P2, Diurno-A, 2017, cálculo II.

1) Encontre o limite

$$\lim_{t \to 2} \left\langle \sqrt{t+3}, \frac{t^2-4}{t^4-16}, e^{-t^2} \right\rangle .$$

Sol.: $\lim_{t \to t_0} \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \langle \lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t) \rangle$

- $\lim_{t \to 2} [x(t)] = \lim_{t \to 2} \left[\sqrt{t+3}\right] = \sqrt{5}$

- $\lim_{t \to 2} [y(t)] = \lim_{t \to 2} \left(\frac{t^2-4}{t^4-16} \right) = \lim_{t \to 2} \left(\frac{\cancel{(t^2-4)}}{\cancel{(t^2-4)}(t^2+4)} \right)$

Usamos que $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ com $a = t^2$ e $b = 4$

$\lim_{t \to 2} [y(t)] = \lim_{t \to 2} \left(\frac{1}{t^2+4} \right) = \frac{1}{8}$

- $\lim_{t \to 2} [z(t)] = \lim_{t \to 2} \left[e^{-t^2} \right] = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

Logo, $\boxed{\lim_{t \to 2} \left\langle \sqrt{t+3}, \frac{t^2-4}{t^4-16}, e^{-t^2} \right\rangle = \left\langle \sqrt{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{e^4} \right\rangle}$

Erro Comum: $e^{-t^2} = e^{(-t)^2} = e^{t^2}$

Falso

2) Determine a derivada da função vetorial

$\vec{r}(t) = e^{-t}\cos(t)\,\vec{i} + e^{-t}\operatorname{sen}(t)\,\vec{j} + \ln(t)\,\vec{k}$.

Sol.: $\vec{r}(t) = < x(t), y(t), z(t) >$

$\vec{r}\,'(t) = < x'(t), y'(t), z'(t) >$

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)$

Usamos a Regra do Produto para derivar

$x'(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\operatorname{sen}(t)$

$x'(t) = -e^{-t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t))$

- $y(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(t)$

$y'(t) = -e^{-t}\operatorname{sen}(t) + e^{-t}\cos(t)$

$y'(t) = e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))$

- $z(t) = \ln(t)$

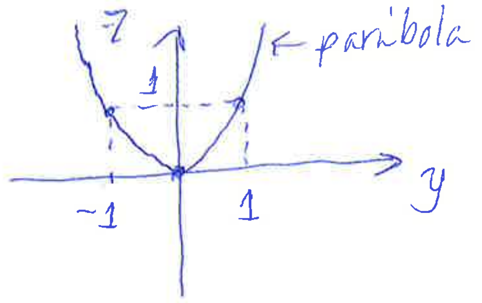
$z'(t) = \frac{1}{t}$

$$\vec{r}\,'(t) = < -e^{-t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)),\ e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)),\ \frac{1}{t} >$$

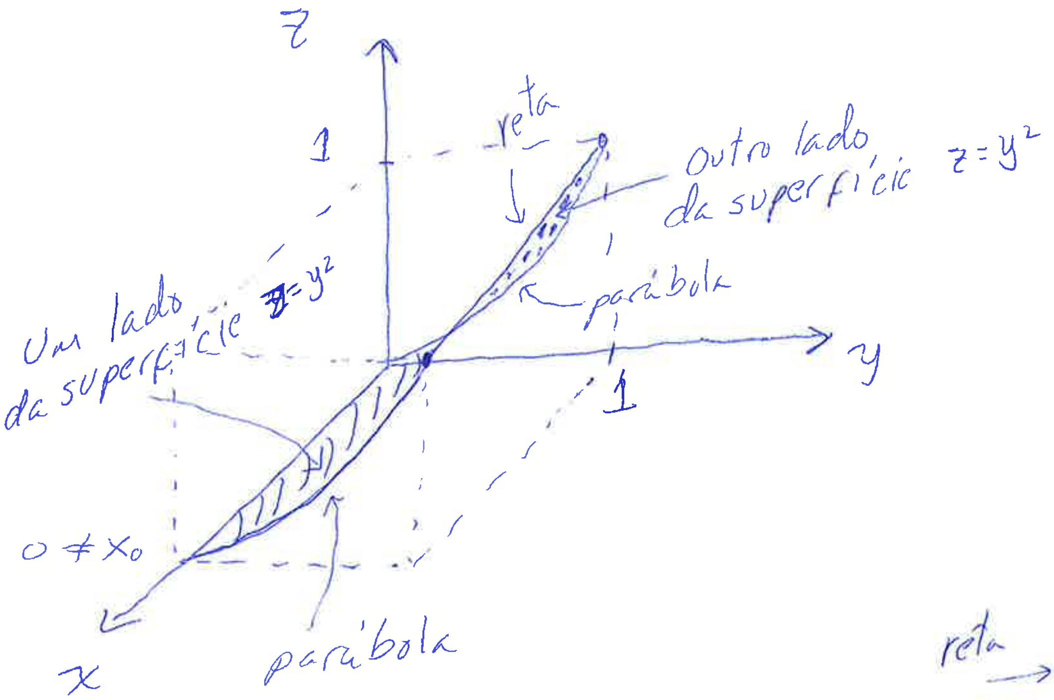
3) Esboce o gráfico da função $f(x,y)=y^2$.

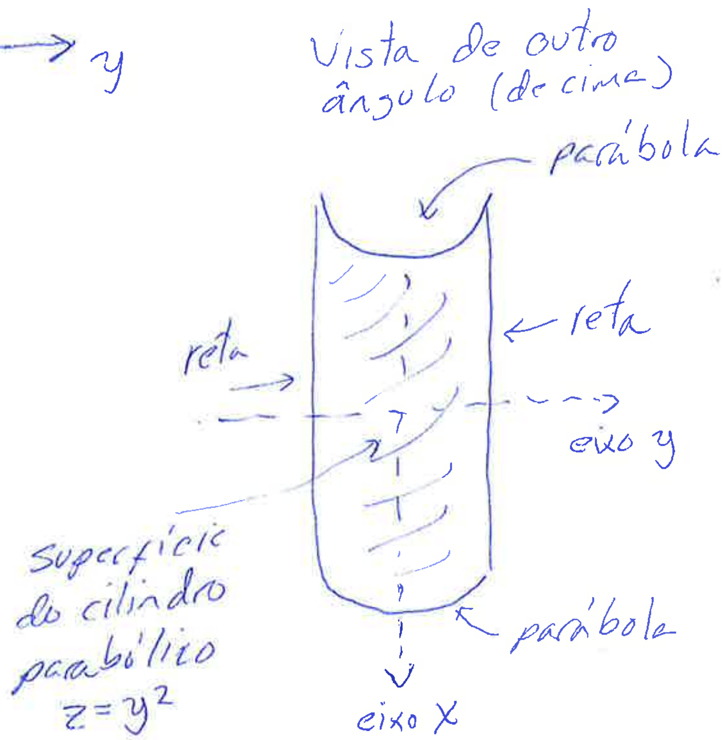
<u>Sol.:</u> $z=f(x,y)=y^2 \Rightarrow z=y^2$

- No plano yz a equação $z=y^2$ significa uma <u>parábola</u>



- No espaço, a mesma equação $z=y^2$ significa uma superfície, neste caso um <u>cilindro parabólico</u>. Cilindro devido a que a variável x não aparece na eq. $z=y^2$.





4) Determine o limite ou mostre que não existe: 4

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \left(\frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4} \right).$$

Sol.: Note que $xy-2y = y(x-2)$ e

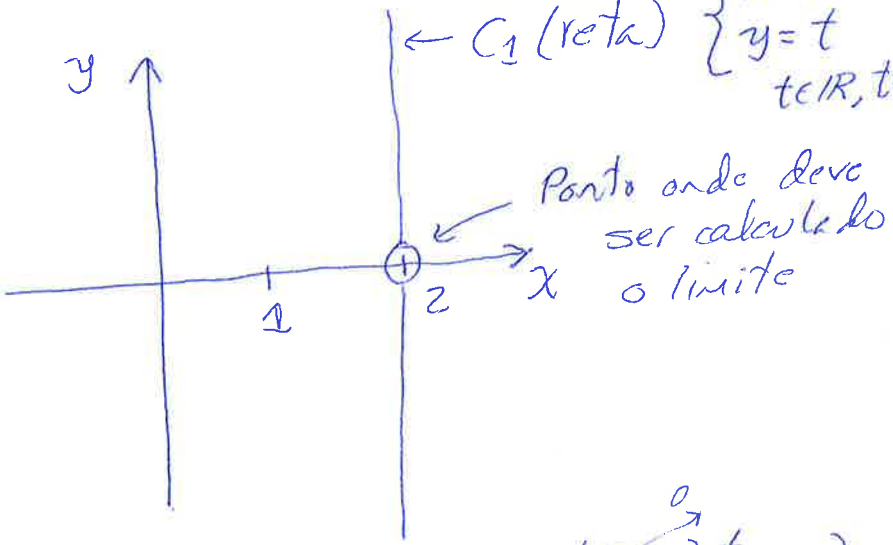
$$x^2+y^2-4x+4 = (x-2)^2+y^2$$

- A função $f(x,y) = \dfrac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2}$ não está definida no ponto $(2,0)$. Logo, a substituição de (x,y) por $(2,0)$ não pode ser feita.

- Vamos mostrar que o limite procurado não existe.

$\leftarrow C_1$ (reta) $\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$

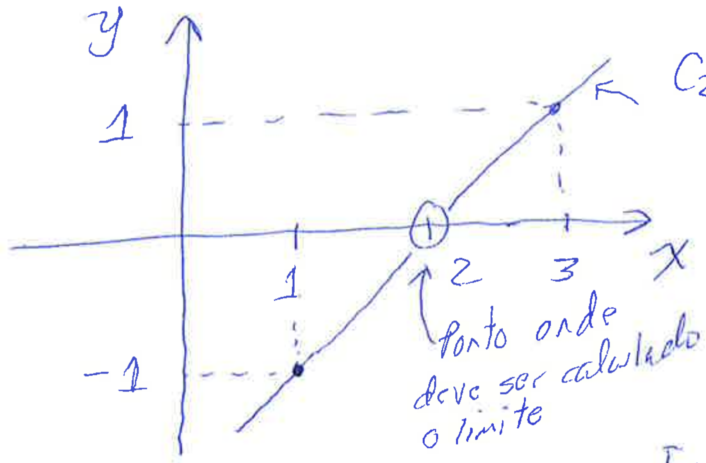
Quando $(x,y)\to(2,0)$ temos que $t\to 0$ seguindo C_1



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ \text{Seguindo } C_1}} \left(\frac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2} \right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0\\ \text{Seguindo } C_1}} \left(\frac{\overset{0}{(2-2)}t}{\underset{0}{(2-2)^2}+t^2} \right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0\\ \text{Seguindo } C_1}} \left(\frac{0}{t^2} \right) = 0$$

O limite existe por C_1 e é igual a zero.

A seguir tentaremos achar o limite ~~por~~ por outra curva (C_2).



C_2 (reta) $\begin{cases} x = t \\ y = t-2 \end{cases}$

$y = x - 2$

Quando $(x,y) \to (2,0)$ temos que $t \to 2$, $t \neq 2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ \text{Seguindo } C_2}} \left(\frac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2} \right) = \lim_{\substack{t\to 2\\ t\neq 2\\ \text{Seguindo } C_2}} \left[\frac{(t-2)(t-2)}{(t-2)^2+(t-2)^2} \right]$$

$$= \lim_{\substack{t\to 2\\ t\neq 2\\ \text{Seguindo } C_2}} \left(\frac{\cancel{(t-2)^2}}{2\cancel{(t-2)^2}} \right) = \frac{1}{2}$$

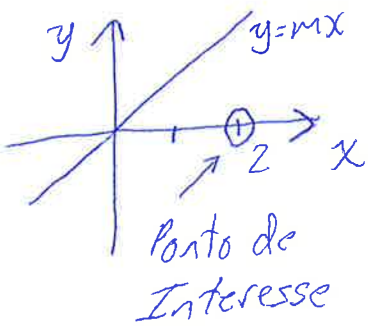
O limite existe, seguindo C_2 e é igual a $1/2$

Logo,

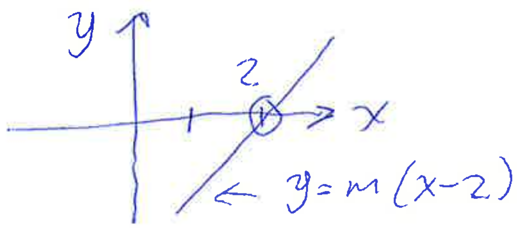
$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ \text{Seguindo } C_1}} \left[\frac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2} \right] \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ \text{Seguindo } C_2}} \left(\frac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2} \right) = \frac{1}{2}$$

O limite NÃO existe.

Erro Comum: Reta $y = mx$



Deviasse trocar para a reta $y = m(x-2)$



5) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.

Sol.: $f(x,y) = xe^y + y\ln(x)$

$$f_x(x,y) = e^y + \frac{y}{x}$$

$$f_y(x,y) = xe^y + \ln(x)$$

■