

Planejamento de Rotas - Parte II

SSC5955

Slides adaptados de Masahiro Ono - MIT

Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

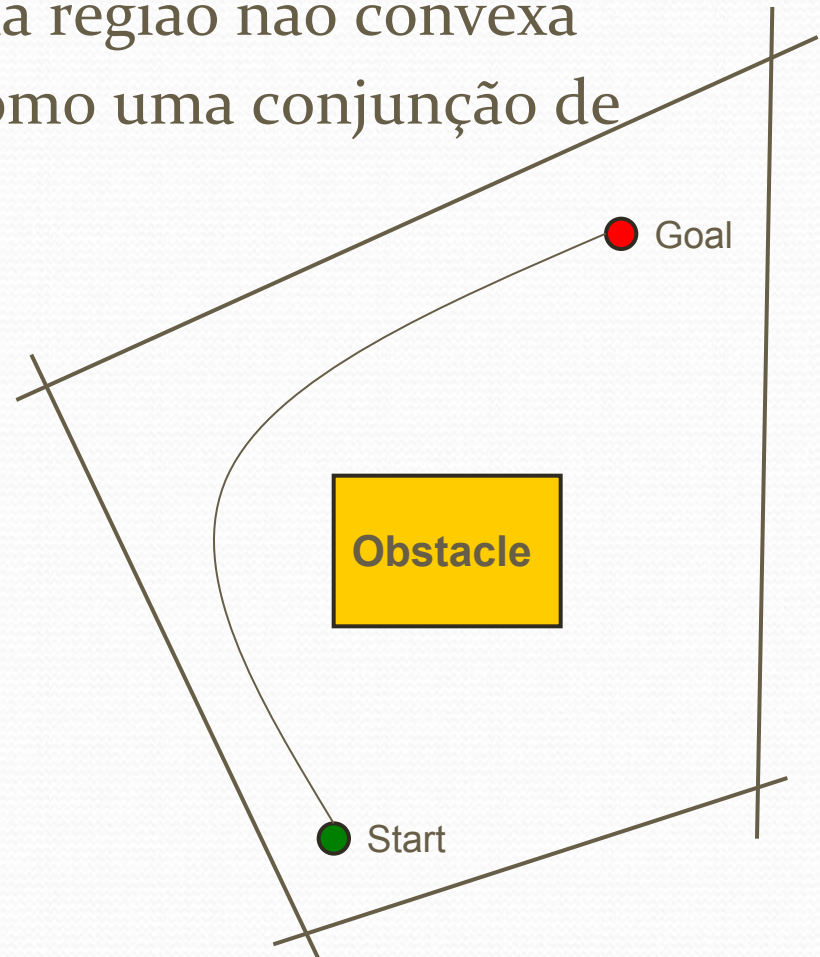


Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas



Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

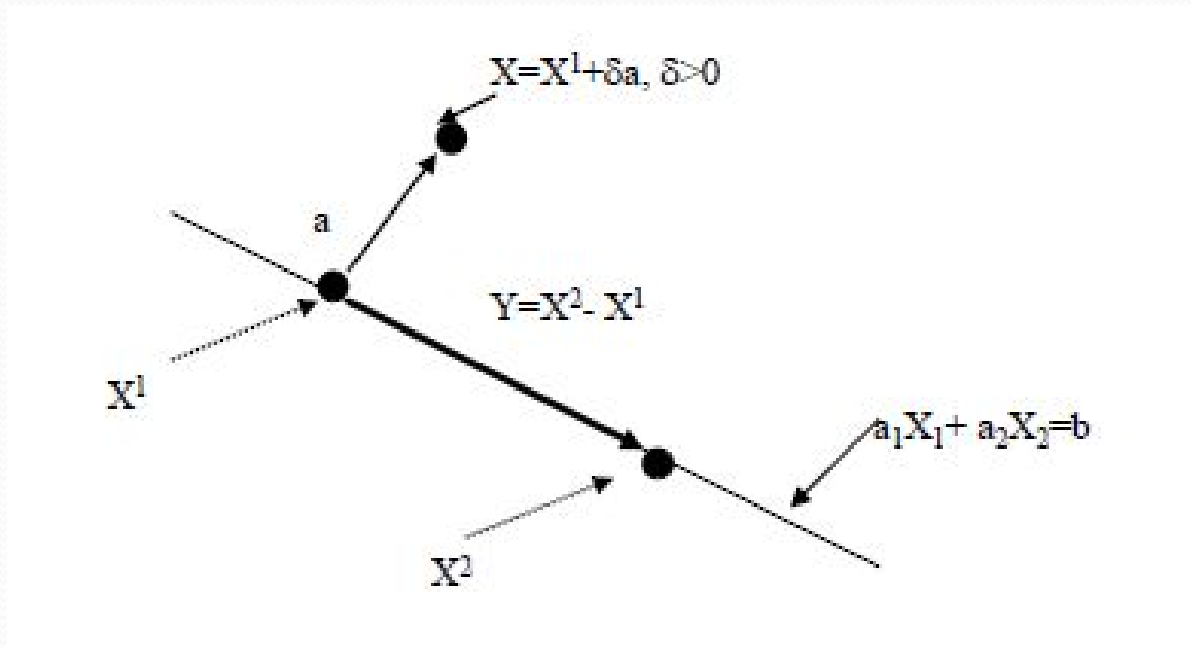
- Obstáculos estabelecem uma região não convexa
- Não podem ser expressos como uma conjunção de restrições lineares



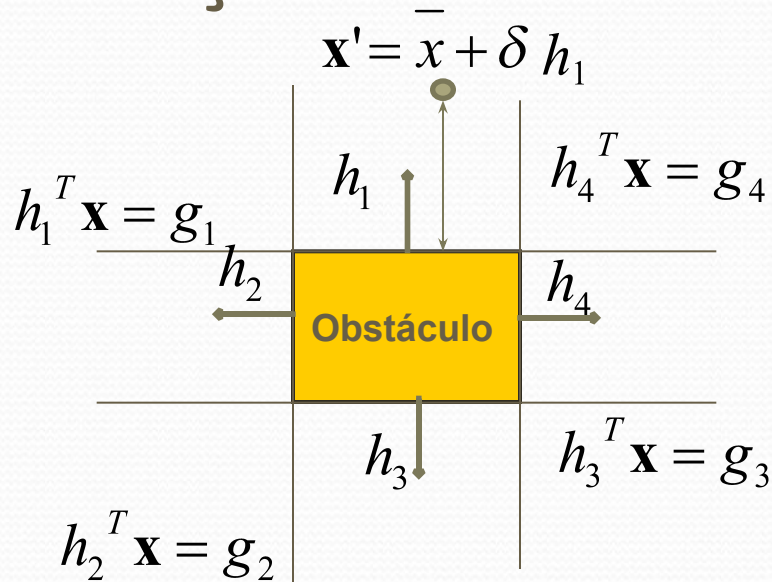
Planejamento de Rotas em Regiões Não-Convexas

Lema1: O vetor $a^T = (a_1, a_2)^T$ é perpendicular à reta .

Lema2: O vetor a aponta para o lado do plano cujos pontos satisfazem $a^T x > b$.



Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições



$$\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{x}} + \delta h_1$$

$$h_1^T \bar{\mathbf{x}} = b$$

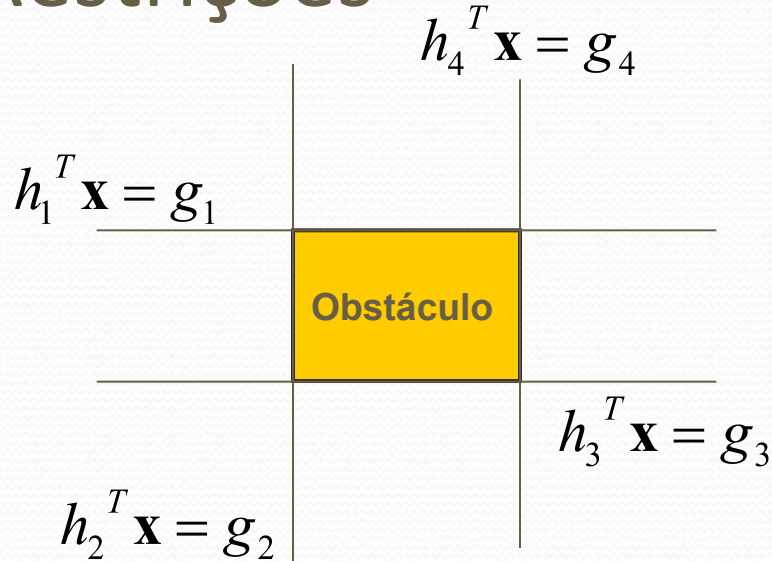
$$h_1^T \mathbf{x}' = h_1^T (\bar{\mathbf{x}} + \delta h_1) = h_1^T \bar{\mathbf{x}} + \delta h_1^T h_1 = b + \delta \|h_1\|^2$$

$$h_1^T \mathbf{x}' - b = \delta \|h_1\|^2 \geq 0$$

$$h_1^T \mathbf{x}' - b \geq 0$$

$$h_1^T \mathbf{x}' \geq b$$

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições



Introduzir Variáveis Binárias

Pelo menos uma restrição ativa

E

$$h_1^T \mathbf{x} \geq g_1 + M(1 - z_1)$$

$$\wedge h_2^T \mathbf{x} \geq g_2 + M(1 - z_2)$$

$$\wedge h_3^T \mathbf{x} \geq g_3 + M(1 - z_3)$$

$$\wedge h_4^T \mathbf{x} \geq g_4 + M(1 - z_4)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}$$

OR

$$\begin{aligned} &h_1^T \mathbf{x} \geq g_1 \\ &\vee h_2^T \mathbf{x} \geq g_2 \\ &\vee h_3^T \mathbf{x} \geq g_3 \\ &\vee h_4^T \mathbf{x} \geq g_4 \end{aligned}$$

M : "Big M" (constante positiva)

$z_n = 0$: Restrição inativa

$z_n = 1$: Restrição ativa

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições

$$h_1^T \mathbf{x} \geq g_1 + M(1 - z_1)$$

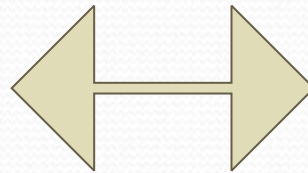
$$h_2^T \mathbf{x} \geq g_2 + M(1 - z_2)$$

$$h_3^T \mathbf{x} \geq g_3 + M(1 - z_3)$$

$$h_4^T \mathbf{x} \geq g_4 + M(1 - z_4)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}$$



$$h_1^T \mathbf{x} - g_1 \geq +M(1 - z_1) \Leftrightarrow g_1 - h_1^T \mathbf{x} \leq M(z_1 - 1)$$

$$g_2 - h_2^T \mathbf{x} \leq M(z_2 - 1)$$

$$g_3 - h_3^T \mathbf{x} \leq M(z_3 - 1)$$

$$g_4 - h_4^T \mathbf{x} \leq M(z_4 - 1)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \{0, 1\}$$

Modelando Obstáculos como Disjunção de Restrições

$$\min_{\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{u}_{1:T}} C(\mathbf{x}_1 \sqcup \mathbf{x}_T, \mathbf{u}_1 \sqcup \mathbf{u}_T)$$

s.t.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$\mathbf{g}_{ri} - h_{ri}\mathbf{x}_t \leq M(z_{rit} - 1) \quad (t = 0, 1, \dots, T)(r = 1, \dots, R)(i \in r)$$

$$\sum_t z_{rit} \geq 1 \quad (r = 1, \dots, R)(i \in r)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$

$$-\mathbf{u}_{\text{max}} \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{u}_{\text{max}} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

$$z_{rit} \in \{0, 1\}$$

Planejamento de Rotas em Regiões

Convexas

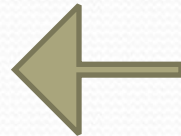
$$\bar{h}_1^T \mathbf{x} \leq \bar{g}_1 + M(1 - z_{2t})$$

$$\wedge \bar{h}_2^T \mathbf{x} \leq \bar{g}_2 + M(1 - z_{2t})$$

$$\wedge \bar{h}_3^T \mathbf{x} \leq \bar{g}_3 + M(1 - z_{2t})$$

$$\wedge \bar{h}_4^T \mathbf{x} \leq g_4 + M(1 - z_{2t})$$

$$\wedge \bar{h}_5^T \mathbf{x} \leq g_5 + M(1 - z_{2t})$$



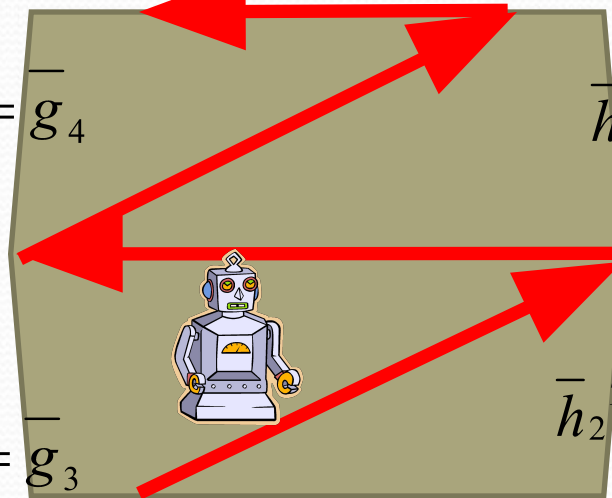
$$\bar{h}_4^T \mathbf{x} = \bar{g}_4$$

$$\bar{h}_5^T \mathbf{x} = \bar{g}_5$$

$$\bar{h}_1^T \mathbf{x} = \bar{g}_1$$

$$\bar{h}_3^T \mathbf{x} = \bar{g}_3$$

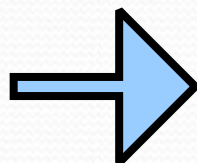
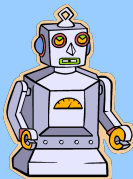
$$\bar{h}_2^T \mathbf{x} = \bar{g}_2$$



$$h_1^T \mathbf{x} = g_1$$

$$h_4^T \mathbf{x} = g_4$$

$$h_2^T \mathbf{x} = \bar{g}_2$$



$$h_1^T \mathbf{x} \leq g_1 + M(1 - z_{1t})$$

$$\wedge h_2^T \mathbf{x} \leq g_2 + M(1 - z_{1t})$$

$$\wedge h_3^T \mathbf{x} \leq g_3 + M(1 - z_{1t})$$

$$\wedge h_4^T \mathbf{x} \leq g_4 + M(1 - z_{1t})$$

$$\sum_t z_{1t} = N_1$$

$$\sum_t z_{2t} = N_2$$

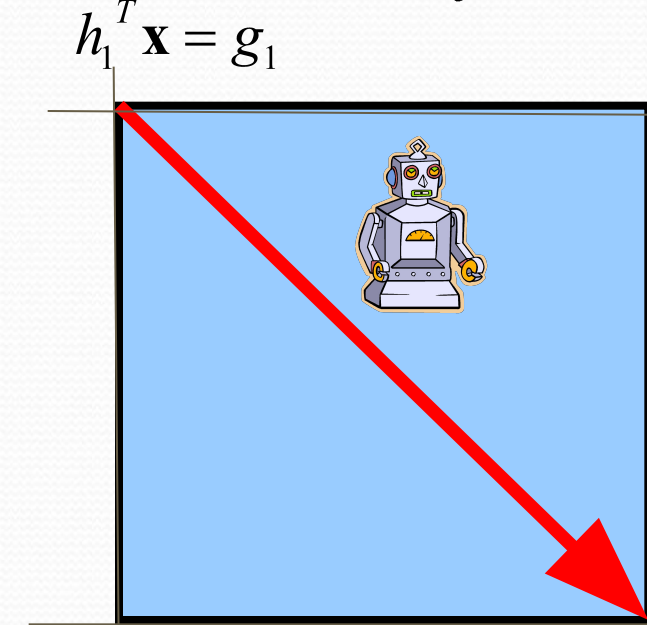
$$N_1 + N_2 \leq N$$

$$z_{1t}, z_{2t} \in \{0,1\}$$

$$N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$$

$$h_2^T \mathbf{x} = g_2$$

$$h_3^T \mathbf{x} = g_3$$



Planejamento de Rotas em Regiões Convexas

$$\min_{\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{u}_{1:T}} C(\mathbf{x}_1 \square \mathbf{x}_T, \mathbf{u}_1 \square \mathbf{u}_T)$$

s.t.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad (t = 0, 1, \square T - 1)$$

$$\mathbf{H}_r \mathbf{x}_t \leq \mathbf{g}_r + \mathbf{M}(1 - z_{rt}) \quad (t = 0, 1, \square T)(r = 1, \dots, R)$$

$$\sum_t z_{rt} = W_r \quad (r = 1, \dots, R)$$

$$\sum_r W_r \leq W$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{start}}$$

$$\mathbf{x}_t \leq \mathbf{x}_{\text{rp}} + \mathbf{M}(2 - z_{rtp} - z_{rt}) \quad (p = 1, \dots, P)(r = 1, \dots, R)(t = 1, \dots, T)$$

$$\mathbf{x}_t \geq \mathbf{x}_{\text{rp}} - \mathbf{M}(2 - z_{rtp} - z_{rt}) \quad (p = 1, \dots, P)(r = 1, \dots, R)(t = 1, \dots, T)$$

$$\sum_t z_{rtp} = 1 \quad (r = 1, \dots, R)(p = 1, \dots, P)$$

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_{\text{goal}}$$

$$-\mathbf{u}_{\text{max}} \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{u}_{\text{max}} \quad (t = 0, 1, \square T - 1)$$

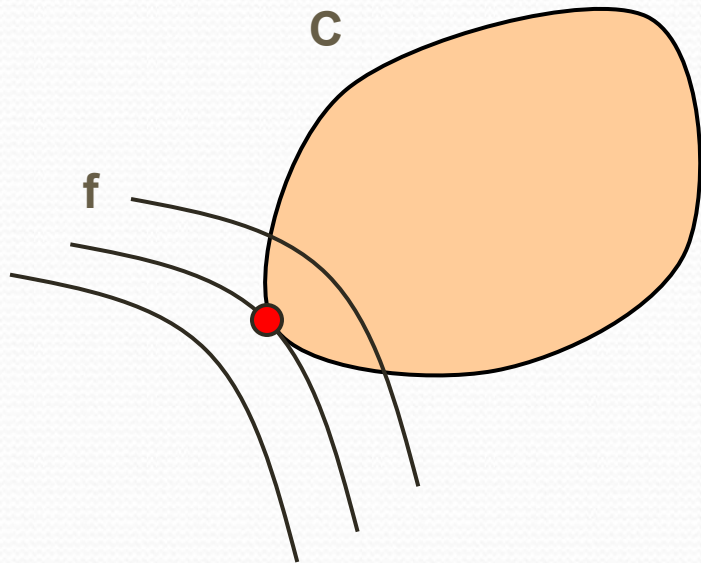
Otimização com restrições

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad x \in C$$

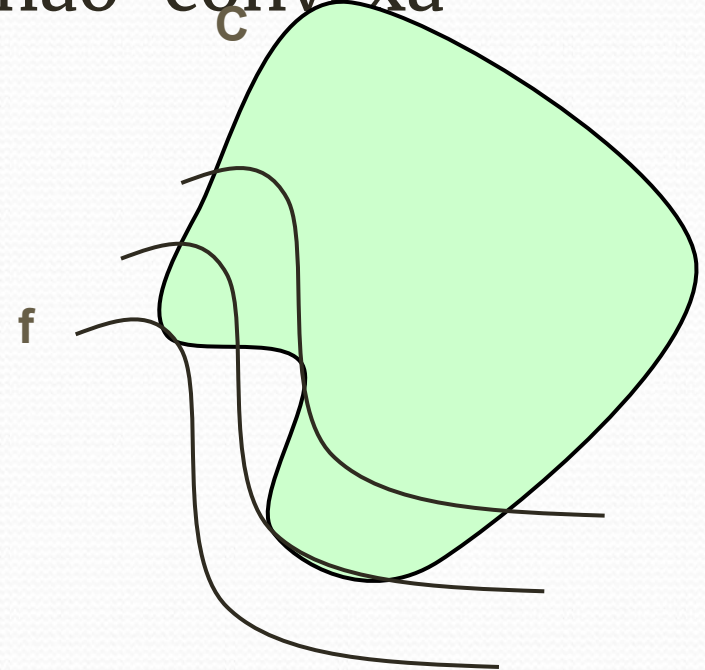
- Otimização convexa

- f é uma função convexa
- C é um conjunto convexo



Fácil de solucionar $\Rightarrow$ LP

- Otimização não-convexa



Difícil de solucionar $\Rightarrow$ MILP

Planejamento de Rotas com Incertezas



Planejamento de Rotas com Incertezas

Riscos possíveis

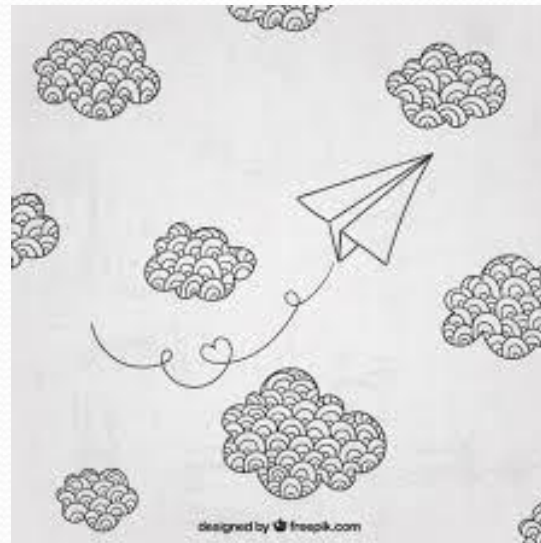
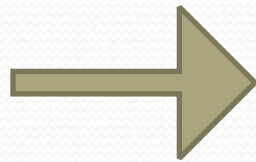
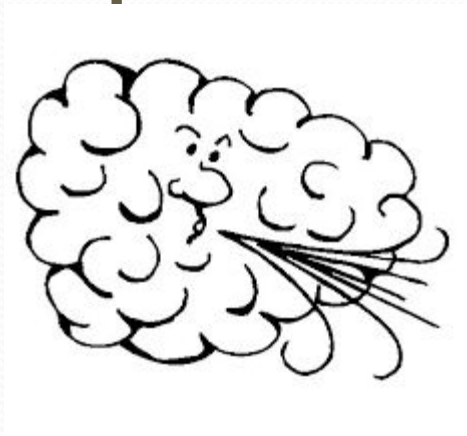


Riscos inaceitáveis



Planejamento de Rotas com Incertezas

Incerteza



Robust Model Predictive Control_[1]

- Receding horizon planner reagem a incertezas depois que alguma coisa errada ocorre.
- Podemos tomar precauções antes de alguma coisa errada ocorrer?

Incertezas nos modelos

- Modelo determinístico e discreto:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

- Modelo multiplicativo de incerteza

$$x_{t+1} = (A + \Delta A)x_t + Bu_t$$

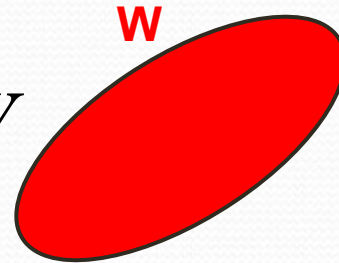
- Modelo aditivo de incerteza

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t$$

Incertezas nos modelos

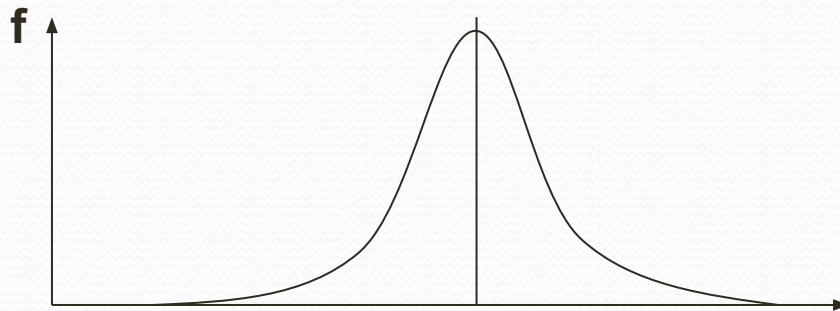
- Incerteza limitada

$$w_t \in W$$



- Incerteza estocástica

$$w_t \sim f(w)$$



f: função de distribuição de probabilidade

Incerteza Estocástica

- Otimizando penalizando probabilidade de falha

$$\min_{\mathbf{U}} J(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U}) + pf(\mathbf{U})$$

Probabilidade
de falha

- Otimizando com restrições de probabilidade (chance-constraints).

$$\min_{\mathbf{U}} J(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{U})$$

$$s.t. \quad f(\mathbf{U}) \leq \Delta$$

Limite
de risco

Probabilidade de
falha

Problema

Definição: Dado um sistema com uma dinâmica discreta no tempo e estocástica, encontrar uma sequência de controles que minimize uma função de custo enquanto limita a probabilidade de violar restrições, dentro de um horizonte de planejamento finito, dentro de um dado limite superior (chance constraint)[2].

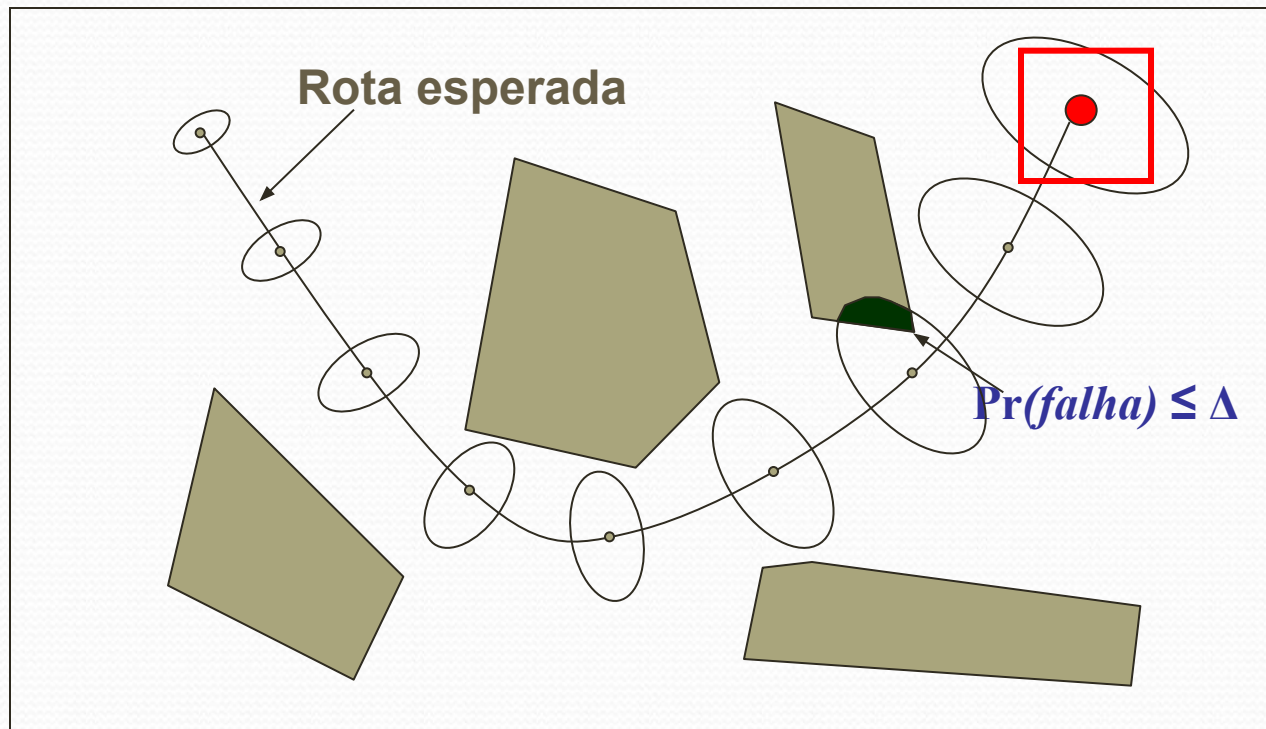
Problema

- Exemplo: Planejar uma trajetória que minimize consumo de combustível enquanto limita a 0.1% a probabilidade de atingir um obstáculo ou adentrar uma região de risco.



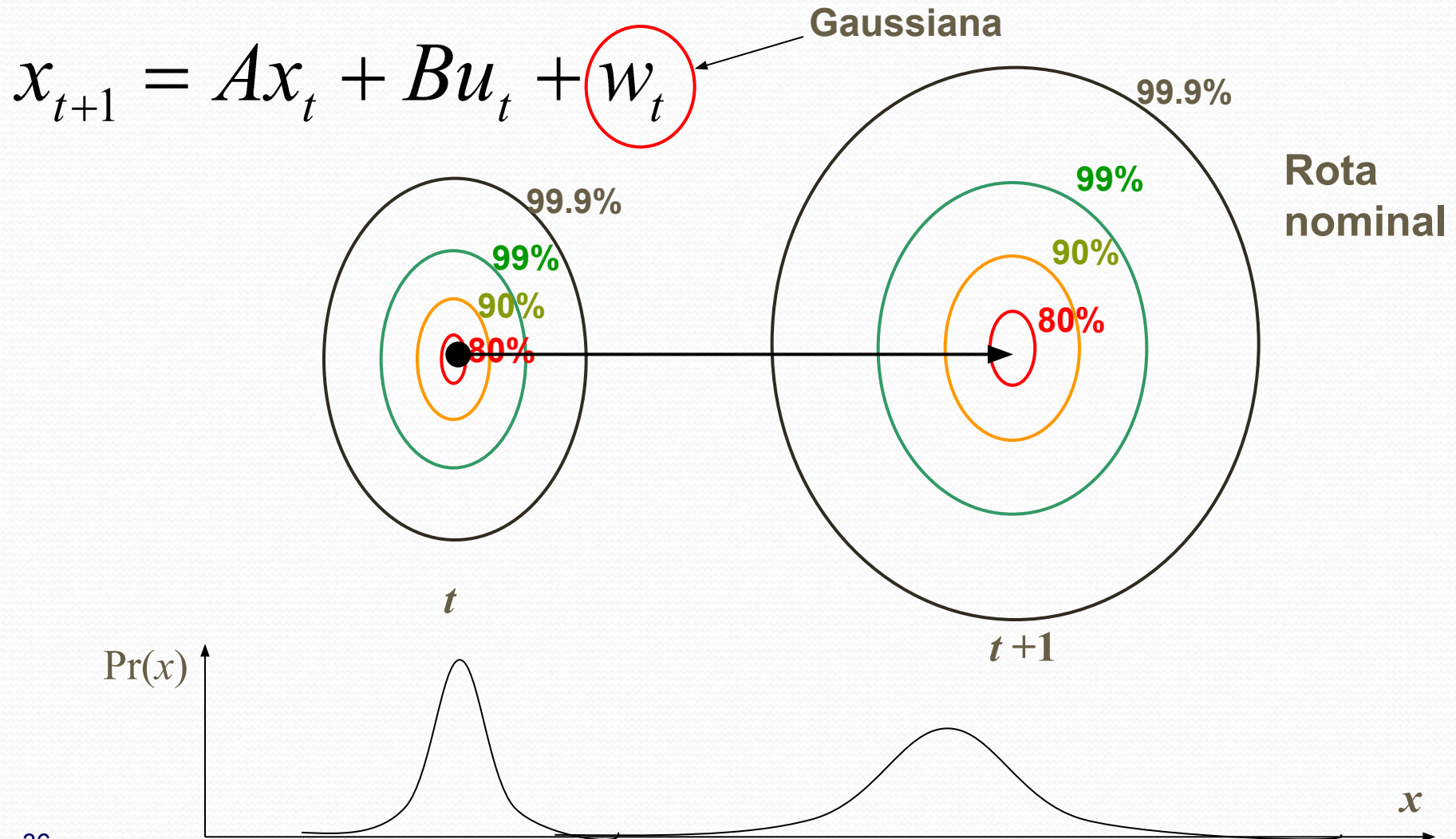
Planejamento de Rota Robusto

- Definir uma rota ótima até o destino tal que $\Pr(\text{falha}) \leq \Delta.$
- Uso das chance constraints.



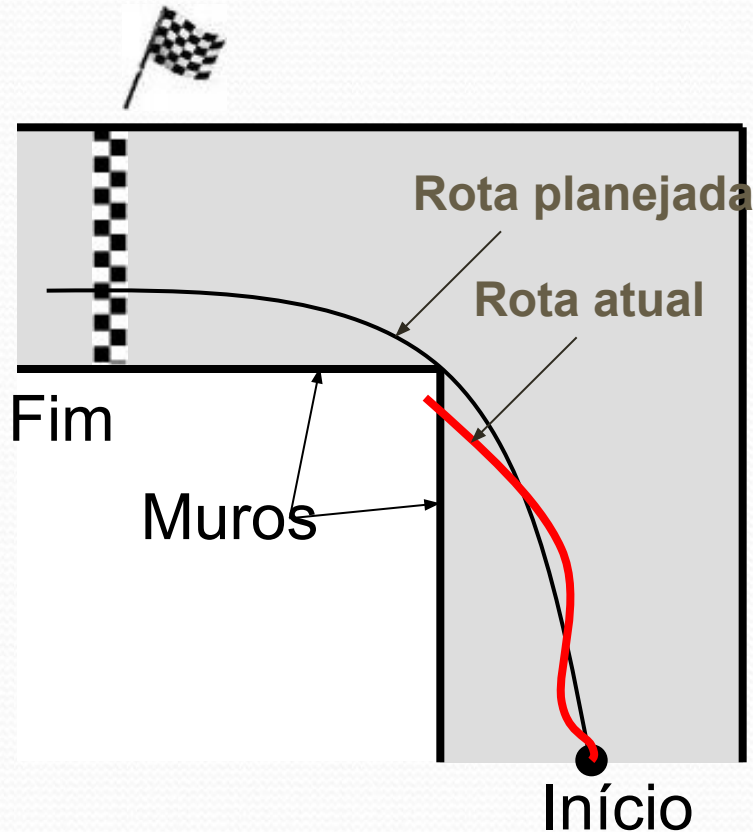
Modelo Estocástico

- Stochastic Plant Model - SPM



Exemplo

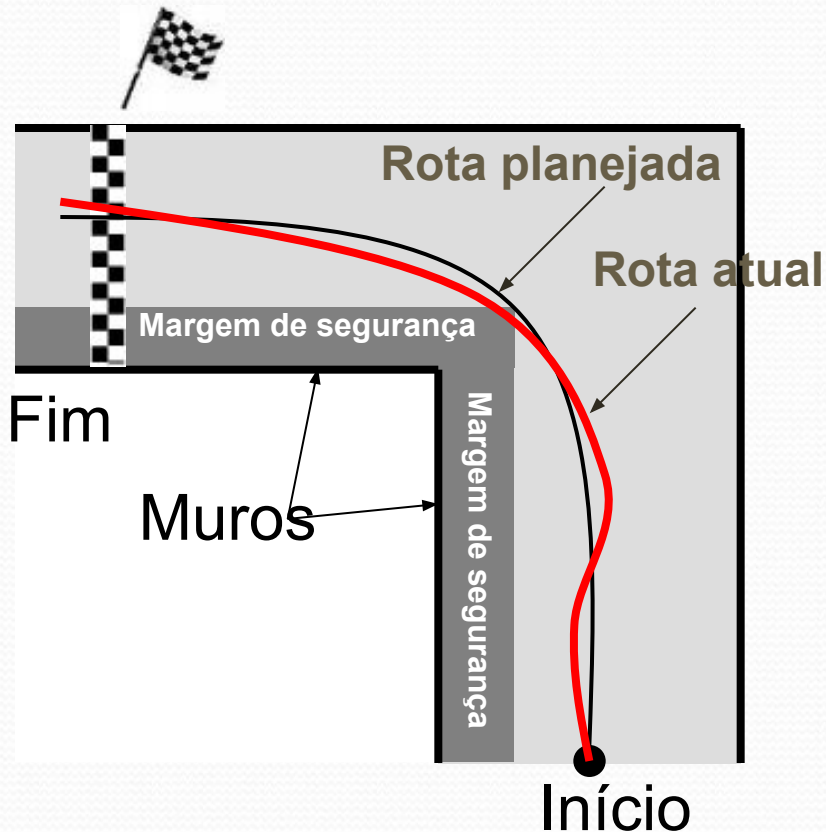
- Planejamento rota em uma corrida de carro



- Impossível garantir 100% de segurança
- Corredores querem reduzir chance de acidentes
 $P(\text{acidente}) < 0.1\%$
 - **Chance constraint**

Exemplo

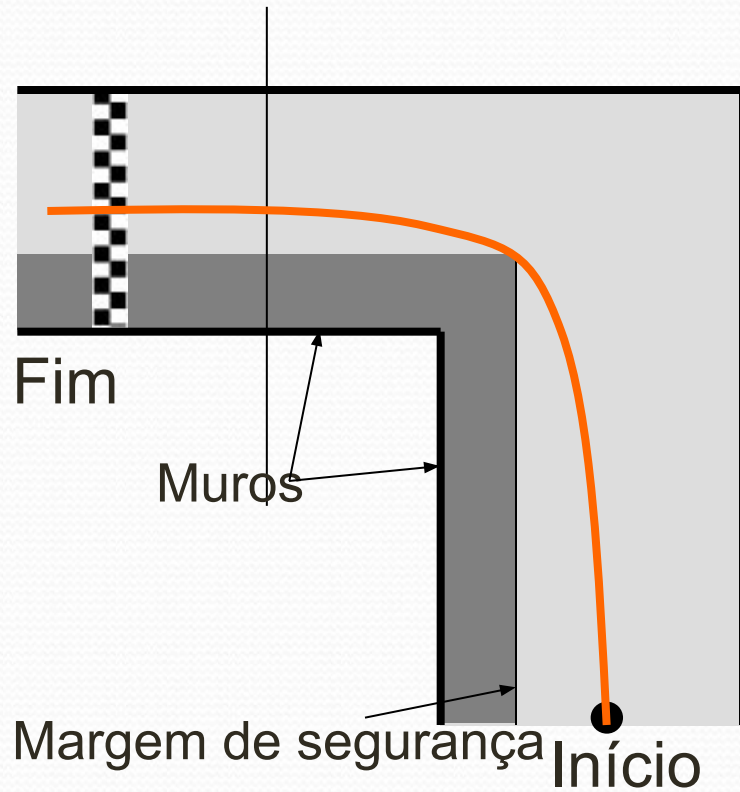
- Planejamento rota em uma corrida de carro



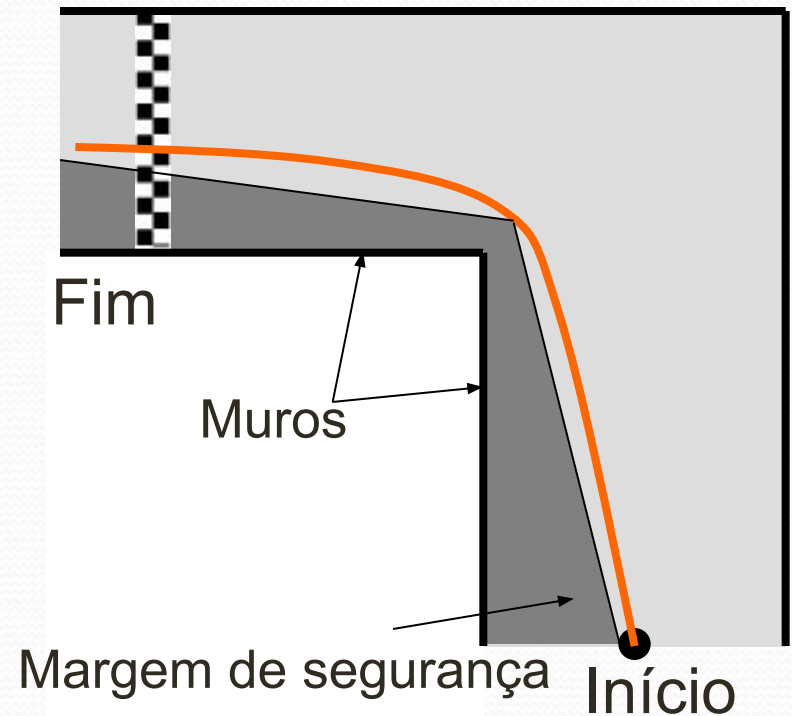
- Impossível garantir 100% de segurança
- Corredores querem reduzir chance de acidentes
 $P(\text{acidente}) < 0.1\%$
 - **Chance constraint**
- Solução: Ajustar uma margem de segurança que garanta o limite de risco

Ajustando a margem de segurança

(a) Uniforme



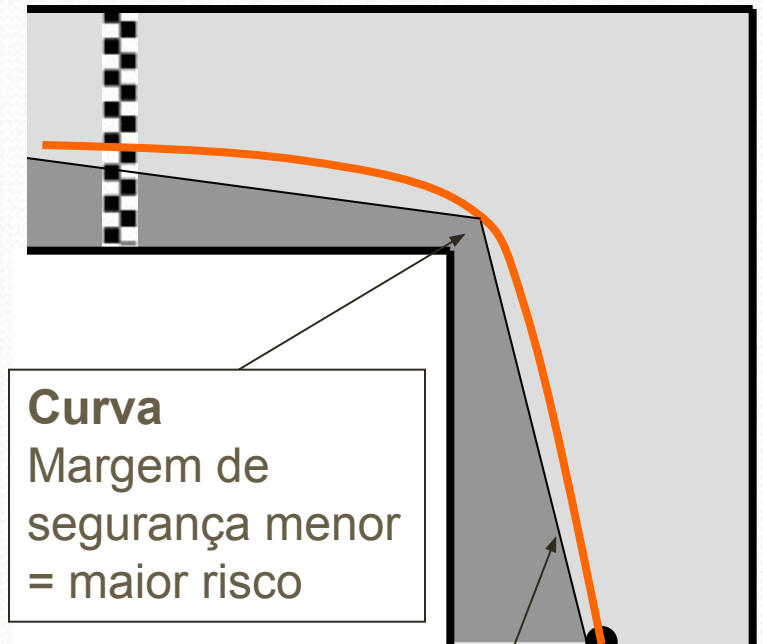
(b) Não uniforme



Alocação de Risco

- Estratégia: Incorrer em um risco maior na curva para obter ganho de tempo ao invés de assumir o mesmo risco durante toda a rota.
- **Alocação de risco**
 - Incorre em risco quando isso leva a uma recompensa relevante, enquanto economiza o risco quando a recompensa for menor.

Margem de segurança não uniforme



Curva
Margem de
segurança menor
= maior risco

Linha reta
Margem de
segurança ampla
= menor risco

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \quad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i$$

Restrições

$$\mathbf{X} = [x_0 \square x_T]^T$$

Vetor de estados, por exemplo, posição do veículo

$$\mathbf{U} = [u_0 \square u_{T-1}]^T$$

Controles aplicados

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$w_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_{x,0})$$

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i$$

Restrições

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$w_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_{x,0})$$

$$\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i$$

Restrições

Chance-Constraints e Model Control Predictive (MPC)

$$\min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

$s.t.$

Função Objetivo: custo, por exemplo, consumo de combustível

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$w_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_{x,0})$$

Limite superior na
probabilidade de falha
= *Limite de risco*

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

Chance constraints

Modelando Chance Constraints

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

Desigualdade Booleana

$$\Pr[A \cup B] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$$

Modelando Chance Constraints

$$\Pr \left[\bigwedge_{t=0}^T \bigwedge_{i=0}^N h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \Delta$$

Limite superior na probabilidade de violar qualquer restrição dentro do horizonte de planejamento

→

$$\bigwedge_t \bigwedge_i \left(\Pr \left[h_t^{iT} x_t \leq g_t^i \right] \geq 1 - \delta_t^i \right)$$

$$\sum_{t,i} \delta_t^i \leq \Delta$$

Limite superior na probabilidade de violar a i -ésima restrição no tempo t

Risk allocation: $\delta = [\delta_1^1, \delta_1^2 \square \delta_T^N]$

Modelando Chance Constraints

Risk allocation
optimization

s.t.

$$\min_{\delta} \min_U J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

Equações de dinâmica discreta

$$w_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_{x,0})$$

$$\bigwedge_t \bigwedge_i \Pr[h_t^{iT} x_t \leq g_t^i] \geq 1 - \delta_t^i$$

$$\sum_{t,i} \delta_t^i \leq \Delta$$

Chance constraints

Modelando Chance Constraints

Variável aleatória

$$\Pr[h_t^{iT} \bar{x}_t \leq g_t^i] \geq 1 - \delta_t^i \quad \text{Restrição de probabilidade (chance constraint)}$$

Variável determinística

$$\Leftrightarrow h_t^{iT} \bar{x}_t \leq g_t^i - m_t^i(\delta_t^i) \quad \text{Restrição determinística}$$

“Aperto” na restrição - Constraint tightening

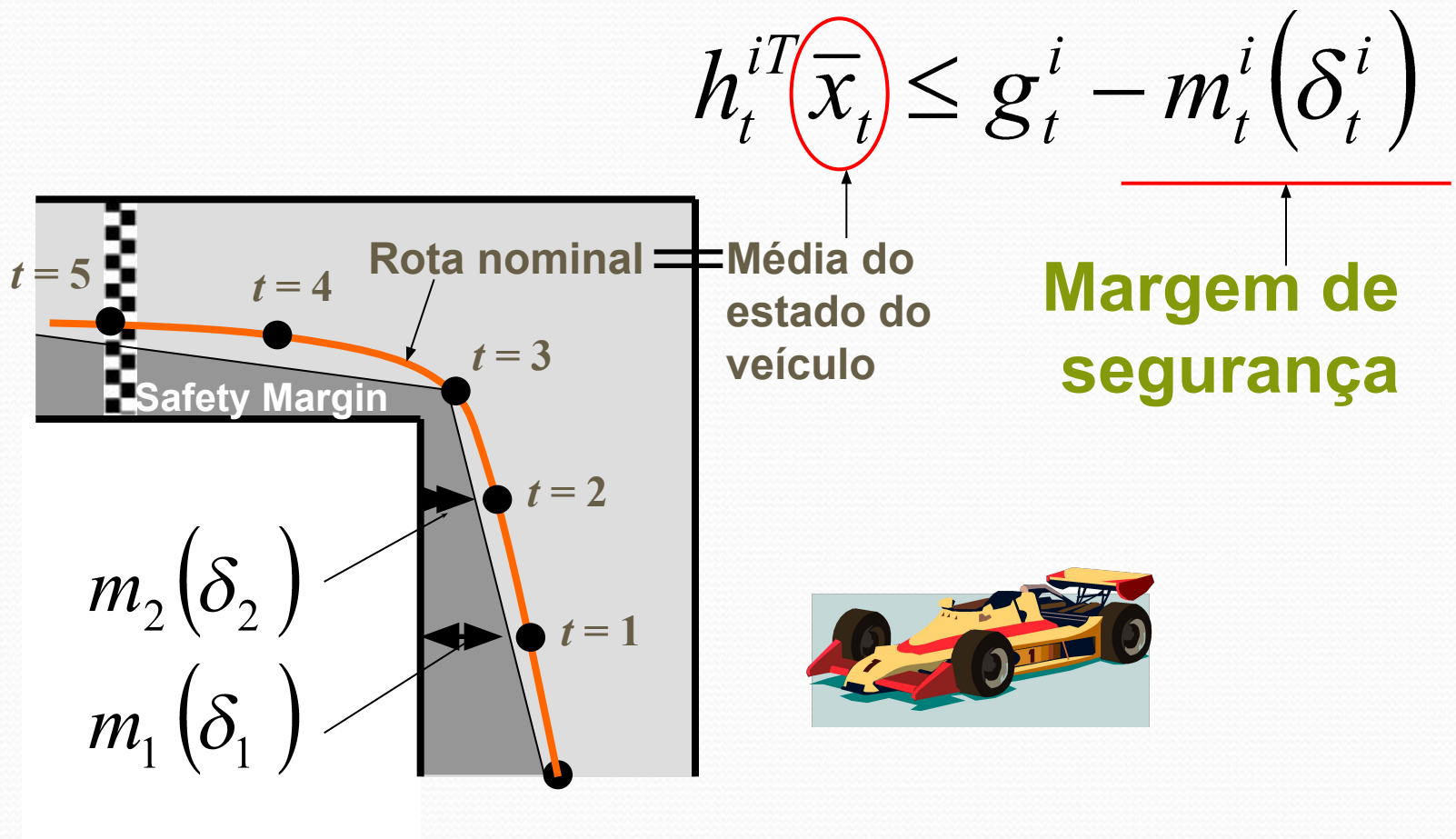
onde,

$$m_t^i(\delta_t^i) = -\sqrt{2h_t^{iT}\Sigma_{x,t}h_t^i} \operatorname{erf}^{-1}(2\delta_t^i - 1) \quad \text{Inversa da função de distribuição acumulada}$$

$$x_t \sim N(\bar{x}_t, \Sigma_{x,t})$$

$$\Sigma_{x,t} = \sum_{n=0}^{t-1} A^n \Sigma_w (A^n)^T + \Sigma_{x,0}$$

Modelando Chance Constraints



Modelando Chance Constraints

$$\min_{\delta} \min_{\mathbf{U}} J(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$

s.t.

~~$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$~~

$$\forall_{0 \leq t \leq T-1} \bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t + Bu_t$$

$$w_t \sim N(0, \Sigma_t)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, \Sigma_{x,0})$$

$$h_t^{iT} \bar{x}_t \leq g_t^i - m_t^i(\delta_t^i)$$

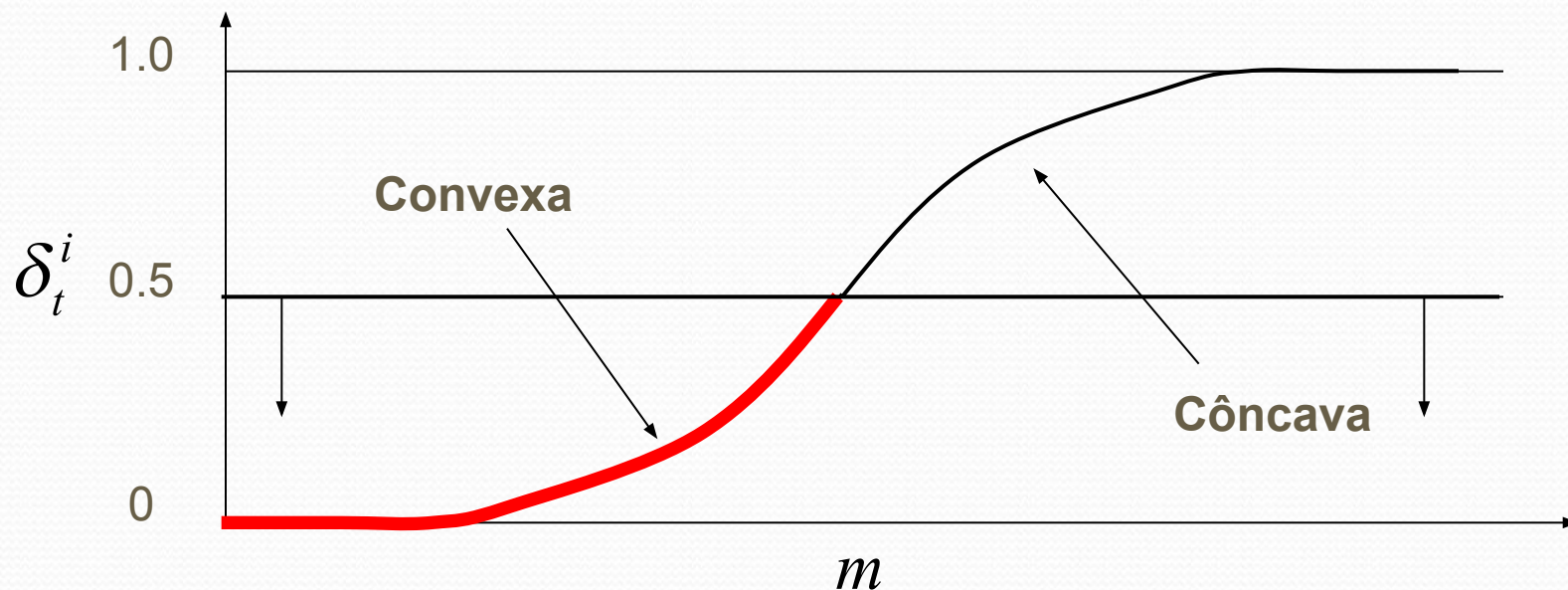
Convexa?

$$\sum_{t,k} \delta_t^i \leq \Delta$$

Convexidade das Chance Constraints

$$\Delta \leq 0.5 \Rightarrow \forall t, i \quad \delta_t^i \leq 0.5$$

$m^i(\delta_t^i)$ (função de distribuição acumulada da distribuição Gaussiana)

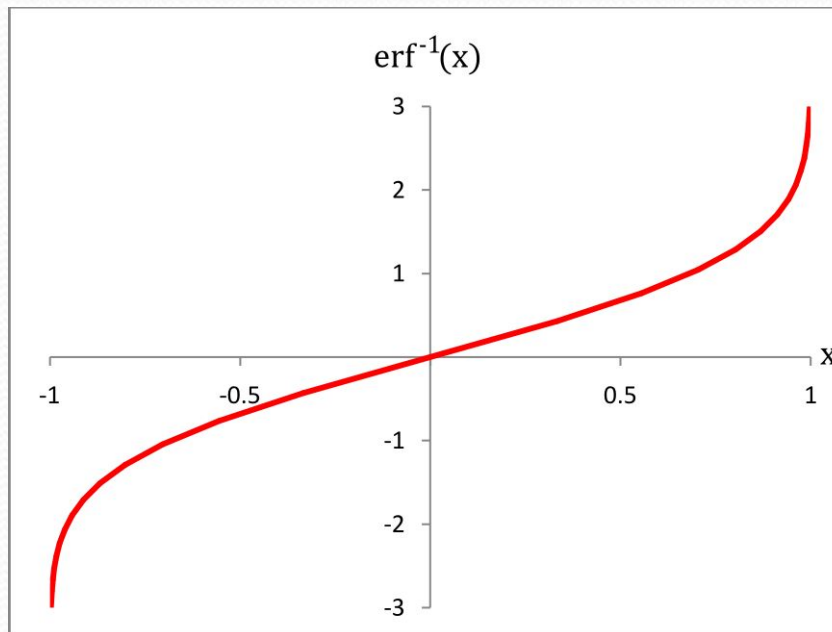


Usuários usualmente não querem incorrer em riscos que levem a uma probabilidade de falha maior que 50%.

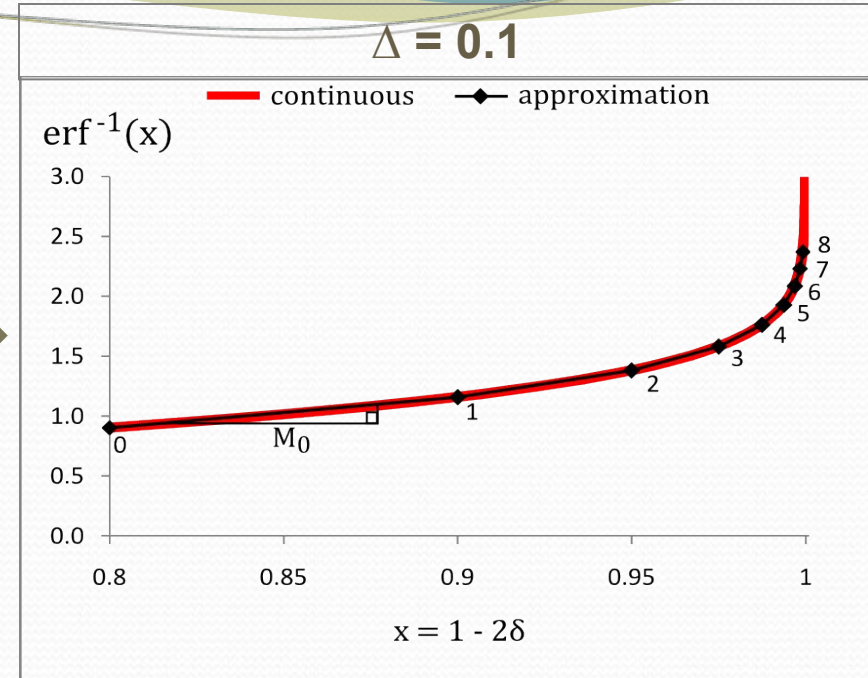
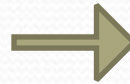
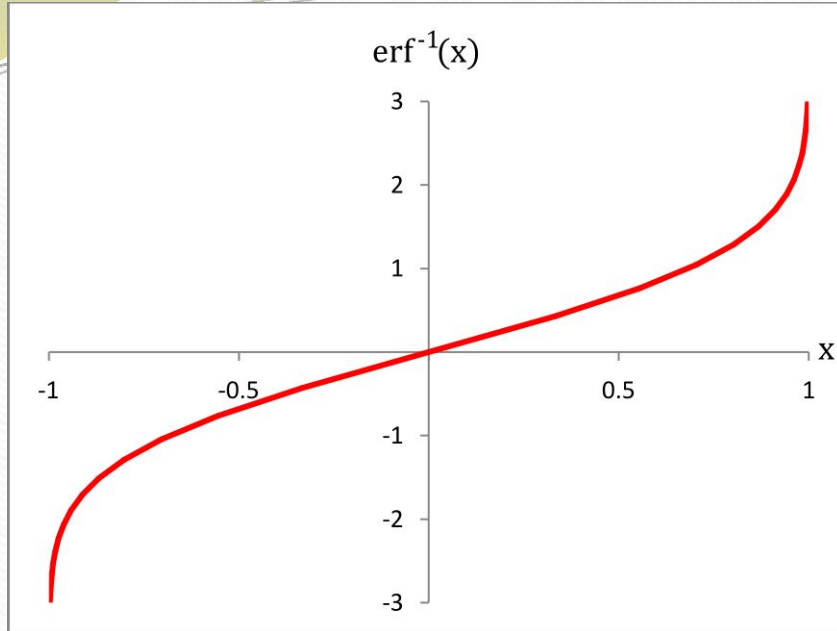
Convexidade das Chance Constraints

$$m_t^i(\delta_t^i) = -\sqrt{2h_t^{iT}\Sigma_{x,t}h_t^i} \operatorname{erf}^{-1}(2\delta_t^i - 1)$$

Inversa da
função de distribuição
acumulada



Aproximando a função inversa do erro



$$\bar{x}_n = 1 - 2 \left(\frac{\Delta}{2^n} \right) \quad n = 0, \dots, N$$

$$\bar{y}_n = \operatorname{erf}^{-1}(\bar{x}_n) \quad n = 0, \dots, N$$



$$M_n = \frac{\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n}{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n} \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$1 - 2\delta_{jt} = \bar{x}_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{njt}$$

$$\operatorname{erf}^{-1}(x) := \bar{y}_0 + \sum_{n=0}^{N-1} M_n \lambda_{njt}$$

$$0 \leq \lambda_{njt} \leq [\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n]$$

$$\lambda_{n+1,jt} > 0 \Rightarrow \lambda_{njt} = [\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n]$$

Referências

- [1] Ali A. Jalali and Vahid Nadimi, “A Survey on Robust Model Predictive Control from 1999–2006”.
- [2] Dennis Harald van Hessem. Stochastic inequality constrained closed-loop model predictive control with application to chemical process operation. PhD thesis, Delft University of Technology, 2004