Física IV

Segunda Lista de Problemas Adicionais

28 de novembro de 2017

Questões

1. Uma régua em repouso num referencial S' faz um ângulo θ_0 com a direção de movimento desse referencial, que se desloca em relação ao referencial S com velocidade v. Qual é o valor θ desse ângulo em S?

2. Seja uma partícula com massa m_0 e carga q em movimento relativístico numa região com campo magnético uniforme de magnitude B.
   (a) Mostre que a energia cinética da partícula não se altera.
   (b) Mostre que ela descreve uma órbita circular, se a sua velocidade inicial for perpendicular a B.
   (c) Compare as fórmulas relativísticas e não-relativísticas para o raio da órbita e para a frequência de cíclotron.

3. Uma partícula com massa de repouso m_0 se desintegra em duas outras com massas de repouso m_1 e m_2, respectivamente. Calcule as energias E_1 e E_2 desses dois fragmentos.

4. Considere a seguinte transformação inercial:
$$x' = \frac{x - vt}{1 + \rho v} \quad \text{e} \quad t' = \frac{t - \rho^2 vx}{1 + \rho v}, \tag{1}$$
   em que ρ é uma constante característica e verifique se ela satisfaz as hipóteses de:
   (a) Homogeneidade do espaçotempo;
   (b) Isotropia do espaço;
   (c) Estrutura de grupo.

   Obtenha a lei de composição de velocidades e compare com a lei de composição de velocidades para as transformações de Lorentz.

5. Seja um pêndulo composto por uma massa $m = 0,01$ kg suspensa por uma corda inextensível com comprimento $l = 0,1$ m e considere que a amplitude máxima de oscilação faça um ângulo de $0,1$ rad com a vertical. O decréscimo de energia do pêndulo devido a forças dissipativas, como o atrito com o ar, é observado de uma forma contínua ou descontínua? Justifique a sua resposta.

6. O comprimento de onda correspondente ao limiar para que ocorra o efeito fotoelétrico no alumínio é de 2954 Å.
   (a) Qual é a função trabalho do alumínio em eV?
   (b) Qual é a energia cinética máxima dos elétrons ejetados do alumínio por luz ultravioleta de comprimento de onda 1500 Å?

7. Considere um feixe de raios X com comprimento de onda $\lambda_x = 1$ Å e um feixe de raios γ com $\lambda_\gamma = 1,88 \cdot 10^{-2}$ Å. Se a radiação espalhada por elétrons livre é observada a 90° com respeito ao feixe incidente:
   (a) Qual é o deslocamento Compton em cada caso?
   (b) Qual é a energia cinética fornecida aos elétrons espalhados em cada caso?

(c) Qual porcentagem da energia do fóton incidente é perdida na colisão em cada caso?

8. Relacione a direção φ de desvio do elétron de recuo no efeito Compton com as frequências ν_0 e ν dos fótons incidente e espalhado e o ângulo θ de espalhamento.

9. Considere um projétil com massa $m_p = 50$ g e um elétron $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ g ambos com velocidade $v = 300\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ determinadas com uma incerteza de $0,01\%$. Com que precisão fundamental podemos localizar ambas as partículas, se a posição for medida simultaneamente com a velocidade?

10. Suponha que um elétron esteja localizado em algum ponto de um átomo com diâmetro 1 Å.
    (a) Qual é a incerteza no momento do elétron?
    (b) Sabendo que a energia de ligação de um elétron é da ordem de alguns eV, discorra sobre a possibilidade de esse elétron formar um estado ligado com o átomo.

11. Suponha que um elétron esteja localizado em algum ponto de um átomo com diâmetro 10^{-12} cm.
    (a) Qual é a incerteza no momento do elétron?
    (b) Sabendo que a energia de ligação de um núcleo é da ordem de alguns MeV, discorra sobre a possibilidade de esse elétron formar um estado ligado com o núcleo.

12. Usando o postulado de de Broglie, determine os comprimentos de onda permitidos para um elétron no átomo de Bohr em função do raio da órbita. Interprete fisicamente o seu resultado.

13. Em 1965, Höglund e Metzer observaram, com um radiotelescópio, uma linha espectral de emissão de frequência 5009 MHz.
    (a) Mostre que essa linha corresponde a uma transição entre dois níveis de Rydberg do átomo de hidrogênio, $n = 110 \to n = 109$.
    (b) Qual é o raio da órbita de Bohr para $n = 109$ e $n = 110$?

14. Seja a $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathscr{C}^2} \mathbb{C}$ uma função de quadrado integrável que descreve um sistema quântico. Mostre que a transformação

$$\psi'(\mathbb{x}, t) = \psi(\mathbb{x}, t)e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \tag{2}$$

constitui uma simetria de calibre de qualquer teoria quântica.

15. Nesta questão vamos demonstrar o *Teorema de Ehrenfest* que corrobora matematicamente o *princípio da equivalência*, ao afirmar que os valores esperados de observáveis quânticos obedecem à *2ª Lei de Newton*, i.e.,

$$\partial_t \langle \hat{p} \rangle = -\langle \partial_x V \rangle. \tag{3}$$

(a) Sejam dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, definimos o *comutador* de $\hat{A}$ com $\hat{B}$ por

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{4}$$

Demonstre que

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{\mathbb{1}}, \tag{5}$$

em que $\hat{x}$ e $\hat{p}$ denotam, respectivamente, o operador posição e o operador momento que atuam sobre funções de onda $\psi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathscr{C}^2} \mathbb{C}$.

(b) Demonstre que

$$\partial_t\langle\hat{A}\rangle = -\frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{A},\hat{H}\right]\right\rangle, \tag{6}$$

em que $\hat{H}$ denota o operador *hamiltoniano* do sistema.

(c) Combinando os resultados do item (a) e (b), demonstre o *Teorema de Ehrenfest.*

16. O *oscilador harmônico quântico unidimensional*, assim como a sua contraparte clássica, constitui um dos sistemas físicos mais importantes, pois um potencial arbitrário pode ser, em geral, muito bem aproximado por um potencial harmônico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável. Ele é descrito a partir da seguinte equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) + \frac{C}{2}x^2\psi(x,t) = i\hbar\partial_t\psi(x,t), \tag{7}$$

em que $\psi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathscr{C}^2} \mathbb{C}$ é uma função de quadrado integrável e C denota a constante de mola do potencial harmônico $V(x,t) = \frac{C}{2}x^2$.

(a) O estado fundamental do oscilador harmônico quântico é descrito pela seguinte função de onda:

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{\sqrt{Cm}}{2\hbar}x^2}e^{-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{C}{m}}t}, \tag{8}$$

em que $A \in \mathbb{R}$ é uma constante de normalização. Demonstre que (8) é uma solução da equação (7).

(b) Usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, \tag{9}$$

normalize a função de onda (8).

(c) Demonstre que o estado fundamental do oscilador harmônico quântico é um estado de incerteza mínima.