

Indutância / Circuitos RL

Prof. Cristiano Oliveira

Ed. Basilio Jafet – sala 202

crislpo@if.usp.br

Indutância Mútua

Anteriormente consideramos a interação magnética entre dois fios que conduziam correntes **estacionárias**: a corrente de um fio produzia um campo magnético que exercia uma força sobre a corrente de outro fio.

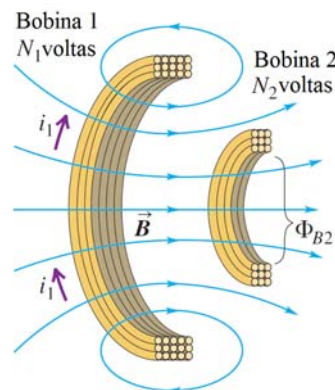
No entanto, quando existe uma corrente **variável** em um dos circuitos, ocorre uma interação adicional entre os dois circuitos.

Sejam as duas bobinas indicadas abaixo. Uma corrente circulando na bobina 1 produz um campo magnético $\vec{B}$ e, portanto, um fluxo magnético através da bobina 2.

Quando a corrente na bobina 1 varia, o fluxo magnético através da bobina 2 também varia; de acordo com a lei de Faraday, isso produz uma **fem** na bobina 2. sendo assim, a variação da corrente em um dos circuitos produz uma corrente induzida no outro circuito.

Nesta figura uma corrente i_1 na bobina 1 induz um campo magnético e algumas das linhas de campo passam através da bobina 2.

Seja Φ_{B2} o fluxo magnético através de **cada espira** da bobina 2 produzido pela corrente i_1 na bobina 1



Indutância Mútua

O campo magnético é proporcional a i_1 de modo que Φ_{B2} também é proporcional à i_1 .

Quando i_1 varia, Φ_{B2} também varia e assim induz uma **fem** ε_2 na bobina 2 dada por:

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

Pode-se representar a proporcionalidade entre Φ_{B2} e i_1 na forma $N_2 \Phi_{B2} = (\text{constante}) i_1$. Introduzindo uma constante de proporcionalidade M_{21} , chamada de **indutância mútua** das duas bobinas, escrevemos:

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

Onde Φ_{B2} é o fluxo magnético através de uma única espira da bobina 2. Portanto,

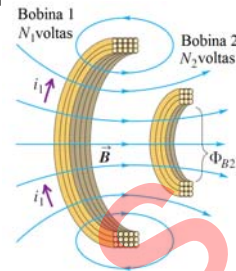
$$N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

E podemos escrever a **fem** na bobina 2 como:

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

A indutância mútua definida acima pode ser escrita na forma:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1}$$



Indutância Mútua

Podemos repetir o raciocínio para o caso em que uma corrente variável i_2 na bobina 2 produz um fluxo magnético variável Φ_{B1} e induz uma **fem** ε_1 na bobina 1.

Neste caso teríamos a constante M_{12} que, em princípio, poderia ser imaginada como diferente de M_{21} . Contudo, verifica-se na prática que M_{12} é **sempre** igual a M_{21} e assim pode-se utilizar o símbolo M para designar essa indutância mútua.

Assim:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{e} \quad \varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{fem mutuamente induzida}$$

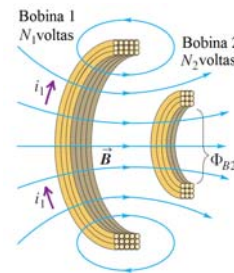
Onde a indutância mútua é:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2} \quad \text{Indutância mútua}$$

A unidade de indutância mútua, no SI, é o **henry** (1H), sendo que:

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A} = 1 \Omega \cdot \text{s} = 1 \text{ J/A}^2$$

Similarmente ao caso de capacitância, 1 H é uma unidade muito grande de indutância. Em geral tem-se valores típicos na casa de milihenry ou microhenry.



Bobina de Tesla: Em uma das versões da bobina de Tesla, um solenóide longo de comprimento l e seção reta com área A possui N_1 espiras enroladas de modo compacto. Uma bobina com N_2 espiras é enrolada em seu centro (figura abaixo). Determine a indutância mútua.

O fluxo dentro da espira 2 é exatamente o fluxo dentro da espira 1

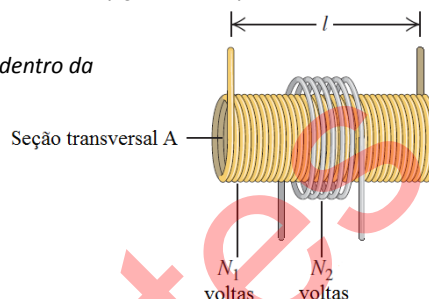
$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2 \mu_0 N_1 i_1}{i_1 l} = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

Exemplo de Aplicação:

$$l = 0.50 \text{ m}, A = 10 \text{ cm}^2 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2, N_1 = 1000 \quad N_2 = 10$$

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m})(1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(1000)(10)}{0.50 \text{ m}} \\ = 25 \times 10^{-6} \text{ Wb/A} = 25 \times 10^{-6} \text{ H} = 25 \mu\text{H}$$



Indutores e Auto-Indutância

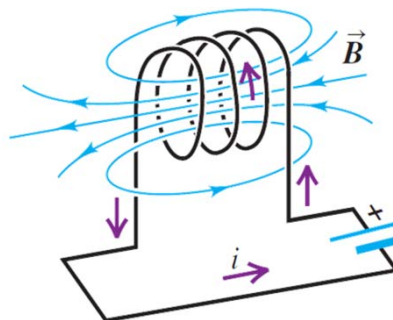
No caso anterior consideramos dois circuitos separados: a corrente no circuito um gera um campo magnético que origina um fluxo no segundo circuito. Se a corrente muda no circuito um o fluxo se altera no circuito 2 e assim se tem uma **fem** induzida no circuito 2.

Um efeito importante ocorre se considerarmos apenas um circuito isolado. Quando uma corrente está presente, ele gera um campo magnético através do **mesmo** circuito.

Sendo assim, qualquer circuito conduzindo corrente pode induzir uma **fem** pela variação de seu próprio campo magnético.

Pela Lei de Lenz sabemos que essa **fem** induzida se opõe à variação da corrente inicial.

Sendo assim, **fem** auto-induzidas são de grande importância sempre que temos a corrente variando



fem auto-induzidas ocorrem em qualquer circuito pois sempre teremos algum fluxo de campo magnético gerado em correntes de circuito fechado

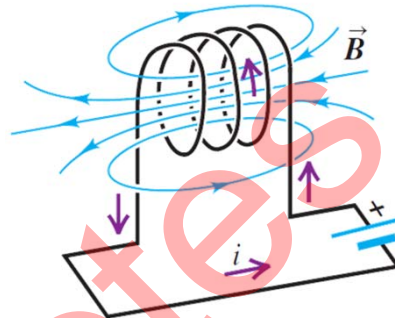
Indutores e Auto-Indutância

Essa **fem** auto-induzida é amplificada se no circuito tivermos uma espira com N voltas de fio.

Como resultado de uma corrente i existe um fluxo magnético Φ_B através de cada volta da espira. Assim podemos definir a auto-indutância L do circuito como:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad \text{Auto-indutância}$$

Usualmente, quando não existe outros elementos indutores no circuito, a auto-indutância é simplesmente chamada de **indutância**. No SI, a indutância possui como unidade o henry



Se a corrente varia, o fluxo varia e assim, da equação acima: $N \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$

Da Lei de Faraday para uma espira de N voltas obtemos finalmente $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$

O sinal negativo é equivalente a Lei de Lenz: o indutor sempre se opõe à variação de correntes no circuito.

Indutor como elemento de Circuito

Um elemento de circuito que é projetado para ter uma indutância em particular é denominado **indutor**. O símbolo de indutor é:



Pelas Leis de Kirchhoff em um circuito fechado, mede-se as diferenças de potencial em cada elemento e a soma algébrica total deve ser zero. O campo elétrico produzido pelas cargas andando no circuito é conservativo e o chamamos de $\vec{E}_c$.

Dentro do indutor, o campo magnético produzido pelas espiras criam um campo elétrico não conservativo, $\vec{E}_n$. Se assumimos que a resistência interna do indutor é desprezável, é necessário um campo também desprezável para mover as cargas no sistema. Assim, o campo total, $\vec{E}_c + \vec{E}_n$ deve ser zero, mesmo que os campos individualmente não sejam nulos.

No circuito ao lado tem-se uma fonte de corrente. De acordo com a lei de Faraday, a integral de linha em torno do circuito é o negativo da taxa de variação do fluxo pelo circuito, assim,

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L \frac{di}{dt}$$

Como o campo não conservativo somente é não nulo dentro do indutor,

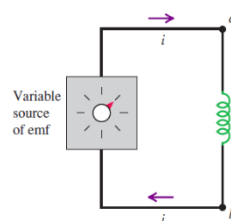
$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L \frac{di}{dt}$$

Agora, como vimos acima $\vec{E}_c + \vec{E}_n = 0$, e assim: $\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L \frac{di}{dt}$

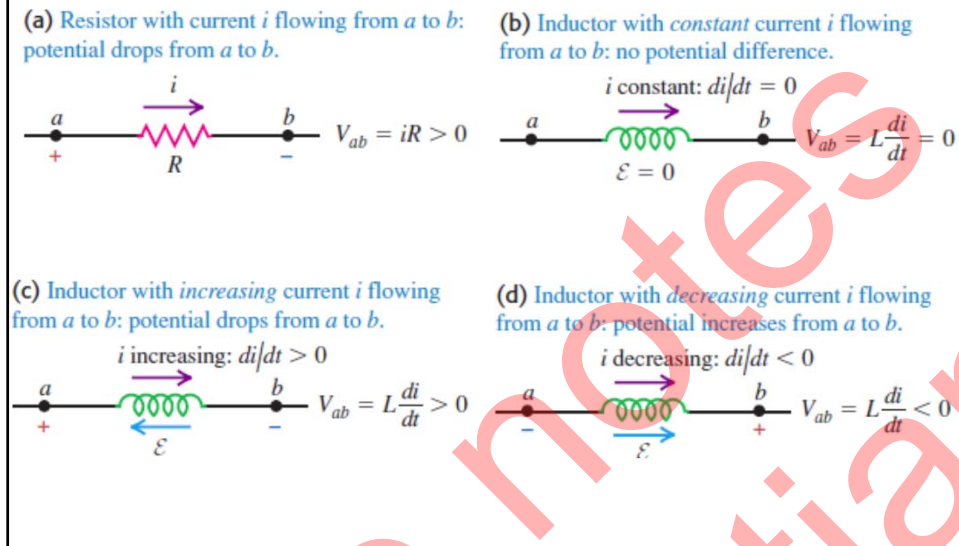
Mas, esta integral nada mais é do que o potencial V_{ab} do ponto a com respeito ao ponto b. Assim, finalmente obtemos:

$$V_{ab} = V_a - V_b = L \frac{di}{dt}$$

Sendo assim existe uma queda de potencial nos terminais de um indutor associado a forças conservativas. Quando usamos as leis de Kirchhoff para analisar circuitos, a relação acima deve ser utilizada.



Comportamento de um indutor



Indutância de um solenóide / Toróide

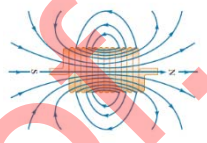
Solenóide longo de área A .

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{d} I$$

$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{d} I$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{d}$$

$$L = \frac{\mu_0 (nd)^2 A}{d} = \mu_0 n^2 A d = \mu_0 n^2 V$$



Toróide circular de raio R .

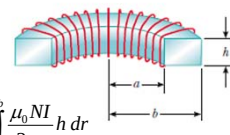
$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b (B)(h dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h dr$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi I} \ln \frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

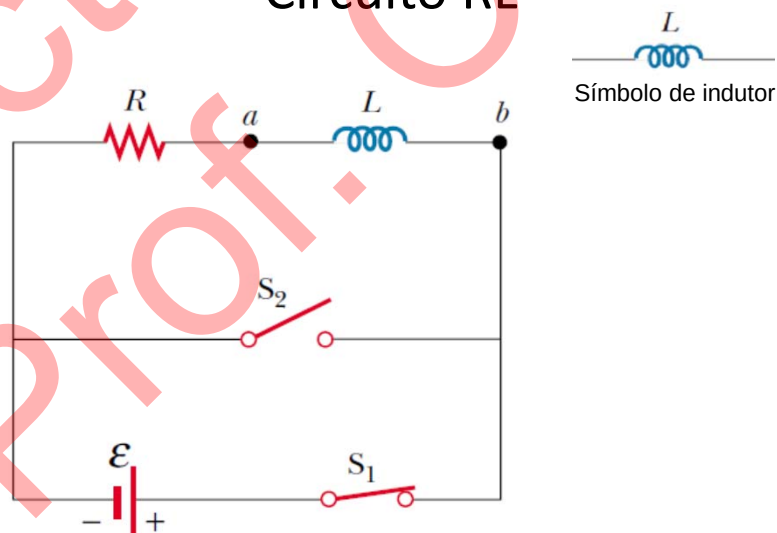


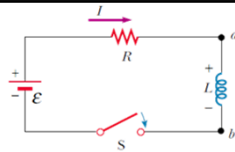
Destes dois exemplos vemos que a indutância pode ser escrita como a constante de permeabilidade μ_0 vezes uma grandeza com dimensão de comprimento:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m / A} \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H / m}$$

Medium	Permeability μ [H/m]	Relative Permeability μ/μ_0
Mu-metal	2.5×10^{-2}	20,000 ^[5]
Mu-metal		50,000 ^[6]
Permalloy	1.0×10^{-2}	8,000 ^[5]
Electrical steel	5.0×10^{-3}	4,000 ^[5]
Ferrite (nickel zinc)	$2.0 \times 10^{-5} - 8.0 \times 10^{-4}$	16-640
Ferrite (manganese zinc)	$>8.0 \times 10^{-4}$	>640
Steel	8.75×10^{-4}	100 ^[5]
Nickel	1.25×10^{-4}	100 ^[5] - 600
Platinum	$1.256\,9701 \times 10^{-6}$	1.000 265
Aluminum	$1.256\,6650 \times 10^{-6}$	1.000 022
Air		1.000 000 37 ^[8]
Vacuum	$1.256\,6371 \times 10^{-6}$ (μ_0)	1
Hydrogen	$1.256\,6371 \times 10^{-6}$	1.000 0000
Sapphire	$1.256\,6368 \times 10^{-6}$	0.999 999 76
Copper	$1.256\,6290 \times 10^{-6}$	0.999 994
Water	$1.256\,6270 \times 10^{-6}$	0.999 992
Bismuth		0.999 834
Superconductors	0	0

Circuito RL





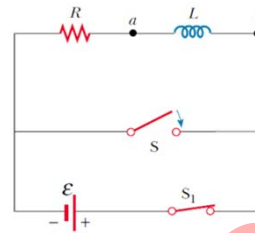
No início, o indutor se oporá à passagem de corrente em decorrência da variação do fluxo magnético. Isso gerará uma força eletromotriz induzida ε_{ind} , ou uma queda de potencial V_L :

$$\varepsilon - V_R - V_L = 0$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad V_R = IR$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon$$

Equação Diferencial de primeira ordem com estímulo externo



Ligando-se a chave S com a chave S1 ainda ligada, a fonte será colocada em curto forçando a parada da corrente. Isto gerará uma alteração no fluxo magnético no indutor, gerando uma fem induzida:

$$V_R + V_L = 0$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad V_R = IR$$

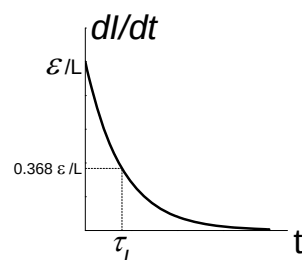
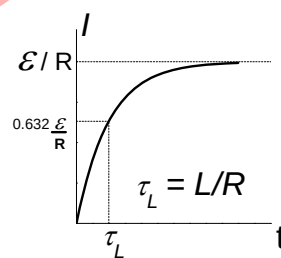
$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0$$

Equação Diferencial de primeira ordem homogênea

Solução obtida na Carga: Crescimento da Corrente

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$$



Solução obtida na descarga: Decaimento da Corrente

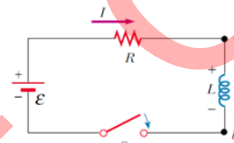
$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\frac{dI}{dt} = -I_0 \frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$$



Energia Armazenada no Campo Magnético

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$



Multiplicando por I em ambos os lados,

Taxa com que a energia aparece sob a forma de energia térmica no resistor, ie, potência dissipada no resistor

$$\varepsilon I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}$$

Taxa com que o dispositivo de fem transmite energia para o circuito, isto é, é a potência fornecida pela fonte.

A energia não aparece como energia térmica no indutor. Sendo assim, pela conservação de energia, deve ficar armazenada neste. Logo, esta equação indica a conservação da energia para circuitos RL.

Este termo deve indicar a taxa dU_B / dt com que a energia é armazenada no campo magnético:

$$\frac{dU_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Taxa de energia armazenada no campo magnético do indutor:

$$\frac{dU_B}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

Pode ser reescrito como,

$$dU_B = LI dI$$

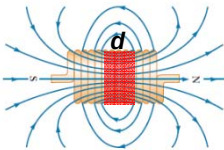
Fazendo a integração direta,

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^I LI dI$$

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2$$

Energia Magnética armazenada em um indutor L transportando uma corrente I

Solenóide longo com seção transversal A



Tomemos um comprimento próximo ao centro do solenóide.

A energia armazenada nesta extensão d deve estar **interiamente dentro deste volume** pois o campo magnético fora é praticamente nulo

Também, a energia armazenada deve estar uniformemente distribuída por todo o volume do solenóide, porque o campo magnético é uniforme em qualquer ponto de seu interior. Assim,

$$u_B = \frac{U_B}{Ad} \Rightarrow u_B = \frac{LI^2}{2Ad} = \frac{L}{d} \frac{I^2}{2A}$$

Como obtido anteriormente,

$$\frac{L}{d} = \mu_0 n^2 Ad \Rightarrow u_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$$

Para um solenóide ideal, $B = \mu_0 In$

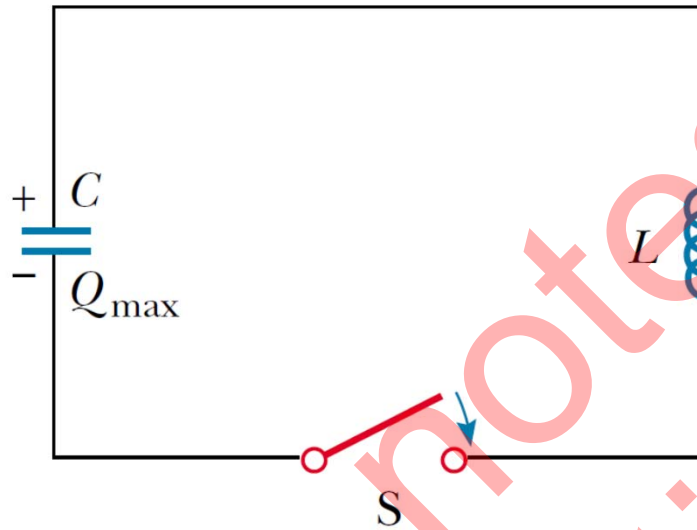
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Densidade de energia magnética

Similaridades entre capacitância e indutância

	<i>Elétrica</i>	<i>Magnética</i>
Definição	$C = q/V$	$L = N \Phi / i$
Dimensões	$C \approx \epsilon_0 \times \text{um comprimento}$	$L = \mu_0 \times \text{um comprimento}$
Constantes	$\epsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$	$\mu_0 = 1.26 \text{ }\mu\text{H/m}$
Armazenamento de energia	$U_C = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{q^2}{2C}$	$U_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{(N\Phi)^2}{2L}$
Densidade de energia	$u_C = (\epsilon_0/2) E^2$	$u_B = (1/2 \mu_0) B^2$
Constante de tempo	$\tau_C = CR$	$\tau_L = L/R$

Circuito LC



Analogia com oscilador Massa-Mola

Energia potencial da mola $\leftrightarrow$ Energia elétrica no capacitor

Energia cinética da massa $\leftrightarrow$ Energia magnética no indutor

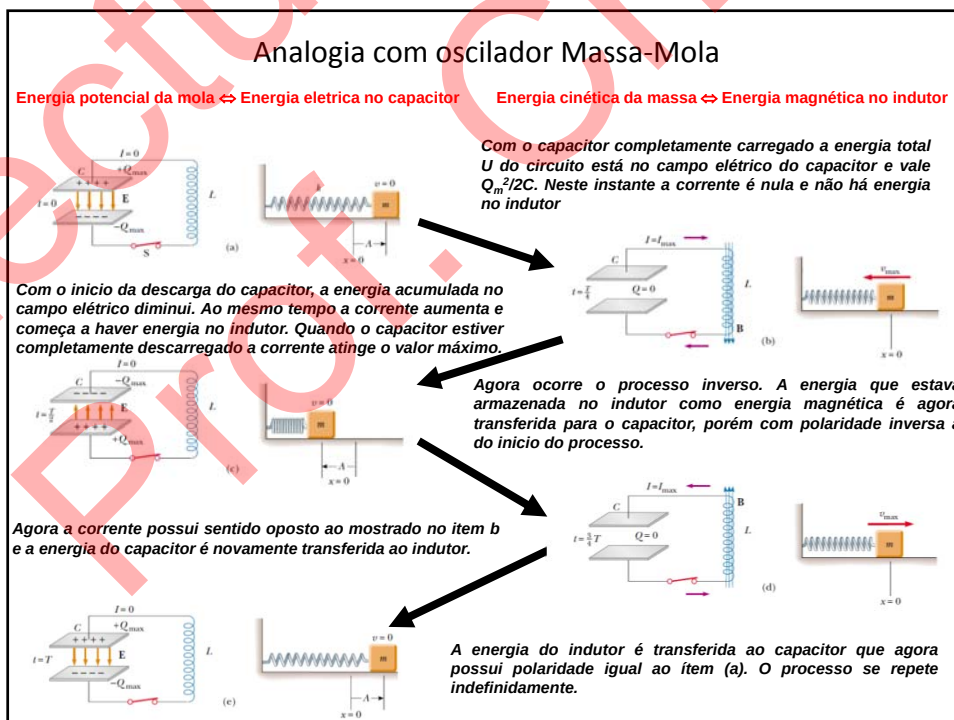
Com o capacitor completamente carregado a energia total U do circuito está no campo elétrico do capacitor e vale $Q_m^2/2C$. Neste instante a corrente é nula e não há energia no indutor

Com o início da descarga do capacitor, a energia acumulada no campo elétrico diminui. Ao mesmo tempo a corrente aumenta e começa a haver energia no indutor. Quando o capacitor estiver completamente descarregado a corrente atinge o valor máximo.

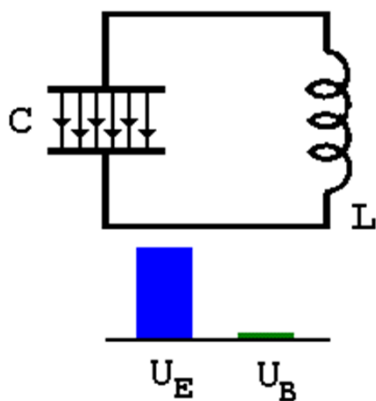
Agora ocorre o processo inverso. A energia que estava armazenada no indutor como energia magnética é agora transferida para o capacitor, porém com polaridade inversa à do início do processo.

Agora a corrente possui sentido oposto ao mostrado no item b e a energia do capacitor é novamente transferida ao indutor.

A energia do indutor é transferida ao capacitor que agora possui polaridade igual ao item (a). O processo se repete indefinidamente.



Energia potencial da mola $\leftrightarrow$ Energia elétrica no capacitor Energia cinética da massa $\leftrightarrow$ Energia magnética no indutor



Balanço de energia

Em um tempo arbitrário t , depois da chave ter sido fechada, o capacitor está com uma carga Q e o circuito com uma corrente I . Ambos os componentes acumulam energia mas a soma deve ser igual a energia inicial U pois não há dissipação:

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

Já que admitimos não haver resistência no circuito, não há dissipação e então a energia total permanece constante no tempo, ou seja $dU/dt = 0$:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \right) = 0$$

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

Agora,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{d^2Q}{dt^2}$$

Assim,

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{dQ}{dt} \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Equação Diferencial de segunda ordem homogênea e linear

Como Resolver?



Da resolução da equação diferencial,

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \delta)$$

Onde Q_m é a carga máxima do capacitor e a frequência angular ω é dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A corrente será dada por

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta)$$

Como obter o ângulo de fase δ ?

→ Condições de contorno!!!

Início: Capacitor totalmente carregado. Sendo assim em $t=0$, $I=0$ e $Q=Q_m$. Fazendo $I=0$ e $t=0$ em na equação anterior, temos

$$0 = -\omega Q_m \sin(\delta)$$

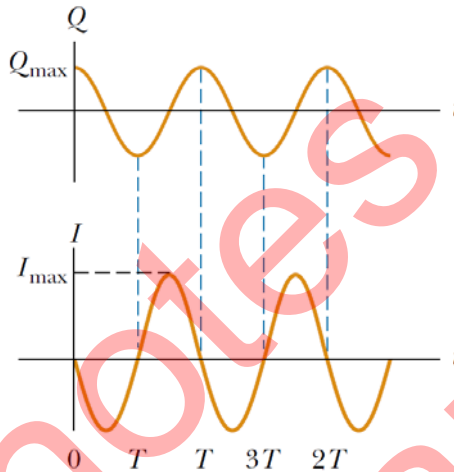
Ou seja, $\delta=0$.

Isto também é coerente com a segunda condição, $Q=Q_m$ em $t=0$.

Assim a variação da carga e da corrente serão:

$$Q = Q_m \cos(\omega t)$$

$$I = -\omega Q_m \sin \omega t = -I_m \sin \omega t$$



Como fica a energia?

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} LI^2$$

$$U = U_C + U_L = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t$$

U é constante. Logo, para $t=0$

$$U = \frac{Q_m^2}{2C}$$

Similarmente, para $\omega t = \pi/2$

$$U = \frac{LI_m^2}{2}$$

Logo,

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

E podemos reescrever U como,

$$U = \frac{Q_m^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{Q_m^2}{2C} = \text{cte}$$

