

Exercício Três

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

- Escreva as equações de Euler-Lagrange, *em coordenadas esféricas*, para o movimento de uma partícula de massa m , submetida a uma força de componentes F_r, F_θ, F_φ .
- Escreva as equações de Euler-Lagrange para a mesma partícula de massa m , em um sistema de coordenadas esféricas, que gira com velocidade angular ω em torno do eixo $\hat{z}$ (cartesiano).
- Identifique a força centrífuga e a força de Coriolis generalizadas, Q_r, Q_θ e Q_φ , por meio das quais as equações de movimento, no sistema em rotação, adquirem a forma idêntica às obtidas no sistema fixo.
- Calcule e mostre que concordam com as obtidas no estudo de referenciais em rotação.

2 Resposta

(a): Primeiro, notamos que a transformação para coordenadas esféricas é definida através de

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad (1)$$

De modo que nós teremos a seguinte situação, vamos calcular a energia cinética em coordenadas esféricas, para isso basta fazer as derivadas

$$\dot{x} = \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) - r \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (2)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) + r \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (3)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \sin(\theta) \quad (4)$$

Se colocarmos cada uma dessas expressões ao quadrado nós vamos ter que

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \\ &+ r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \cos^2(\phi) - r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(2\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \\ &+ r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(2\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \end{aligned}$$

e em z nós vamos ter

$$\dot{z}^2 = \dot{r}^2 \cos^2(\theta) - r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \quad (5)$$

Se agora somarmos tudo isso teremos

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{r}^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \\ &+ r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \cos^2(\phi) - r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(2\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) - r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \\ &+ \dot{r}^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \\ &+ r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(2\theta) \sin(\phi) \cos(\phi) + r \dot{r} \dot{\phi} \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \\ &+ \dot{r}^2 \cos^2(\theta) - r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

e agora vamos usar que $\cos^2 + \sin^2 = 1$ constantemente. Tentei utilizar cores onde aplicamos essa propriedade trigonométrica apenas para que ficasse mais implícito acompanhar as contas.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \cos^2(\phi) + r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta) \sin^2(\phi) - r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \cancel{r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta)} - \cancel{r \dot{r} \dot{\theta} \sin(2\theta)}$$

logo, concluímos que a energia cinética será

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) \quad (6)$$

Agora vamos notar que a energia potencial deve ser $F = -\nabla_S U$ onde ∇_S está escrita em coordenadas esféricas. Nós teremos então que temos a seguinte lagrangiana em coordenadas polares

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) \right) - U \quad (7)$$

Onde consideramos que o potencial é invariante sob transformações do grupo $SO(3)$.

(b): Vamos considerar agora que a partícula de massa m está em um sistema de coordenadas esféricas que gira com velocidade ω em torno de $\hat{z}$. Vamos rodar todas as coordenadas x, y, z por um ângulo ωt onde ω é a velocidade angular e t o tempo. Rotações tridimensionais em relação ao eixo $\hat{z}$ são transformações de coordenada pertencentes ao grupo de rotações $SO(3)$. O elemento desse grupo que deixa as coordenadas z cartesianas invariantes é a matriz 3×3 definida por

$$R_z(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Então nós teremos que as coordenadas da massa m devem ser, agora,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\omega t) \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\omega t) - r \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\omega t) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\omega t) + r \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\omega t) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Portanto nós teremos que calcular a energia cinética a partir desses valores novos de transformação de coordenadas.

Se fizermos as derivadas de cada um dos valores x', y', z' acima que serão representados pelos símbolos $\dot{x}_{S'}$, etc. Então teremos que os primeiros vão possuir oito termos (e quando colocarmos ao quadrado teremos 64 termos portanto vamos utilizar o *Mathematica* para simplificar os termos de todas as coordenadas quadradas somadas). Teremos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S'} = & \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\omega t) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\omega t) - r \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\omega t) - r \omega \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\omega t) \\ & - \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\omega t) - r \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\omega t) - r \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\omega t) - r \omega \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{S'} = & \dot{r} \sin(\theta) \cos(\phi) \sin(\omega t) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\omega t) - r \dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\omega t) + r \omega \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\omega t) \\ & + \dot{r} \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\omega t) + r \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\omega t) + r \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\omega t) - r \omega \sin(\theta) \sin(\phi) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_{S'} = \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \sin(\theta) \quad (10)$$

No programa abaixo definimos a, b, c, d , etc como os valores que aparecem acima e em seguida nós expandimos usando a função EXPAND.

Vamos então fazer isso (colocar os valores das questões anteriores ao quadrado e somar) com apoio do *Mathematica*. Segue abaixo o programa escrito. Note que os comentários foram feitos de modo que devem ser apagados no caso de serem re-colocados no programa *Mathematica*. Note também que nós definimos cada um dos oito valores que foram utilizados no multinômio. Também utilizamos que $\theta = T$, $\phi = P$, $\dot{r} = dr$, $\omega = O$, $\dot{\theta} = dT$, etc. Note que x_2 e y_2 querem dizer $\dot{x}_{S'}$, etc.

```

a = dr*Sin[T]*Cos[P]*Cos[0*t]

b = r*dT*Cos[T]*Cos[P]*Cos[0*t]

c = -r*dP*Sin[T]*Sin[P]*Cos[0*t]

d = -r*O*Sin[T]*Cos[P]*Sin[0*t]

e = -dr*Sin[T]*Sin[P]*Sin[0*t]

f = -r*dT*Cos[T]*Sin[P]*Sin[0*t]

g = -r*dP*Sin[T]*Cos[P]*Sin[0*t]

```

```
h = -r*0*Sin[T]*Sin[P]*Cos[0*t]
```

```
In[42]:= x2 = Expand[(a + b + c + d + e + f + g + h)^2]
```

```
/*-----*/
```

```
/*saida que corresponde ao valor de x2 = */
```

```
Out[42]= dP^2 r^2 cos^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+dP^2 r^2 sin^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+2
dP^2 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dP dr r cos^2(P) sin^2(T) sin(0
t) cos(0 t)-2 dP dr r sin(P) cos(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+2 dP dr r sin(P) cos(P)
sin^2(T) sin^2(0 t)+2 dP dr r sin^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dP dT r^2
cos^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dP dT r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T)
cos^2(0 t)+2 dP dT r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T) sin^2(0 t)+2 dP dT r^2 sin^2(P)
sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dP 0 r^2 cos^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+2 dP 0 r^2
sin^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+4 dP 0 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0
t)+dr^2 sin^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+dr^2 cos^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-2 dr^2
sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dr dT r cos^2(P) sin(T) cos(T) cos^2(0
t)+2 dr dT r sin^2(P) sin(T) cos(T) sin^2(0 t)-4 dr dT r sin(P) cos(P) sin(T)
cos(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dr 0 r cos^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dr 0 r
sin(P) cos(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+2 dr 0 r sin(P) cos(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+2 dr 0
r sin^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+dT^2 r^2 cos^2(P) cos^2(T) cos^2(0 t)+dT^2
r^2 sin^2(P) cos^2(T) sin^2(0 t)-2 dT^2 r^2 sin(P) cos(P) cos^2(T) sin(0 t) cos(0
t)-2 dT 0 r^2 cos^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)-2 dT 0 r^2 sin(P) cos(P)
sin(T) cos(T) cos^2(0 t)+2 dT 0 r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T) sin^2(0 t)+2 dT 0
r^2 sin^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+0^2 r^2 cos^2(P) sin^2(T) sin^2(0
t)+0^2 r^2 sin^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+2 0^2 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t)
cos(0 t)
```

```
/*-----*/
```

```
A1 = dr*Sin[T]*Cos[P]*Sin[0*t]
```

```
B1 = r*dT*Cos[T]*Cos[P]*Sin[0*t]
```

```
C1 = -r*dP*Sin[T]*Sin[P]*Sin[0*t]
```

```
D1 = r*0*Sin[T]*Cos[P]*Cos[0*t]
```

```
E1 = dr*Sin[T]*Sin[P]*Cos[0*t]
```

```
F1 = r*dT*Cos[T]*Sin[P]*Cos[0*t]
```

```
G1 = r*dP*Sin[T]*Cos[P]*Cos[0*t]
```

```
H1 = -r*0*Sin[T]*Sin[P]*Sin[0*t]
```

```
/*-----*/
```

```
/*saida que corresponde ao valor de y2*/
```

```
In[51]:= y2 = Expand[(A1 + B1 + C1 + D1 + E1 + F1 + G1 + H1)^2]
```

```
Out[51]= dP^2 r^2 sin^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+dP^2 r^2 cos^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-2
dP^2 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dP dr r cos^2(P) sin^2(T) sin(0
t) cos(0 t)+2 dP dr r sin(P) cos(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-2 dP dr r sin(P) cos(P)
sin^2(T) sin^2(0 t)-2 dP dr r sin^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dP dT r^2
cos^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dP dT r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T)
```

```

cos^2(0 t)-2 dP dT r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T) sin^2(0 t)-2 dP dT r^2 sin^2(P)
sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dP 0 r^2 sin^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+2 dP 0 r^2
cos^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-4 dP 0 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0
t)+dr^2 cos^2(P) sin^2(T) sin^2(0 t)+dr^2 sin^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)+2 dr^2
sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dr dT r cos^2(P) sin(T) cos(T) sin^2(0
t)+2 dr dT r sin^2(P) sin(T) cos(T) cos^2(0 t)+4 dr dT r sin(P) cos(P) sin(T)
cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dr 0 r cos^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dr 0 r
sin(P) cos(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-2 dr 0 r sin(P) cos(P) sin^2(T) sin^2(0 t)-2 dr 0
r sin^2(P) sin^2(T) sin(0 t) cos(0 t)+dT^2 r^2 cos^2(P) cos^2(T) sin^2(0 t)+dT^2
r^2 sin^2(P) cos^2(T) cos^2(0 t)+2 dT^2 r^2 sin(P) cos(P) cos^2(T) sin(0 t) cos(0
t)+2 dT 0 r^2 cos^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+2 dT 0 r^2 sin(P) cos(P)
sin(T) cos(T) cos^2(0 t)-2 dT 0 r^2 sin(P) cos(P) sin(T) cos(T) sin^2(0 t)-2 dT 0
r^2 sin^2(P) sin(T) cos(T) sin(0 t) cos(0 t)+0^2 r^2 sin^2(P) sin^2(T) sin^2(0
t)+0^2 r^2 cos^2(P) sin^2(T) cos^2(0 t)-2 0^2 r^2 sin(P) cos(P) sin^2(T) sin(0 t)
cos(0 t)

```

In[52]:= Simplify[x2 + y2]

Out[52]= sin^2(T) (r^2 (dP+0)^2+dr^2)+dr dT r sin(2 T)+dT^2 r^2 cos^2(T)

Onde nós temos claramente que a saída do programa foi

$$\dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2 = \sin^2(\theta)(r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2 + \dot{r}^2) + \dot{r}\dot{\theta}r \sin(2\theta) + \dot{\theta}^2 r^2 \cos^2(\theta) \quad (11)$$

Melhorando essa equação nós obtemos que

$$\dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2 = \dot{r}^2 \sin^2(\theta) + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + r^2 \omega^2 \sin^2(\theta) + 2r^2 \dot{\varphi} \omega \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 r^2 \cos^2(\theta) + 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (12)$$

$$\dot{z}_{S'}^2 = \dot{r}^2 \cos^2(\theta) + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) - 2r\dot{r}\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (13)$$

se notarmos que na soma de todas as coordenadas as partes em vermelho vão se juntar opr causa da equação fundamental da trigonometria e as partes em azul vão se cancelar, então nós teremos que

$$\dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2 + \dot{z}_{S'}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + r^2 \omega^2 \sin^2(\theta) + 2r^2 \dot{\varphi} \omega \sin^2(\theta) \quad (14)$$

Como nós temos que a energia potencial é considerada invariante então valerá que ($\mathcal{L}'$ é a lagrangiana no referencial que roda).

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + r^2 \omega^2 \sin^2(\theta) + 2r^2 \dot{\varphi} \omega \sin^2(\theta)) - U \quad (15)$$

Note que a primeira parte é exatamente a energia cinética T antes de ocorrer a rotação. Desse modo nós teremos que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{m}{2}r^2 \omega^2 \sin^2(\theta) + mr^2 \dot{\varphi} \omega \sin^2(\theta) =: \mathcal{L} - \mathcal{U} \quad (16)$$

Note que para $\mathcal{L}$ valem as equações de lagrange.

(c): Agora vamos identificar as forças centrífuga e de Coriolis generalizadas. Nós vamos ter que as equações de lagrange para $\mathcal{L}'$ vão ser tais que, como $\mathcal{L}$ satisfaz as equações de lagrange, sejam q_k as k -ésimas coordenadas generalizadas, então nós teremos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k} \right) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_k} \right) =: Q_k \quad (17)$$

Onde nós teremos que Q_k são as forças generalizadas. Podemos calcular nesse exemplo os valores de Q_k pois temos que

$$\mathcal{U} := -\frac{m}{2} r^2 \omega^2 \sin^2(\theta) - m r^2 \dot{\phi} \omega \sin^2(\theta) \quad (18)$$

Então teremos as seguintes forças generalizadas

2.1 Força generalizada para a coordenada r

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = -m r \omega^2 \sin^2(\theta) - 2 m r \dot{\phi} \omega \sin^2(\theta) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{r}} = 0 \quad (20)$$

Então nós concluimos que

$$Q_r = m r \omega^2 \sin^2(\theta) + 2 m r \dot{\phi} \omega \sin^2(\theta) \quad (21)$$

Utilizando termos de transformação de coordenadas (que surgem de tratamento de Jacobianos) nós vamos conseguir que $(1 \cdot Q_r = F_r)$:

$$F_r = 2 m \omega r \dot{\phi} \sin^2(\theta) + m r \omega^2 \sin^2(\theta) \quad (22)$$

2.2 Força generalizada para a coordenada θ

Agora para a coordenada θ nós vamos ter que

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = -m r^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - 2 m r^2 \dot{\phi} \omega \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (23)$$

E, como antes, nós vamos ter que $\partial \mathcal{U} / \partial \dot{\theta} = 0$. Nesse caso nós teremos que a força generalizada será

$$Q_\theta = m r^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2 m r^2 \dot{\phi} \omega \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (24)$$

Desse modo, nós teremos que, notando $Q_\theta = r F_\theta$ então

$$F_\theta = m r \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2 m r \omega \dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (25)$$

2.3 Força generalizada para a coordenada φ

Nesse caso

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\varphi}} = -mr^2\omega \sin^2(\theta) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\varphi}} = -m\omega 2r\dot{r} \sin^2(\theta) - mr^2\omega 2\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (28)$$

Portanto nós vamos ter que

$$Q_\varphi = -2m\omega r\dot{r} \sin^2(\theta) - 2m\omega r^2\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (29)$$

Logo nós teremos que $Q_\varphi = r \sin(\theta) F_\varphi$

$$F_\varphi = -2m\omega \dot{r} \sin(\theta) - 2m\omega r\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (30)$$

Vamos apenas escrever esse vetor força generalizada em forma vetorial para referência futura

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2m\omega r\dot{\varphi} \sin^2(\theta) + mr\omega^2 \sin^2(\theta) \\ mr\omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2m\omega r\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ -2m\omega \dot{r} \sin(\theta) - 2m\omega r\dot{\theta} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (31)$$

(d): Agora vamos mostrar que esses valores correspondem às coordenadas de força de Coriolis e força centrífuga que são obtidas do estudo de referenciais em rotação. Note que naquele momento nós tínhamos

$$\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, r \sin(\theta)\dot{\varphi}) \quad (32)$$

a velocidade em coordenadas esféricas. Assim nós vamos ter que o termo de força de Coriolis será dado por:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (33)$$

Note primeiramente que o vetor $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \omega \cos(\theta)\hat{r} - \omega \sin(\theta)\hat{\theta}$ de modo que teremos

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \omega \cos(\theta) & -\omega \sin(\theta) & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r \sin(\theta)\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega r\dot{\varphi} \sin^2(\theta) \\ -\omega r\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \omega r\dot{\theta} \cos(\theta) + \omega \dot{r} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (34)$$

Com isso nós conseguimos que

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} 2m\omega r\dot{\varphi} \sin^2(\theta) \\ 2m\omega r\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ -2m\omega r\dot{\theta} \cos(\theta) - 2m\omega \dot{r} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Agora para a força centrífuga nós vamos ter que obter

$$\vec{F}_{Ce} = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (36)$$

Note que nós teremos então que

$$\omega \times \vec{r} = \det \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \omega \cos(\theta) & -\omega \sin(\theta) & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega r \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\omega \times \omega \times \vec{r} = \det \begin{pmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \omega \cos(\theta) & -\omega \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \omega r \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r \sin^2(\theta) \\ -\omega^2 r \sin(\theta) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Logo nós teremos a força centrífuga dada por

$$\vec{F}_{Ce} = \begin{pmatrix} m\omega^2 r \sin^2(\theta) \\ m\omega^2 r \sin(\theta) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

E agora, por verificação direta basta notar que $\vec{F}$ na Equação (31) é igual à $\vec{F}_C + \vec{F}_{Ce}$ como queríamos mostrar.