

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
Departamento de Economia

Programa de Pós-Graduação em Economia

Microeconomia II (EAE5706)

Prof. Rafael V. X. Ferreira

Lista de Exercícios 11 – Externalidades e Bens Públicos

Questão 1 Considere uma economia com dois consumidores, em que cada consumidor tem preferências idênticas dada por: $u_i(x_i, G) = \ln x_i + \ln(G_i + G_j)$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Indivíduos 1 e 2 têm dotações I_1 e I_2 e restrições orçamentárias: $I_i = x_i + G_i$. Bem x é um bem privado, enquanto o bem G é um bem público puro.

- a) Assumindo que cada consumidor trata o gasto do outro com o bem público como sendo fixo em suas decisões de consumo, encontre o nível de equilíbrio do bem público provido privadamente. Compare com o nível socialmente eficiente.
- b) Encontre o nível de equilíbrio do bem público para o caso em que $I_1 = I_2 = 10$. Mostre que uma redistribuição *lump sum* que altera as dotações iniciais para $I_1 = 12, I_2 = 8$ não afeta o nível de provisão do bem público.
- c) Comece novamente com as dotações iguais a 10 para cada consumidor, encontre a transferência máxima da pessoa 2 para a pessoa 1 que não alterará o nível de provisão do bem público. As contribuições para prover o bem público devem ser não-negativas.
- d) Suponha que $I_1 = 14$ e $I_2 = 6$. Qual é a provisão de equilíbrio do bem público? Ela é uma alocação mais eficiente do que a encontrada em (c)? Explique.
- e) Suponha que nós começamos com a situação em (d) e o governo inicia uma taxa para ambas as pessoas em um valor de 2, de forma que a pessoa 1 tem uma renda de 12 e a pessoa 2 tem uma renda de 4, após o imposto. O governo usa toda a sua taxa para comprar unidades do bem público. Qual é o impacto desta política sobre o nível do bem público? Isto é uma alocação mais eficiente do que a de (c) e/ou (d)? Explique.
- f) Mantendo o nível de renda igual a 20 nessa economia, mostre que o nível de provisão do bem público decresce se acrescentarmos novos consumidores com as mesmas preferências e que cada consumidor receba uma dotação de 5. (dica: se todos os consumidores são idênticos, o equilíbrio de Nash será caracterizado por contribuições no equilíbrio idênticas).

Questão 2 Suponha uma economia com N indivíduos, cada um com uma função de utilidade quase-linear $u(x_i, G) = v(G) + x_i$, em que G é o nível do bem público, e x_i o nível do bem privado do consumidor i ; $v(G)$ é côncava e duas vezes continuamente diferenciável. Seja w_i a dotação inicial do bem privado para o indivíduo i , e seja t_i sua contribuição de imposto. Assuma uma tecnologia linear em que taxa marginal de transformação é igual a 1.

- Assuma uma solução interior. Caracterize a quantidade socialmente ótima da provisão do bem público.
- Assuma uma solução interior. Caracterize as contribuições voluntárias no equilíbrio e compare o resultado com o *first-best*.
- O que acontece conforme N aumenta.
- Suponha que o governo está taxando todas as pessoas da mesma forma. O governo poderia fazer todos melhorarem ao taxar mais que as contribuições em equilíbrio? O que é verdade sobre as contribuições privadas nesse caso?

Questão 3 Uma economia tem dois consumidores e dois bens. O bem X é um bem privado enquanto o bem G é um bem público puro. As funções de utilidade dos consumidores são dadas por:

$$u_i(x_i, g) = x_i g \quad ; i \in \{1, 2\}$$

As dotações dos indivíduos 1 e 2 são de 30 e 60 unidades de X , respectivamente. A tecnologia disponível para produzir o bem público é linear, exigindo duas unidades de X para cada unidade de G , de modo que a fronteira de possibilidades de produção da economia é dada por $x + 2g = 90$, em que $x = x_1 + x_2$.

- Calcule o equilíbrio competitivo da economia quando dois indivíduos pagam o mesmo preço pelo bem público.
- Calcule a quantidade Pareto ótima do bem público.
- Calcule os preços individuais que devem ser cobrados de cada indivíduo para que cada um demande a quantidade ótima de Pareto do bem público (equilíbrio de Lindahl).
- De que forma a quantidade ótima de (b) e os preços de (c) dependem da distribuição de dotações entre indivíduos? Esta propriedade é geral ou ela depende das funções de utilidade e de produção específicas nesse exemplo?

Questão 4 Um número I de indivíduos têm preferências sobre o bem numérico privado e um bem público dadas por $u_i(m, y) = m_i + \theta \ln y$, em que $\theta_i > 0, i \in \{1, \dots, I\}$. Os indivíduos têm dotações do bem privado dadas por $\xi_i > 0$. Cada unidade do bem público é produzida utilizando como insumo uma unidade do bem numérico.

Suponha I ímpar. Os indivíduos devem decidir por maioria simples de votos qual é a contribuição comum do bem numérico t que todos vão fazer para o provimento do bem público (isto é, $y = tI$). A contribuição t escolhida por maioria simples dos votos é aquela tal que nenhuma outra é preferida por mais de metade dos indivíduos.

- a) Qual é a contribuição preferida de cada indivíduo $i \in \{1, \dots, I\}$?
- b) Qual é a contribuição total decidida por maioria simples de votos?
- c) Qual é a quantidade eficiente de Pareto de bem público?
- d) Quando a contribuição decidida por maioria simples de votos provê o bem público eficientemente?

Questão 5 Suponha que um número $N > 1$ de firmas possam investir recursos em pesquisa para realizar uma descoberta tecnológica que, se realizada, vale $V > 1$. A probabilidade de que a descoberta seja realizada é:

$$\Pi(X) = \frac{X}{1+X}$$

em que $X = \sum_{i=1}^N x_i$ é o valor total dos recursos investidos na pesquisa por todas as N firmas. Um sistema de patente garante somente à primeira firma que realizar a descoberta a apropriação privada do valor V . A probabilidade de que a firma $i = 1, \dots, N$ ganhe a patente é dada por $\Pi(X)\pi_i$, em que:

$$\pi_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^N x_j}$$

é a probabilidade de que o agente i realize a descoberta antes dos outros, condicionada ao evento de que a descoberta seja realizada.

- a) Calcule o vetor do investimento que maximiza o lucro esperado para cada firma em Equilíbrio de Nash (pode deixar a fórmula de implícita).
- b) Calcule o valor do investimento total que maximiza o lucro esperado para a sociedade.
- c) Qual é o valor da taxa t sobre o valor da descoberta (de modo que as firmas recebam $(1-t)V$ se realizarem a descoberta) que faz com que o investimento total no equilíbrio de (a) coincida com o investimento eficiente de (b)?
- d) De que maneira a taxa ótima de (c) varia com N e V ?

O seguinte enunciado vale para as questões 6 a 9.

Questão 6 Considere uma economia estilizada com dois de bens: um privado e um público. Nessa economia, o governo possui uma tecnologia que pode transformar o bem privado C no bem público g de acordo com a função de produção

$$g = G(C) := C^{1/2}$$

Em outras palavras, o custo (em unidades de bem privado) de produzir g unidades do bem público é

$$C(g) := g^2$$

Existem $n \geq 2$ jogadores na economia. Cada jogador tem uma dotação $\bar{x}_i > 0$ de bem privado, que pode ser consumido diretamente ou ser usado para a produção

de bem público. Denote por x_i o consumo de bem privado e c_i a contribuição para a provisão de bem público. A restrição orçamentária então é

$$x_i + c_i = \bar{x}_i$$

Assumimos que a função de *payoff* é dada por

$$U^i(g, x_i) := v_i(g) + x_i, \text{ onde } v_i(g) := \gamma_i \ln(g)$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Compute o nível eficiente de bem público.

Questão 7 Considere primeiro o caso em que o governo pergunta aos jogadores quanto de bem privado eles gostariam de contribuir. Antes de perguntar, o governo anuncia que sua função de oferta de bem público é dada por

$$g(c) = G\left(\sum_i c_i\right) = \left(\sum_i c_i\right)^{1/2}$$

dado um perfil de contribuições $(c_i)_{i=1}^n$.

- Compute o equilíbrio de Nash $(g^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$ deste jogo.
- Este equilíbrio é Pareto eficiente? Se não, então o bem público será sobre-fertado ou subofertado no equilíbrio?

Questão 8 Ao invés de simplesmente perguntar aos jogadores sua contribuição, o governo agora introduz um mecanismo de transferência de imposto $(\tau_i, T_i)_{i=1}^n$. Sob este mecanismo, a restrição orçamentária de cada jogador é dada por

$$x_i + \tau_i g = \bar{x}_i + T_i$$

Note que este mecanismo é factível apenas se

$$\sum_{i=1}^n \tau_i g = C(g) + \sum_{i=1}^n T_i$$

Dado que a equação é satisfeita, o governo pode escolher qualquer valor de $(\tau_i, T_i)_{i=1}^n$. Para alcançar eficiência de Pareto, o governo primeiro pergunta para cada indivíduo quanto de bem público eles demandariam para cada possível par (τ_i, T_i) de imposto e transferência. Em outras palavras, o governo pergunta aos jogadores para revelarem suas funções de demanda por bem público. Denote por $\bar{g}_i^d(\tau_i, T_i)$ a função de demanda reportada pelo jogador i .

Antes de perguntar, o governo anuncia que sua oferta de bem público e o sistema de imposto e transferência $(\tau_i, T_i)_{i=1}^n$ são determinadas baseada no perfil $\bar{g} := (\bar{g}_i^d)_{i=1}^n$ de funções de demanda reportadas de tal modo que

$$g(\bar{g}) := \bar{g}_i^d(\tau_i, T_i) \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

e que

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = C'(g(\bar{g}))$$

sejam ambas satisfeitas, assim como a restrição orçamentária do governo

$$\sum_{i=1}^n \tau_i g(\bar{g}) = C(g(\bar{g})) + \sum_{i=1}^n T_i$$

- Assumindo que os jogadores revelam verdadeiramente suas demandas, derive a função de demanda $\bar{g}_i^d(\tau_i, T_i)$.
- Compute a taxa de imposto $(\tau_i)_{i=1}^n$ que oferta o nível eficiente g^* de bem público.
- Os jogadores possuem incentivo para subreportar sua demanda por bem público? Se sim, o que te leva a pensar isso?

Questão 9 Considere ainda um outro mecanismo em que o governo pergunta aos jogadores para reportar suas funções valor $v_i : R_+ \rightarrow R$ (da Questão 6). Denote por $\bar{v}_i : R_+ \rightarrow R$ a função valor reportada pelo jogador i , que pode ser diferente de sua verdadeira função v_i . Antes de perguntar, o governo anuncia que sua oferta de bem público é determinada pelo perfil $\bar{b} := (\bar{v}_i)_{i=1}^n$ de função valor reportada pelos jogadores de tal modo que

$$g(\bar{v}) \in \arg \max_g \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i(g) - C(g) \right)$$

Ao mesmo tempo, o governo anuncia que, dado o perfil $\bar{b} := (\bar{v}_i)_{i=1}^n$ de função valor reportadas, os jogadores são obrigados a fazer uma contribuição $c_i(\bar{v})$ de acordo com

$$c_i(\bar{v}) := \max_g \left(\sum_{j \neq i} \bar{v}_j(g) - \frac{n-1}{n} C(g) \right) - \left(\sum_{j \neq i} \bar{v}_j(g(\bar{v})) - C(g(\bar{v})) \right)$$

- Este mecanismo é revelador de demanda? Se sim, explique.
- Compute o nível de bem público ofertada por esse mecanismo.
- O resultado sob esse mecanismo é Pareto eficiente?

Questão 10 Considere uma economia com dois consumidores idênticos, i e j , cada um com renda m . Suponha que eles consumem um bem privado, x , e um bem público, G , com preço de 1. Preferências podem ser representadas pelas funções de utilidade

$$u_i = x_i + \log(G) \quad \text{e} \quad u_j = x_j + \log(G)$$

- Calcule os níveis de provisão eficiente de G de Nash.

- b) Agora suponha que ao invés de gastar dinheiro diretamente com o bem público, G , cada indivíduo consome um bem privado e um tíquete de loteria, z_i (que também tem preço de 1). Um ganhador é escolhido aleatoriamente e a probabilidade de vencer para cada indivíduo é igual ao *share* de tíquetes de loteria que compram (e.g. a probabilidade de i ganhar é $(z_i / (z_i + z_j))$). O vencedor recebe uma quantia fixa R . Assim que o governo paga o prêmio advindo da receita da loteria, o resto é gasto no bem público, i.e. $G = z_i + z_j - R$. A função de *payoff* do indivíduo i é agora

$$u_i = x_i + \log(G) + \frac{z_i}{z_i + z_j} R$$

[Dica: Considere somente soluções simétrica, i.e. $z_i = z_j$].

- c) Qual quantidade de G é provida na pela loteria? Mostre que sua resposta coincide com a provisão de Nash se $R = 0$.
- d) Mostre que aumentando o prêmio monetário aumenta o nível de G provido pela loteria.

Questão 11 No planeta Tatooine, a Cooperativa dos Jawas produz droides que são vendidos para a Federação de Comércio, e, posteriormente, em outros planetas. Nenhum habitante de Tatooine compra droides da Cooperativa dos Jawas. O custo de produção de droides é zero. A demanda da Federação de Comércio é dada por:

$$x(p) = a - bp, \text{ em que } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Para cada droide produzido, também é produzida uma unidade de poluição, que afeta a utilidade dos habitantes de Tatooine negativamente. Suponha que Tatooine tenha dois tipos de habitantes: humanos e Tusken Raiders, em igual quantidade. As suas utilidades são dadas por:

$$u_H(s_H) = \varphi s_H^2$$

$$u_T(s_T) = -(1 - \varphi) s_T^2$$

em que s_i é o consumo de poluição por i e $0 < \varphi < 1$.

A poluição é um bem público puro, de modo que cada habitante sofre o efeito de toda a quantidade de poluição produzida em Tatooine, isto é, se s é a quantidade de poluição, $s_T = s_H = s$.

- a) Suponha que os direitos de propriedade não sejam bem definidos. Determine a quantidade de poluição, o lucro da Cooperativa dos Jawas e as utilidades de humanos e Tusken Raiders gerados no Equilíbrio Competitivo da economia. A alocação de Equilíbrio Competitivo é Eficiente de Pareto?
- b) Determine a poluição produzida numa alocação Pareto eficiente para a economia. Compare-a com a quantidade produzida em Equilíbrio Competitivo e comente.

- c) Suponha que os direitos sobre a poluição são propriedade dos habitantes de Tatooine, e que esses direitos possam ser transacionados em um mercado competitivo. Suponha também que humanos e Tuskan Raiders tenham as mesmas preferências, isto é, $\varphi = \frac{1}{2}$. Determine a quantidade de poluição, o lucro da Cooperativa dos Jawas e as utilidades de humanos e Tuskan Raiders gerados no novo Equilíbrio Competitivo da economia. Essa alocação é Eficiente de Pareto?
- d) Se, no item anterior, as preferências dos habitantes forem tais que $\varphi \neq \frac{1}{2}$, a alocação de Equilíbrio Competitivo com mercados para os direitos sobre poluição seria Eficiente de Pareto? Por quê?
- e) Suponha que os habitantes tenham preferências distintas, isto é, que $\varphi \neq \frac{1}{2}$, mas que a poluição seja um bem público excluível e existam mercados personalizados para cada habitante transacionar seus direitos sobre a poluição com a Cooperativa dos Jawas. Determine os preços individuais para os direitos de poluição e a quantidade de poluição produzida em um Equilíbrio de Lindahl.

Questão 12 Em uma economia com dois consumidores, eles possuem utilidade dada por

$$U^A = \rho^A \log(x_1^A) + x_2^A - \frac{1}{2} \log(x_1^B) \quad \text{e} \quad U^B = \rho^B \log(x_1^B) + x_2^B - \frac{1}{2} \log(x_1^A).$$

Ambos consumidores tem renda M e ambos bens tem preço 1. Mostre que o ótimo social pode ser descentralizado ao implementar uma taxa no bem 1 (de modo que o preço fique $1 + t^i$) com receita retornada igualmente para os consumidores como uma transferência T^i .

Questão 13 De n estudantes, cada i estuda por h_i horas, que envolve uma desutilidade de $\frac{h_i^2}{2}$. O benefício de estudar depende relativamente da performance $u\left(\frac{h_i}{\bar{h}}\right)$, onde $\bar{h} = \frac{1}{n}[h_i + H]$, $H = \sum h_{-i}$ e $u(\cdot)$ é crescente e côncava. Considere somente soluções simétricas.

- Encontre uma condição caracterizando o equilíbrio de Nash de horas estudadas.
- Calcule as horas de estudo socialmente ótimas.
- Explique a divergência entre suas respostas.