Mecânica Quântica — 7600022

Décima Lista — Para praticar para a prova do dia 5/12.

1. Escreva a matriz que deve ser diagonalizada para se encontrarem as energias de um átomo de hidrogênio no nível $n = 2$ perturbadas por um campo elétrico $\vec{\varepsilon} = \varepsilon\hat{x}$. Não é necessário encontrar todos os elementos de matriz, mas identifique os que são nulos. Fisicamente, que autovalores você espera que essa matriz tenha?

2. Repita o problema anterior para um campo elétrico $\vec{\varepsilon} = \varepsilon\hat{y}$.

3. Suponha que o núcleo do átomo de hidrogênio seja uma esfera condutora de raio $1 \times 10^{-5}a$, onde a é o raio de Bohr. Em outras palavras, você suporá que o campo elétrico dentro do núcleo seja zero e que o campo fora do núcleo é o que conhecemos. Encontre a energia do estado $|1s\rangle$ nesse modelo. Não é necessário efetuar a integral que determina a energia; basta escrevê-la em termos da função radial e do harmônico esférico pertinente. *Sugestão: considere como perturbação um potencial que, somado ao de uma carga pontual $+e$, faça com que o potencial no interior do núcleo seja $-e^2/(10^5 \times a)$..*

4. Qual é a correção do nível $n = 2$ devida à perturbação imposta pelo tamanho finito do núcleo no modelo do problema anterior. De novo, basta escrever as integrais em termos das funções radiais e dos harmônicos esféricos pertinentes, mas identifique todas as integrais que se anula.

5. Qual é a energia do estado fundamental do Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\frac{\omega^2 x^2}{2} + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}V\delta(x),$$

onde V é uma constante tal que $|V| \ll \hbar\omega$. Suponha que o último termo à direita seja uma pequena perturbação. Aqui, você deve expressar a energia em termos de V. Para que o tratamento perturbativo seja válido, é necessário que a correção devida a ela seja muito menor que a separação energética entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado, ambos do Hamiltoniano não perturbado. Essa condição é satisfeita?

6. Qual é a energia do primeiro estado excitado do Hamiltoniano do problema anterior, na mesma aproximação perturbativa?

7. Considere agora o Hamiltoniano de um oscilador harmônico sujeito a um campo elétrico ε:

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\frac{\omega^2 x^2}{2} - e\varepsilon x.$$

Qual é a correção de primeira ordem na energia do estado fundamental devida ao campo elétrico? Para verificar esse resultado, considere os dois últimos termos à direita na equação acima e complete o quadrado para escrever o Hamiltoniano em termos de uma nova variável $x' = x - x_0$, onde x_0 é uma constante que você deverá determinar. Encontre então, exatamente, a energia do estado fundamental do Hamiltoniano escrito em termos dessa nova variável e encontre a diferença entre essa energia e a energia do Hamiltoniano não perturbado, isto é, com $\varepsilon = 0$.

8. Para encontrar a energia do estado fundamental do átomo de He, trate a repulsão entre os elétrons como perturbação. Você não precisa refazer as integrais que apareceram no tratamento variacional do mesmo problema. Compare os resultados perturbativo e variacional.

9. Repita o problema anterior para o íon H^-.

10. Vamos levar em conta o spin no tratamento do átomo de hidrogênio. Para isso, considere $n = 1$, e tome como estados não perturbados os estados

$$|\varphi_1\rangle = |1s\rangle|\uparrow\rangle$$
$$|\varphi_2\rangle = |1s\rangle|\downarrow\rangle$$

Imagine agora que o Hamiltoniano é

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r} - \mu_B B \sigma_x,$$

isto é, o Hamiltoniano do átomo em um campo magnético na direção $\hat{x}$. Encontre as correções de primeira ordem para a energia do estado fundamental devidas ao campo magnético.