_{\theta}^2}{mR^2} \quad (16)$$

Então

$$\mathcal{L} = \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} + \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2} - mgR \cos(\theta) \quad (17)$$

Então nós teremos que

$$\dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} + mgR \cos(\theta) - \frac{mR^2\omega^2 \sin^2(\theta)}{2} \quad (18)$$

Perceba que essa é a energia do sistema somada à um outro termo. A primeira parte é a energia cinética e potencial da partícula. Essa é uma constante do movimento porque o sistema é um sistema associado somente à forças conservativas. Agora, note que $\omega = \dot{\varphi}$ onde $\varphi = \omega t$ é o movimento que a argola faz, com relação à coordenadas esféricas. Se escrevermos esse termo na lagrangiana nós conseguimos derivadar a lagrangiana e obter uma equação do movimento com relação à variável φ que será

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (mR^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}) = 0 \quad (19)$$

Isso implica que a quantidade $mR^2 \sin^2(\theta)\omega$ é uma constante do movimento e portanto o segundo termo que não está relacionado com a energia do sistema também é uma constante. Logo todo aquele termo é uma constante. Podemos também utilizar as equações de Euler-Lagrange.

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgR \sin(\theta) = 0 \quad (20)$$

Vamos usar isso de modo que, calculando a derivada da expressão anterior nós vamos ter que

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} \right) = mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgR \sin(\theta) \dot{\theta} - mR^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (21)$$

Então

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} \right) = \dot{\theta} \left[\underbrace{mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgR \sin(\theta)}_{=0} \right] = 0 \quad (22)$$

Logo nós concluímos que a quantidade requerida é de fato uma constante do movimento.

(e): A equação do movimento da argola será

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0 \quad (23)$$

Onde o termo do meio é o termo de força centrífuga. Note que como a partícula está sujeita ao vínculo do aro ela não pode se mover nas direções não permitidas, isso faz com que a única força que se adequa na equação do movimento seja a parte centrífuga na direção $\hat{\theta}$ que é permitida pelo vínculo.

(f): Vamos agora analisar essa equação do movimento. Queremos obter as posições de equilíbrio da argola, e obtemos o equilíbrio se fizermos $\ddot{\theta} = 0$. Nesse caso nós teremos que

$$0 = \omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{g}{R} \sin(\theta) \iff \cos(\theta) = -\frac{g}{R\omega^2} \text{ ou } \sin(\theta) = 0 \quad (24)$$

Portanto temos que

$$\tilde{\theta}_1 = 0 \text{ ou } \pi \quad (25)$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{-g}{R\omega^2} \right) \quad (26)$$

são dois pontos de equilíbrio possíveis. Note que se $\omega^2 < g/R$ então nós teremos que

$$-\omega^2 > \frac{-g}{R} \implies -1 > \frac{-g}{R\omega^2}$$

e podemos ter o caso de ser menor ou igual quando $\omega^2 > g/R$.

(g): Agora, vamos seguir a sugestão dada e escrever $\theta = \theta_0 + \alpha$. Vamos então ter que $\ddot{\theta} = \ddot{\alpha}$ e

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \sin(\theta_0 + \alpha) \cos(\theta_0 + \alpha) + \frac{g}{R} \sin(\theta_0 + \alpha) \quad (27)$$

$$\sin(\theta_0 + \alpha) = \sin(\theta_0) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\theta_0) = \sin(\theta_0) + \alpha \cos(\theta_0) \quad (28)$$

$$\cos(\theta_0 + \alpha) = \cos(\alpha) \cos(\theta_0) - \sin(\alpha) \sin(\theta_0) = \cos(\theta_0) - \alpha \sin(\theta_0) \quad (29)$$

$$\sin(\theta_0 + \alpha) \cos(\theta_0 + \alpha) = (\sin(\theta_0) + \alpha \cos(\theta_0))(\cos(\theta_0) - \alpha \sin(\theta_0)) = \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - \alpha \sin^2(\theta_0) + \alpha \cos^2(\theta_0)$$

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + \omega^2 \alpha \cos(2\theta_0) + \frac{g}{R} \sin(\theta_0) + \frac{g}{R} \alpha \cos(\theta_0) \quad (30)$$

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \left[\sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + \alpha \cos^2(\theta_0) - \alpha \sin^2(\theta_0) + \frac{g}{R\omega^2} \sin(\theta_0) + \frac{g\alpha}{R\omega^2} \cos(\theta_0) \right] \quad (31)$$

agora inserimos um termo α^2 apenas para modificar a aparência do nosso resultado, note que esse termo não vai contribuir diretamente porque estamos considerando $\alpha \ll 1$.

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \left[\sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + \alpha \cos^2(\theta_0) - \alpha \sin^2(\theta_0) + \frac{g}{R\omega^2} \sin(\theta_0) + \frac{g\alpha}{R\omega^2} \cos(\theta_0) - \alpha^2 \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) \right]$$

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \left[\sin(\theta_0) \left(\cos(\theta_0) - \alpha \sin(\theta_0) + \frac{g}{R\omega^2} \right) + \alpha \cos(\theta_0) \left(\cos(\theta_0) - \alpha \sin(\theta_0) + \frac{g}{R\omega^2} \right) \right]$$

logo teremos

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \left(\cos(\theta_0) - \alpha \sin(\theta_0) + \frac{g}{R\omega^2} \right) (\sin(\theta_0) + \alpha \cos(\theta_0)) \quad (32)$$

Agora vamos notar que se fizermos o ponto de equilíbrio θ_0 ser igual ao ponto θ_1 (desculpe essa confusão pequena em notação, aqui nessa ultima equação temos θ_0 um ponto de equilíbrio geral), teremos que

$$\ddot{\alpha} = \omega^2 \left(\frac{-g}{R\omega^2} - \alpha \sin(\theta_1) + \frac{g}{R\omega^2} \right) (\sin(\theta_1) + \alpha \cos(\theta_1)) \approx -\alpha \omega^2 \sin^2(\theta_1) \quad (33)$$

Temos então a equação diferencial

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin^2(\theta_1) \alpha = \omega_{freak}^2 \alpha \quad (34)$$

Onde nós temos que a frequência dessa pequena oscilação será

$$\omega_{freak} = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4}} \quad (35)$$

Note então que se $\omega^2 < g/R$ nós teremos que há equilíbrio instável e que se $\omega^2 \geq g/R$ temos equilíbrio estável, para esse valor de θ_1 .

Se tivermos que $\theta_0 = \tilde{\theta}_1$ então nós teremos que em 0

$$\ddot{\alpha} = \alpha \omega^2 \left(1 + \frac{g}{R\omega^2} \right) \quad (36)$$

e teremos equilíbrio estável, mesmo quando $\omega^2 < g/R$. Se tivermos π então o equilíbrio é instável se $\omega^2 > g/R$ e estável do contrário.

$$\ddot{\alpha} = -\alpha\omega^2 \left(-1 + \frac{g}{R\omega^2} \right) \quad (37)$$