

NOME:

1. Indique para cada afirmativa abaixo se ela é verdadeira, V, ou falsa, F.
  - a. ( ) Quanto mais rígido for o material de uma estrutura maior será sua frequência natural
  - b. ( ) A frequência natural de uma estrutura depende da gravidade
  - c. ( ) Batimento é o resultado da soma de ondas de amplitudes similares e frequências iguais
  - d. ( ) Em sua operação ótima, um absorvedor dinâmico de vibrações deve estar sintonizado de modo que a frequência natural do sistema auxiliar deve coincidir com a frequência de excitação da estrutura principal.
  - e. ( ) A abertura da garrafa de vinho por impacto em seu fundo é facilitada pelo fato da rolha ser de cortiça, cujo coeficiente de Poisson é aproximadamente zero.
  - f. ( ) Vibração livre é aquela que ocorre quando um sistema é abandonado com deslocamento e velocidade iniciais iguais a zero
  - g. ( ) As frequências naturais, amortecidas e de máxima amplitude diferem entre si substancialmente em sistemas com baixo coeficiente de amortecimento
  - h. ( ) Para a solução de um problema de vibrações de vigas é necessário se conhecer as condições iniciais mas não as de contorno.
  - i. ( ) A defasagem entre entrada e saída de um sistema massa-mola vibrando é de 90 graus somente se o amortecimento for igual a zero.
  - j. ( ) Uma força de impacto aplicada a um sistema massa-mola pode ser representada por uma velocidade inicial.
2. Uma viga engastada [ $k = 3EI/L^3$ ] tem em seu extremo livre uma massa  $M$ . Uma massa menor  $m$  cai de uma altura  $H$  e impacta a massa maior, grudando-se nela. Considerando o sistema sem amortecimento, pede-se:
  - a. A condição inicial de deslocamento é  $x_0 = -mg/k$ . Explique como ela pode ser obtida e qual a razão do sinal negativo.
  - b. Qual a condição inicial de velocidade, se existente?
  - c. Qual a frequência natural do sistema após o impacto?
  - d. Qual a amplitude do movimento após o impacto?
  - e. Qual a fase do movimento após o impacto?
3. Uma locomotiva de massa  $m = 2000$  kg está a 36 km/h quando colide em um sistema de frenagem de segurança composto por uma mola de rigidez  $k = 80$  N/mm e amortecimento  $c = 20$  N.s/mm. Pede-se:
  - a. Qual a frequência natural do sistema?
  - b. Qual a frequência natural amortecida do sistema, se existente?
  - c. Qual é a amplitude máxima aproximada do deslocamento da locomotiva?
  - d. Em que tempo ocorre a amplitude máxima da locomotiva?
4. Uma massa de peso 50 N e suspensa verticalmente por uma mola de constante  $k = 4000$  N/m é sujeita a uma força harmônica de amplitude de 60 N e frequência de 6 Hz. Pergunta-se:
  - a. Qual a extensão da mola devido à massa?
  - b. Qual a extensão da mola devido à força máxima?
  - c. Qual a amplitude forçada deste movimento?

FÓRMULAS

$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$ $A = \left[ x_0^2 + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$ $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right)$	$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$ $\zeta = c/c_c \quad \omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$	$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \sin \omega_n t$ $+ \left( \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t$
$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$		$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\delta_{st}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$ $\delta_{st} = F_0/k \quad \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$
$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\}$		

Prova de Sistemas Dinâmicos II – Parte III:

VIBRAÇÕES : GABARITO

1. Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras, V, ou falsas, F.
  - a. ( F ) Quanto mais rígido for o material de uma estrutura maior serão suas frequências naturais
  - b. ( F ) A frequência natural de uma estrutura depende da gravidade
  - c. ( F ) Batimento é o resultado da soma de ondas de amplitudes similares e frequências iguais
  - d. ( V ) Em sua operação ótima, um absorvedor dinâmico de vibrações deve estar sintonizado de modo que a frequência natural do sistema auxiliar deve coincidir com a frequência de excitação da estrutura principal.
  - e. ( V ) A abertura da garrafa de vinho por impacto em seu fundo é facilitada pelo fato da rolha ser de cortiça, cujo coeficiente de Poisson é aproximadamente zero.
  - f. ( F ) Vibração livre é aquela que ocorre quando um sistema é abandonado com deslocamento e velocidade iniciais iguais a zero
  - g. ( F ) As frequências naturais, amortecidas e de máxima amplitude diferem entre si substancialmente em sistemas com baixo coeficiente de amortecimento
  - h. ( F ) Para a solução de um problema de vibrações de vigas é necessário se conhecer as condições iniciais mas não as de contorno.
  - i. ( F ) A defasagem entre entrada e saída de um sistema massa-mola vibrando é de 90 graus somente se o amortecimento for igual a zero.
  - j. ( V ) Uma força de impacto aplicada a um sistema massa-mola pode ser representada por uma velocidade inicial.
2. Uma viga engastada tem em seu extremo livre uma massa  $M$ . Uma massa menor  $m$  cai de uma altura  $H$  e impacta a massa maior, grudando-se nela. Pede-se:
  - a. Qual a condição inicial de deslocamento, se existente?

$$x_0 = -\frac{mg}{k},$$

- b. Qual a condição inicial de velocidade, se existente?

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{m}{M+m}\right)\sqrt{2gh}$$

- c. Qual a frequência natural do sistema após o impacto?

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{3EI}{l^3(M+m)}}$$

- d. Qual a amplitude do movimento após o impacto?

$$A = \left[ x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}$$

- e. Qual a fase do movimento após o impacto?

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right)$$

3. Uma locomotiva de massa  $m = 2000$  kg está a 36 km/h quando colide em um sistema de frenagem de segurança composto por uma mola de rigidez  $k = 80$  N/mm e amortecimento  $c = 20$  N.s/mm. Pede-se:

- Qual a frequência natural do sistema?
- Qual a frequência natural amortecida do sistema, se existente?
- Qual é a amplitude máxima do deslocamento da locomotiva?
- Em que tempo ocorre a amplitude máxima da locomotiva?

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40000}{2000}} = 4.4721 \text{ rad/sec}$$

$$c_c = 2\sqrt{km} = 25,298.221 \text{ N-sec/m}$$

$$\gamma = c/c_c = 0.7906$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2} = 4.4721 \sqrt{1 - (0.7906)^2} = 2.7384 \text{ rad/sec}$$

$$\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2.2945 \text{ sec}$$

(a) For  $x_0 = 0$  and  $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/sec}$ , Eq. (2.72) gives

$$x(t) = e^{-\gamma\omega_n t} \frac{\dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1 - \gamma^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2} t$$

$$\text{At } x_{\max}, \omega_n t \approx \frac{\pi}{2} \text{ and } \sin \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2} t \approx 1$$

$$\therefore x_{\max} \approx e^{-0.7906(\pi/2)} \cdot \left(\frac{10}{2.7384}\right) \cdot (1) = 1.0548 \text{ m}$$

$$(b) t = \tau_d/4 = 2.2945/4 = 0.5736 \text{ sec.}$$

4. Uma massa de peso 50 N e suspensa por uma mola de constante  $k = 4000 \text{ N/m}$  é sujeita a uma força harmônica de amplitude de 60 N e frequência de 6 Hz. Pergunta-se:

- Qual a extensão da mola devido à massa?
- Qual a extensão da mola devido à força máxima?
- Qual a amplitude forçada deste movimento?

$$(a) \delta = \frac{W}{k} = \frac{50}{4000} = 0.0125 \text{ m}$$

$$(b) \delta_{st} = \frac{F_0}{k} = \frac{60}{4000} = 0.015 \text{ m}$$

$$(c) \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \left(\frac{4000 \times 9.81}{50}\right)^{1/2} = 28.0143 \text{ rad/sec}$$

$$\omega = 6 \text{ Hz} = 37.6992 \text{ rad/sec}$$

$$X = \delta_{st} \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = 0.015 \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{37.6992}{28.0143}\right)^2} \right| = 0.0185 \text{ m}$$