P2, Biossistemas, 2017, cálculo II. 1

1) Encontre o limite

$$\lim_{t\to 1} \left\langle \sqrt{t+3}, \frac{t^2-1}{t^4-1}, e^{-t^2} \right\rangle$$

Sol.: $\lim_{t\to t_0} \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = \langle \lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t), \lim_{t\to t_0} z(t) \rangle$

- $x(t) = \sqrt{t+3} \Rightarrow \lim_{t\to 1} (\sqrt{t+3}) = 2$

- $y(t) = \frac{t^2-1}{t^4-1} = \frac{\cancel{t^2-1}}{\cancel{(t^2-1)}(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1}$

Usamos que $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ com $a = t^2$ e $b = 1$.

$$\lim_{t\to 1} \left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{1}{2}$$

- $z(t) = e^{-t^2} \Rightarrow \lim_{t\to 1} (e^{-t^2}) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Logo $\boxed{\lim_{t\to 1} \left\langle \sqrt{t+3}, \frac{t^2-1}{t^4-1}, e^{-t^2} \right\rangle = \left\langle 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{e} \right\rangle}$

Note que $e^{-t^2} \neq e^{(-t)^2} = e^{t^2}$

2) Determine o comprimento da curva $\vec{r}(t) = 6t\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,t^2\,\vec{j} + 2t^3\,\vec{k}$ quando $-1 \leq t \leq 1$.

Sol.: $L = \int_{t_i}^{t_f} |\vec{r}\,'(t)|\,dt$

$\vec{r}(t) = \langle 6t, 3\sqrt{2}\,t^2, 2t^3 \rangle$

$\vec{r}\,'(t) = \langle 6, 6\sqrt{2}\,t, 6t^2 \rangle = 6\langle 1, \sqrt{2}\,t, t^2 \rangle$

$|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{1^2 + (\sqrt{2}\,t)^2 + (t^2)^2} = 6\sqrt{1 + 2t^2 + t^4}$

$|\vec{r}\,'(t)| = 6\sqrt{(1+t^2)^2} = 6\,|1+t^2| = 6(1+t^2)$

pois $1+t^2 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$L = 6\int_{-1}^{1}(1+t^2)\,dt = 6 \cdot 2\int_{0}^{1}(1+t^2)\,dt$

$f(t) = f(-t)$ função par $\Rightarrow$ $\int_{-\beta}^{\beta} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\beta} f(t)\,dt$ caso $f(t)$ seja par

$1+t^2 = 1+(-t)^2$

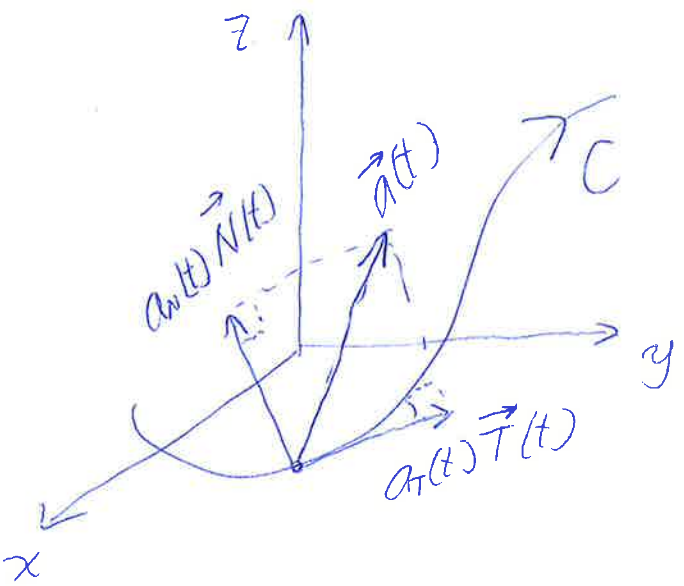
$L = 12\int_0^1 (1+t^2)\,dt = 12\left[\int_0^1 dt + \int_0^1 t^2\,dt\right] = 12\left[t\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right]$

$L = 12\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \cancel{12}^{\,4} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 16$

$\boxed{L = 16}$

3) Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que segue a curva $\vec{r}(t) = (t^2+4)\vec{i} + (2t-3)\vec{j}$ (3)

<u>Sol.:</u>



$$\vec{a}(t) = a_T(t)\vec{T}(t) + a_N(t)\vec{N}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right) = \vec{r}''(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\right) = \vec{r}'(t)$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

- A componente tangencial da aceleração está relacionada a mudança no tempo do módulo do vetor velocidade e é a projeção ortogonal do vetor aceleração na direção do vetor tangente

$$a_T(t) = \frac{d}{dt}\left(|\vec{v}(t)|\right) = \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t) = \vec{r}''(t) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

produto escalar (ou interno)

$$\boxed{a_T(t) = \frac{\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}}$$

- A componente normal da aceleração ~~está relacionada~~ é proporcional a ~~com a~~ curvatura e ao módulo da velocidade ao quadrado

$$a_N(t) = K(t)|\vec{v}(t)|^2 = \frac{|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|^{\cancel{3}}} \cdot \cancel{|\vec{r}'(t)|^2} = \frac{|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$$

Produto Vetorial

$$\boxed{a_N(t) = \frac{|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}}$$

Temos que $\vec{r}(t) = \langle t^2+4, 2t-3 \rangle$

Para calcular o produto vetorial os vetores devem ser tridimensionais. Resolvemos esse problema escrevendo componente z nula.

$$\vec{r}(t) = \langle t^2+4, 2t-3, 0 \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle 2t, 2, 0 \rangle = 2\langle t, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle 2, 0, 0 \rangle$$

$$\boxed{|\vec{r}'(t)| = 2\sqrt{t^2+1}}$$

$$\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) = 2 \cdot 2t + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4t$$

logo $a_T(t) = \dfrac{\cancel{4}^{2} t}{\cancel{2}\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$

$$\boxed{a_T(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}}$$

$$\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, -4 \rangle$$

$$|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)| = 4$$

$$a_N(t) = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{t^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$\boxed{a_N(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}}$$

Erro comum: $\sqrt{4t^2+4} = 2t+2$

Em geral, $\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y$

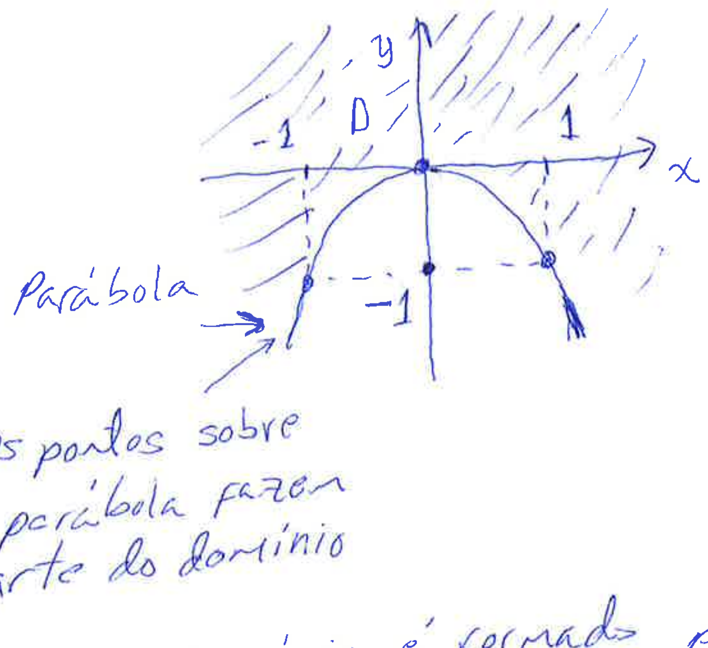
Prova: Seja $x=y=1$ temos que $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
e $x+y=2$, logo $\sqrt{2} \neq 2$ e $\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y$

4) a) Determine o domínio da função
$f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y}$

b) Faça um esboço do domínio

Sol.: a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y \geq 0\}$

b) $x^2+y=0 \Rightarrow y=-x^2$



Pegando como ponto de teste $(0,-1)$ vemos que esse ponto não satisfaz
$x^2+y \geq 0$
$0+-1 \geq 0$
$-1 \geq 0$ Falso.

Logo, o domínio é formado por todos os pontos acima da parábola e os pontos sobre a parábola.

5) Determine uma equação do plano tangente à superfície $z = xy$ no ponto $(1,-3,4)$.

Sol.: A eq. do plano tangente será da forma

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$f(x,y) = xy \Rightarrow \underset{\text{ABSURDO}}{f(x_0,y_0) = 4 \neq 1\cdot(-3) = -3}$

O ponto dado não satisfaz a eq. da superfície, logo $(1,-3,4)$ não pertence a superfície. O problema está mal formulado.

$z = f(x,y) = xy$

$f_x(x,y) = y$

$f_x(1,-3) = -3$

$f_y(x,y) = x$

$f_y(1,-3) = 1$

A eq. do plano tangente a superfície $z = xy$ em $(1,-3,-3)$ será

$$\boxed{z + 3 = -3(x-1) + 1(y+3)}$$

ou simplificando

$z + \cancel{3} = -3x + \cancel{3} + y + 3$

$z = -3x + y + 3$

$$\boxed{3x - y + z = 3}$$