

Exercício Seis

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

Uma partícula de massa m , sob ação da gravidade, está confinada a se mover no interior de um cone invertido, de ângulo α e com seu eixo na vertical. Utilizando coordenadas esféricas, determine:

- (a) A lagrangiana do sistema.
- (b) As equações de Euler-Lagrange do movimento da partícula.
- (c) Os momentos generalizados.
- (d) A equação do movimento para a coordenada r em função do tempo.
- (e) A partir da energia do sistema, estude a estabilidade do movimento em torno da órbita circular e obtenha o ponto de mínimo r_0 . Mostre que

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g \cos(\alpha)}{r_0 \sin^2(\alpha)}$$

é a velocidade angular da partícula na órbita circular.

- (f) Mostre que a partícula executa pequenas oscilações em torno de um ponto mínimo com

$$\omega^2 = \frac{3g \cos(\alpha)}{r_0}$$

As órbitas em torno do ponto de mínimo serão fechadas? Justifique sua resposta.

2 Resposta

(a): Vamos tentar obter a lagrangiana desse sistema. Vamos, para isso, utilizar que $\mathcal{L} = T - U$, onde T é a energia cinética e U é a energia potencial. Teremos portanto que encontrar a energia cinética da partícula. Em coordenadas esféricas teremos a parametrização

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

Se a partícula está confinada a se mover no cone, então teremos que $\theta = \alpha$ é um vínculo a qual a partícula está submetida. Nesse caso nós teremos que o sistema de coordenadas acima ficará

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

Onde nós teremos que $\dot{\alpha} = 0$. Vamos então determinar as derivadas das coordenadas acima e calcular o quadrado das mesmas para encontrar a energia cinética associada a partícula nesse sistema

$$\dot{x} = \dot{\rho} \sin(\alpha) \cos(\varphi) - \rho \dot{\varphi} \sin(\alpha) \sin(\varphi) \quad (3)$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin(\alpha) \sin(\varphi) + \rho \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\varphi) \quad (4)$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \cos(\alpha) \quad (5)$$

Agora vamos colocar as equações acima ao quadrado, ficaremos então com

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\varphi) + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\varphi) - 2\dot{\rho} \sin(\alpha) \cos(\varphi) \rho \dot{\varphi} \sin(\alpha) \sin(\varphi) \quad (6)$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\varphi) + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\varphi) + 2\dot{\rho} \sin(\alpha) \sin(\varphi) \rho \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\varphi) \quad (7)$$

$$\dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 \cos^2(\alpha) \quad (8)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha) \quad (9)$$

E portanto teremos a energia cinética dada por

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)) \quad (10)$$

Agora, para a energia potencial gravitacional da partícula nós vamos ter que $U = mgz$, portanto nós vamos ter que

$$U = mgz = mg\rho \cos(\alpha) \quad (11)$$

Com isso nós obtemos a energia potencial

$$U = mg\rho \cos(\alpha) \quad (12)$$

Portanto nós teremos a seguinte lagrangiana do sistema

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)) - mg\rho \cos(\alpha) \quad (13)$$

(b): Note que temos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$. Portanto teremos duas equações de Euler-Lagrange. Essas serão

2.1 Equação de Euler-Lagrange para ρ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 2m\rho\dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha) - mg \cos(\alpha) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad (15)$$

logo nós vamos ter a equação

$$\ddot{\rho} = 2\rho\dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha) - g \cos(\alpha) \quad (16)$$

2.2 Equação de Euler-Lagrange para φ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \sin^2(\alpha) \quad (18)$$

logo teremos a equação

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi} \sin^2(\alpha)) = 0 \quad (19)$$

(c): Os momentos generalizados vão ser simplesmente

2.3 Momento p_ρ

$$p_\rho := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad (20)$$

2.4 Momento p_φ

$$p_\varphi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \sin^2(\alpha) \quad (21)$$

(d): Vamos tentar escrever a equação do movimento para a coordenada ρ (que é a coordenada r que o exercício pede, desculpe pela mudança de notação).

Vamos notar que a Equação (19) nos mostra que vale

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2 \sin^2(\alpha)} \quad (22)$$

Onde nós temos que L é uma constante. Com isso podemos colocar esse resultado na equação do movimento para ρ :

$$\ddot{\rho} = 2\rho \left(\frac{L}{m\rho^2 \sin^2(\alpha)} \right)^2 \sin^2(\alpha) - g \cos(\alpha) \quad (23)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{2L^2}{m^2\rho^3 \sin^2(\alpha)} - g \cos(\alpha) \quad (24)$$

Que é a equação do movimento de ρ em função unicamente do tempo.

(e): Seja a energia no sistema E

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)) + mg\rho \cos(\alpha) \quad (25)$$

Usando novamente a Eq. (19) então nós conseguimos que

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\rho^2 \left(\frac{L}{m\rho^2 \sin^2(\alpha)} \right)^2 \sin^2(\alpha) + mg\rho \cos(\alpha) \quad (26)$$

Onde nós temos um potencial efetivo

$$U_{eff}(\rho) := \frac{L^2}{2m\rho^2 \sin^2(\alpha)} + mg\rho \cos(\alpha) \quad (27)$$

Vamos determinar o ponto de mínimo, nesse caso devemos ter que

$$U'_{eff}(\rho) = mg \cos(\alpha) - \frac{L^2}{m\rho^3 \sin^2(\alpha)} = 0 \iff \quad (28)$$

$$\rho_0^3 = \frac{L^2}{m^2 g \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)} \quad (29)$$

Onde ρ_0 é o ponto de mínimo. Vamos verificar isso calculando a segunda derivada

$$U''_{eff}(\rho) = \frac{3L^2}{m\rho^4 \sin^2(\alpha)} > 0 \quad (30)$$

Logo, agora vamos verificar a identidade com relação à velocidade angular que o item pede. Para isso vamos utilizar a Equação (22):

$$\dot{\varphi}(\rho)^2 = \frac{L^2}{m^2 \rho^4 \sin^4(\alpha)} \quad (31)$$

Então nós teremos que

$$\dot{\varphi}^2(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{L^2}{\rho_0^3} \cdot \frac{1}{m^2 \sin^4(\alpha)} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{1}{m^2 \sin^4(\alpha)} \cdot (m^2 g \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)) \quad (32)$$

Donde conseguimos que

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g \cos(\alpha)}{\rho_0 \sin^2(\alpha)} \quad (33)$$

Como queríamos.

(f): Agora, vamos utilizar a aproximação para pequenas oscilações de modo que teremos

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{U''_{eff}(\rho_0)}{m}} \quad (34)$$

Notamos que

$$U''_{eff}(\rho_0) = \frac{3L^2}{m\rho_0 \sin^2(\alpha)} \cdot \frac{1}{\rho_0^3} = \frac{3L^2}{m\rho_0 \sin^2(\alpha)} \frac{m^2 g \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)}{L^2} \quad (35)$$

Logo teremos que

$$U''_{eff}(\rho_0) = \frac{3mg \cos(\alpha)}{\rho_0} \quad (36)$$

Logo concluimos que vale

$$\omega^2 = \frac{3g \cos(\alpha)}{\rho_0} \quad (37)$$

Como queríamos demonstrar. Agora o interessante é que esses resultados mostram que as órbitas podem ser fechadas ou abertas dependendo dos valores de α .

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega^2} = \frac{g \cos(\alpha)}{\rho_0 \sin^2(\alpha)} \cdot \frac{\rho_0}{3g \cos(\alpha)} = \csc^2(\alpha)/3 \quad (38)$$