Teoremas de Otimização com Restrições de Desigualdade

MAXIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Considere o seguinte problema (**P1**) de maximização condicionada:

Maximize $F(x)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$

Sujeito a $g(x) \leq b$

As condições de **Primeira Ordem** (ou as condições necessárias) são estabelecidas no teorema a seguir.

Teorema 1: Sejam F(x) e g(x) funções contínuas e diferenciáveis, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$. Suponha que $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ é uma solução do problema **P1** acima. Suponha também que se em x^* a restrição é efetiva $(g(x^*) = b)$, então $\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_i} \neq 0$, para todo i = 1, 2, ..., N.

Então para a função lagrange $L(x,\lambda) = F(x) - \lambda[g(x) - b]$, existe um número real λ^*, tal que, junto com o $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$, satisfazem as seguintes condições:

(a) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0$ para todo i = 1, 2, ..., N

(b) $\dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -g(x^*) + b \geq 0$

(c) $\lambda^* \geq 0$

(d) $\lambda^* . \dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \lambda^* \left(-g(x^*) + b\right) = 0$

No caso das condições de **<u>Segunda Ordem</u>**, quando o problema de maximização envolve uma restrição de desigualdade, é necessário considerar o seguinte aspecto.

Se na solução x^* a restrição for efetiva $\left(g(x^*) = b\right)$, então o problema poderia ter sido resolvido maximizando-se F(x) sujeito à restrição de igualdade g(x) = b.

Portanto, nesse caso vale o Teorema já visto que especifica as condições de segunda ordem desse tipo de problema.

Por outro lado, se na solução x^* a restrição não for efetiva $\left(g(x^*) < b\right)$, então o problema poderia ter sido resolvido maximizando-se F(x), sem nenhum tipo de restrição sobre os valores das variáveis de controle **x**.

Então, as condições de segunda ordem desse caso são exatamente as mesmas do problema de maximização não condicionada de F(x).

Resumindo-se, pode-se estabelecer as seguintes **<u>Condições de Segunda Ordem</u>** para o problema **P1** acima:

Suponha que $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ e λ^* atendem as condições de primeira ordem especificadas no Teorema 1 acima. Para os mesmos considere as seguintes duas únicas alternativas:

1. <u>A Restrição é Efetiva</u>: $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -g(x^*) + b = 0$ ou $g(x^*) = b$. Nesse Caso, se também a Matriz Hessiana Orlada

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_N} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

calculada no ponto (x^*, λ^*), é tal que os seus k-ésimos menores principais alternam de valor da seguinte forma: $|\bar{H}_2| < 0$, $|\bar{H}_3| > 0$, $|\bar{H}_4| < 0$, etc, então $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ é um ponto de **<u>Máximo Local Estrito</u>** do problema **P1.**

2. <u>A Restrição não é Efetiva</u>: $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -g(x^*) + b > 0$ ou $g(x^*) < b$. Nesse caso, se também a Matriz Hessiana calculada no ponto (x^*)

$$H = D^2F(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

for **Definida Negativa**, então $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ é um ponto de **<u>Máximo Local Estrito</u>** do problema **P1.**

Exemplo:

Maximize $F(x,y) = x.y$

Sujeito a $x^2 + y^2 \leq 1$

Definindo-se a função Lagrange $L(x,y,\lambda) = x.y - \lambda\left[x^2 + y^2 - 1\right]$, temos as seguintes condições:

(1) $$\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial x} = y^* - 2\lambda^* x^* = 0$$

(2) $$\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial y} = x^* - 2\lambda^* y^* = 0$$

(3) $$\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} = -(x^*)^2 - (y^*)^2 + 1 \geq 0$$

(4) $$\lambda^* \geq 0$$

(5) $$\lambda^* . \frac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} = \lambda^*\left[-(x^*)^2 - (y^*)^2 + 1\right] = 0$$

Para resolver esse sistema, podemos considerar inicialmente que a solução trivial $(x^* = 0;\ y^* = 0;\ \lambda^* = 0)$ satisfaz essas 5 condições.

Suponha agora que $x^* \neq 0$ e $y^* \neq 0$. Então de (1) e (2) temos que:

$\frac{y^*}{2x^*} = \lambda^* = \frac{x^*}{2y^*}$ ou que $(y^*)^2 = (x^*)^2$ e que $\lambda^* \neq 0$

Então de (5) temos que $(y^*)^2 + (x^*)^2 = 1$ ou que $2(x^*)^2 = 1$

$x^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\lambda^* = \pm\frac{1}{2}$

Mas de (4) temos que é necessário que $\lambda^* \geq 0$. Portanto, necessariamente

$\lambda^* = \frac{1}{2}$, ou seja, necessariamente x* = y*

Temos então aos seguintes 3 pontos candidatos a solução do problema:

$P1 = (0,0,0)$; $P2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$; $P3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$;

Para avaliar as condições de 2ª ordem, temos as seguintes derivadas:

$L_{xx} = -2\lambda\,;\;\; L_{yy} = -2\lambda\,;\;\; L_{xy} = L_{yx} = 1;\;\;\; g_x = 2x\,;\;\;\; g_y = 2y$

$F_{xx} = 0\,;\;\; F_{yy} = 0;\;\; F_{xy} = F_{yx} = 1$

Como no ponto P1 a restrição não é efetiva, devemos analisar

$$H = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$, que é indefinido.

Como nos demais 4 pontos a restrição é efetiva, devemos analisar

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

E como N = 2 e M = 1, basta apenas examinar o sinal de $|\bar{H}|$:

$|\bar{H}(P2)| = 8$ é definida negativa

$|\bar{H}(P3)| = 8$ é definida negativa

Conclusão: $P2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ e $P3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ são soluções do problema.

MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE

Considere agora o problema de minimização condicionada:

Minimize $F(x)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$

Sujeito a $g(x) \leq b$

Com uma simples adaptação desse problema, podemos resolve-lo como um problema de maximização condicionada:

Maximize $G(x) = -F(x)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$

Sujeito a $g(x) \leq b$

Portanto, um problema típico de minimização com restrição de desigualdade necessita ser formulado como o seguinte problema (**P2**):

Minimize $F(x)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$

Sujeito a $g(x) \geq b$

Definindo da mesma forma a função Lagrange $L(x,\lambda) = F(x) - \lambda\left[g(x) - b\right]$, tem-se agora as seguintes **condições de 1ª ordem**:

(a) $$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{para todo i = 1, 2, ..., N}$$

(b) $$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -g(x^*) + b \leq 0$$

(c) $$\lambda^* \geq 0$$

(d) $$\lambda^* . \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \lambda^*\left(-g(x^*) + b\right) = 0$$

No caso das condições de **2ª ordem**, para os pontos x* onde a restrição não é efetiva, necessitamos que a Matriz Hessiana da função F(x) seja Definida Positiva. Para os pontos x* onde a restrição é efetiva, necessitamos que a Matriz Hessiana Orlada da função de Lagrange $L(x,\lambda)$ também seja Definida Positiva.

CASO GERAL DE MAXIMIZAÇÃO COM VÁRIAS EQUAÇÕES DE RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

Considere o seguinte problema (**P2**) de maximização condicionada:

$$\text{Maximize} \quad F(x) \qquad \text{onde} \quad x=(x_1,x_2,\dots,x_N)\in R^N$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a} \quad & g_1(x)\le b_1 \\ & g_2(x)\le b_2 \\ & \vdots \\ & g_K(x)\le b_K \end{aligned}$$

As condições de **Primeira Ordem** (ou as condições necessárias) para a solução desse problema são estabelecidas no teorema a seguir.

Teorema 2: Sejam F(x) , $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_K(x)$ funções contínuas e diferenciáveis, onde $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)\in R^N$. Suponha que $x^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_N^*)$ é uma solução do problema **P3** acima. Suponha também que no ponto x^*, K_0 equações de restrições são efetivas $\left(g_i(x^*)=b_i\right)$ e as demais $(K-K_0)$ restrições não são efetivas $\left(g_j(x^*)<b_j\right)$. Para simplificar a notação, suponha que são as primeiras K_0 equações de restrições que são as efetivas e suponha que em relação a esse sub-conjunto de equações vale a Qualificação de Restrições Não Degeneradas (QRND), ou seja, a matriz jacobiana

$$Dg(x^*)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_N} \\ \dfrac{\partial g_2(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2(x^*)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{K_0}(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_{K_0}(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_{K_0}(x^*)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

tem Posto ou *Rank* igual a K_0

Então, para a função lagrangeana

$$L(x,\lambda) = F(x) - \lambda_1[g_1(x) - b_1] - \lambda_2[g_2(x) - b_2] - .... - \lambda_K[g_K(x) - b_K]$$

ou

$$L(x,\lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i [g_i(x) - b_i]$$

existem os multiplicadores $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_K^*)$, tal que para $(x^*, \lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_K^*)$ valem as seguintes condições:

(a) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0$ para todo i = 1, 2, ..., N

(b) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = -g_i(x^*) + b_i \geq 0$ para todo i = 1, 2, ..., K

(c) $\lambda_i^* \geq 0$ para todo i = 1, 2, ..., K

(d) $\lambda_i^* . \dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = \lambda_i^* \left(-g_i(x^*) + b_i\right) = 0$ para todo i = 1, 2, ..., K

No caso das condições de **Segunda Ordem** (as condições suficientes) para a solução do problema **P3** acima, as mesmas são estabelecidas através do teorema a seguir.:

Teorema 3: Sejam F(x) , $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_K(x)$ funções contínuas e diferenciáveis, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$. Considere em relação a essas funções o problema de otimização **P3** acima especificado.

Defina a função Lagrangeana $L(x,\lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^{K} \lambda_i [g_i(x) - b_i]$ e suponha que:

a) Existem $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ e $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_K^*)$ que satisfazem as condições do Teorema 2 acima, ou seja, que:

(a.1) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = 0$ para todo i = 1, 2, ..., N

(a.2) $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = -g_i(x^*) + b_i \geq 0$ para todo i = 1, 2, ..., K

(a.3) $\lambda_i^* \geq 0$ para todo i = 1, 2, ..., K

(a .4) $\lambda_i^* . \dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i} = \lambda_i^* \left(-g_i(x^*) + b_i\right) = 0$ para todo i = 1, 2, .., K

b) Que para o mesmo $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$, K_0 equações de restrições são efetivas (para simplificar a notação, suponha que estas são exatamente as primeiras K_0 equações) e as demais $\left(K - K_0\right)$ restrições não são efetivas, sendo que a Matriz Hessiana Orlada (envolvendo apenas as restrições efetivas)

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_{K_0}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_{K_0}}{\partial x_N} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_{K_0}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N} & \cdots & \dfrac{\partial g_{K_0}}{\partial x_N} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

calculada no ponto $\left(x^*, \lambda^*\right)$, é tal que os valores dos seus últimos $\left(N - K_0\right)$ k-ésimos menores principais alternam em sinal, sendo que o sinal do último $\left(\left|\overline{H}_{N+K_0}\right|\right)$ é igual ao sinal de $\left(-1\right)^N$;

Então $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$ é um ponto de **Máximo Local Estrito** do problema **P3.**

Exemplo: Maximizar $U = x_1 x_2 + 80x_2$

sujeito a $2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Condições de **1ª Ordem** da Solução:

$$L = x_1 x_2 + 80x_2 - \lambda_1\left(2x_1 + x_2 - 100\right) - \lambda_2\left(-x_1\right) - \lambda_3\left(-x_2\right)$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 80 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$

3) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$

4) $100 - 2x_1 - x_2 \geq 0$

5) $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

6) $\lambda_1\left(2x_1 + x_2 - 100\right) = 0$

7) $\lambda_2 x_1 = 0$ e $\lambda_3 x_2 = 0$

<u>1ª Possibilidade</u>: Solução Interna $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$

De (7), devemos ter que $\lambda_2^* = 0$ e $\lambda_3^* = 0$. Portanto, de (1) e (2), temos que $x_2^* = 2\lambda_1^*$ e $x_1^* + 80 = \lambda_1^*$ ou que $2x_1^* + 160 = x_2^*$ e $\lambda_1^* > 0$.

Por outro lado, de (6) temos que $2x_1^* + x_2^* = 100$ ou $x_2^* = 100 - 2x_1^*$

Mas esses dois resultados implicam que $2x_1^* + 160 = 100 - 2x_1^*$ ou que $x_1^* = -15$. Mas isso viola a condição (5).

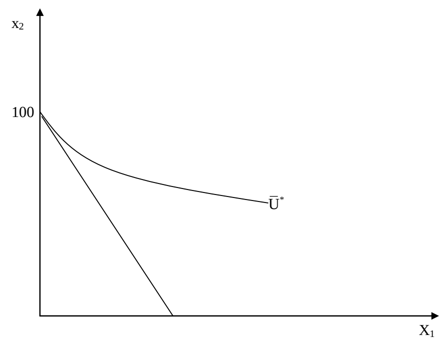
<u>2ª Possibilidade</u>: Solução de Canto: $x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$

De (7) temos que $\lambda_2^* = 0$ e de (1) que $x_2^* = 2\lambda_1^*$ ou que $\lambda_1^* = 0$. Isso, junto com (2) e (3) implicam que $-x_1^* - 80 = \lambda_3^* \geq 0$ ou que $x_1^* \leq -80$. Mas isso viola (5).

<u>3ª Possibilidade</u>: Solução de Canto: $x_1^* = 0$ e $x_2^* > 0$

De (7) temos que $\lambda_3^* = 0$ e de (2) que $80 = \lambda_1^*$. Isso, junto com (6) implica que $x_2^* - 100 = 0$ ou $x_2^* = 100$. Finalmente, de (1), tem-se que $100 - 2.80 + \lambda_2^* = 0$ ou $\lambda_2^* = 60$. Portanto, a **cesta (0, 100)** é candidata a ser a de equilíbrio do consumidor.

OBS.: Nessa cesta, a $|TMS| = \frac{U_1'}{U_2'} = \frac{x_2^*}{x_1^* + 80} = \frac{100}{80} < \frac{P_1}{P_2} = 2$



Fim