Universidade de São Paulo - Instituto de Física

Exercício Dois

5 de dezembro de 2017

1 Exercício

A massa m de um pêndulo está presa por um fio ideal de comprimento l a um ponto de sustentação que se move para frente e para trás ao longo de um eixo horizontal, de acordo com a equação $x = a\cos(\omega t)$. Suponha que o pêndulo só oscile no plano vertical que contém o eixo x. Considere que a posição do pêndulo seja descrita por um ângulo θ que o fio faz com uma linha vertical.

(a) Escreva a lagrangiana do sistema.

(b) Obtenha as equações de Euler-Lagrange.

(c) Mostre que, para valores pequenos de θ, a equação do movimento se reduz à equação de movimento de um oscilador harmônico forçado.

(d) Determine os movimentos para o estado estacionário que corresponde ao visto no item anterior.

(e) De que forma a amplitude de oscilações do estado estacionário depende de m, l, a e ω?

2 Resposta

(a): Vamos escrever a lagrangiana desse sistema. Primeiro, a origem do sistema de coordenadas será aquela onde $x = 0$, e que temos o ponto fixo do pêndulo.

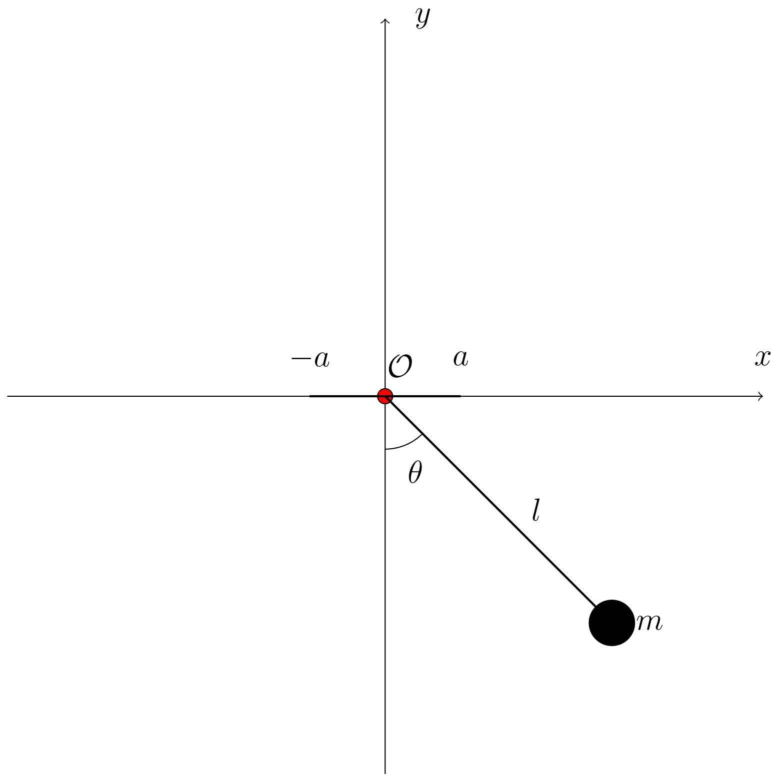

Figura 1: Esquema do Pêndulo proposto pelo exercício

Nesse caso nós temos que a posição da massa m sofre um efeito com relação à variação do ponto fixo do pêntulo em relação à origem $\mathcal{O}$ como descrita na Fig. (1). Vamos ter a descrição das coordenadas da massa m utilizando o fato de que teremos um acrécimo de termo $x = a\cos(\omega t)$, logo teremos o seguinte

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) + l\sin(\theta) \\ y = -l\cos(\theta) \end{cases} \tag{1}$$

Nesse caso então nós vemos ter as derivadas, considerando $\omega, a, l > 0$ constantes,

$$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t) + l\dot{\theta}\cos(\theta) \tag{2}$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta}\sin(\theta) \tag{3}$$

Portanto teremos que seus quadrados serão

$$\dot{x}^2 = a^2\omega^2\sin^2(\omega t) + l^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta) - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta) \tag{4}$$

$$\dot{y}^2 = l^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta) \tag{5}$$

Somando estes dois termos nós teremos que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

Portanto nós temos que o termo de energia cinética associada ao sistema será

$$T = \frac{m}{2}\left(a^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\right) \tag{7}$$

O termo de energia potencial gravitacional será aquele relacionado à posição vertical da massa em relação à origem $\mathcal{O}$. Isso é dado pela equação

$$U = mgy = -mgl\cos(\theta) \tag{8}$$

E com isso terminamos de escrever a lagrangiana desse sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a^2\omega^2\sin^2(\omega t) + l^2\dot{\theta}^2) - ma\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta) + mgl\cos(\theta) \tag{9}$$

(b): Vamos agora obter as Equações de Euler-Lagrange, note que temos uma lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \theta, \dot{\theta})$ de modo que teremos apenas a equação de Lagrange com relação à variável θ (que é uma coordenada generalizada do sistema). Teremos então que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = ma\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta) - mgl\sin(\theta) \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - ma\omega l\sin(\omega t)\cos(\theta) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} - ma\omega^2 l\cos(\omega t)\cos(\theta) + ma\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta) \tag{12}$$

Desse modo nós temos a equação

$$ma\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta) - mgl\sin(\theta) = ml^2\ddot{\theta} - ma\omega^2 l\cos(\omega t)\cos(\theta) + ma\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta) \tag{13}$$

Donde

$$-mgl\sin(\theta) = ml^2\ddot{\theta} - ma\omega^2 l\cos(\omega t)\cos(\theta) \tag{14}$$

Dividindo tudo por ml^2 nós vamos ter a equação

$$\ddot{\theta} - \frac{a\omega^2}{l}\cos(\omega t)\cos(\theta) + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \tag{15}$$

(c): Se nós tivermos que $\theta << 1$ então teremos que (usando as aproximações $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$) a equação do movimento fica

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = F(t) \tag{16}$$

Onde nós definimos que

$$F(t) := \frac{a\omega^2}{l} \cos(\omega t) \tag{17}$$

e definimos tambem que

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{18}$$

essa Eq. (16) define o movimento de um oscilador harmônico forçado.

(d): O estado estacionário corresponde ao estado da solução particular da equação definida em (16). Nesse caso nós teremos que, considere o *ansatz*

$$\theta_e(t) = A\cos(\alpha t) \tag{19}$$

Onde α, A são constantes que precisam ser determinadas. Nesse caso nós teremos que $\dot{\theta}_e = -\alpha A \sin(\alpha t)$ e que $\ddot{\theta}_e = -\alpha^2 A \cos(\alpha t)$ e então nós teremos que

$$-\alpha^2 A \cos(\alpha t) + \omega_0^2 A \cos(\alpha t) = \frac{a\omega^2}{l} \cos(\omega t) \tag{20}$$

Se considerarmos então que $\alpha = \omega$ então nós teremos a equação para a amplitude A da solução do estado estacionário

$$A = \frac{a\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{a}{g} \cdot \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{21}$$

Portanto nós vemos que no estado estacionário nós temos que a massa se comporta tal que θ_e é a solução de um oscilador harmônico. Então nesse caso nós teremos que

(e): A amplitude A do estado estacionário será dada pela equação

$$A_{g,l,\omega,a} = \frac{a}{g} \frac{\omega^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{22}$$

Onde nós temos que ω_0 é definido em função de g, l pela Eq. (18).