



TRANSFORMADA DE FOURIER

Larissa Driemeier

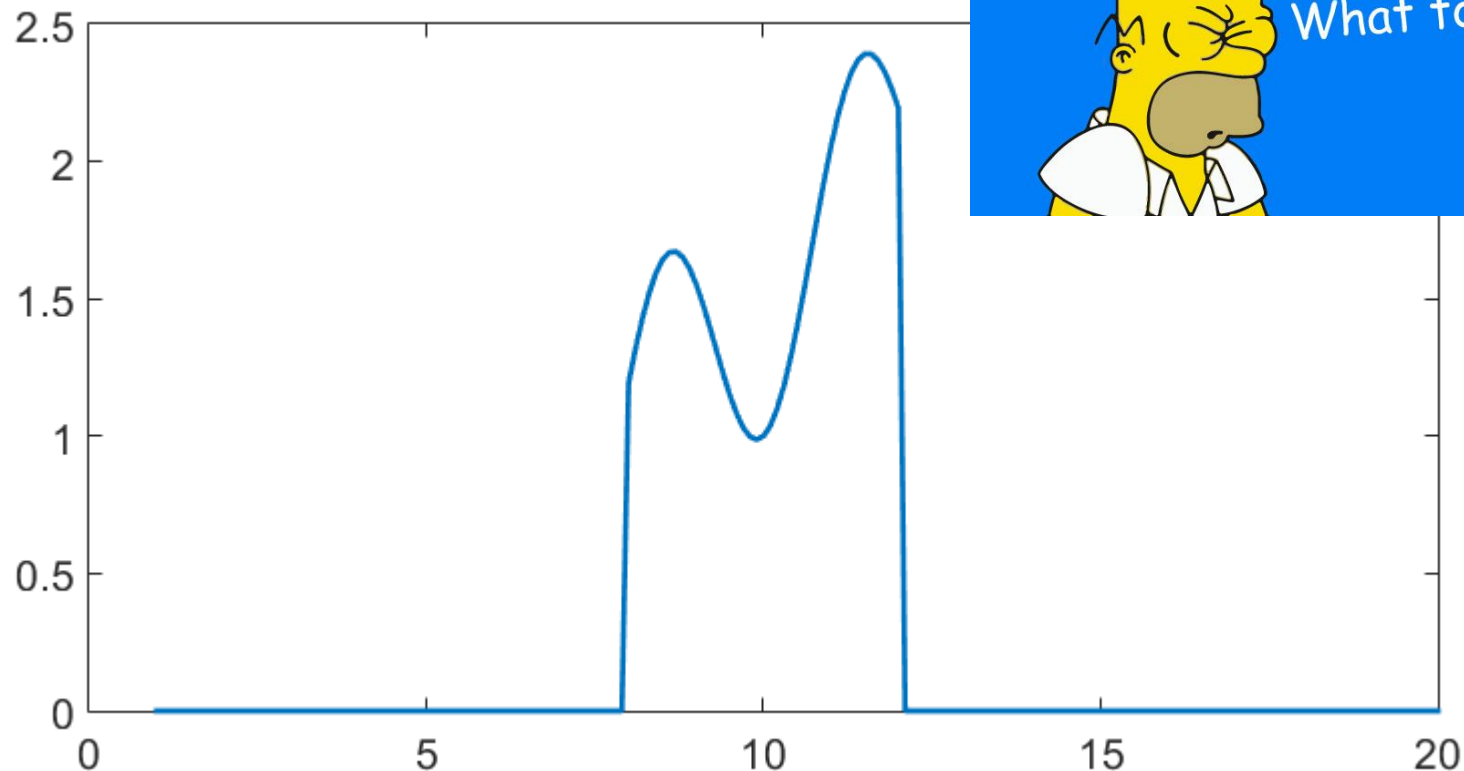


7hs30 à 8hs00

Este não é um sinal periódico.

Queremos calcular seu espectro usando análise de Fourier, mas aprendemos que o sinal deve ser periódico.

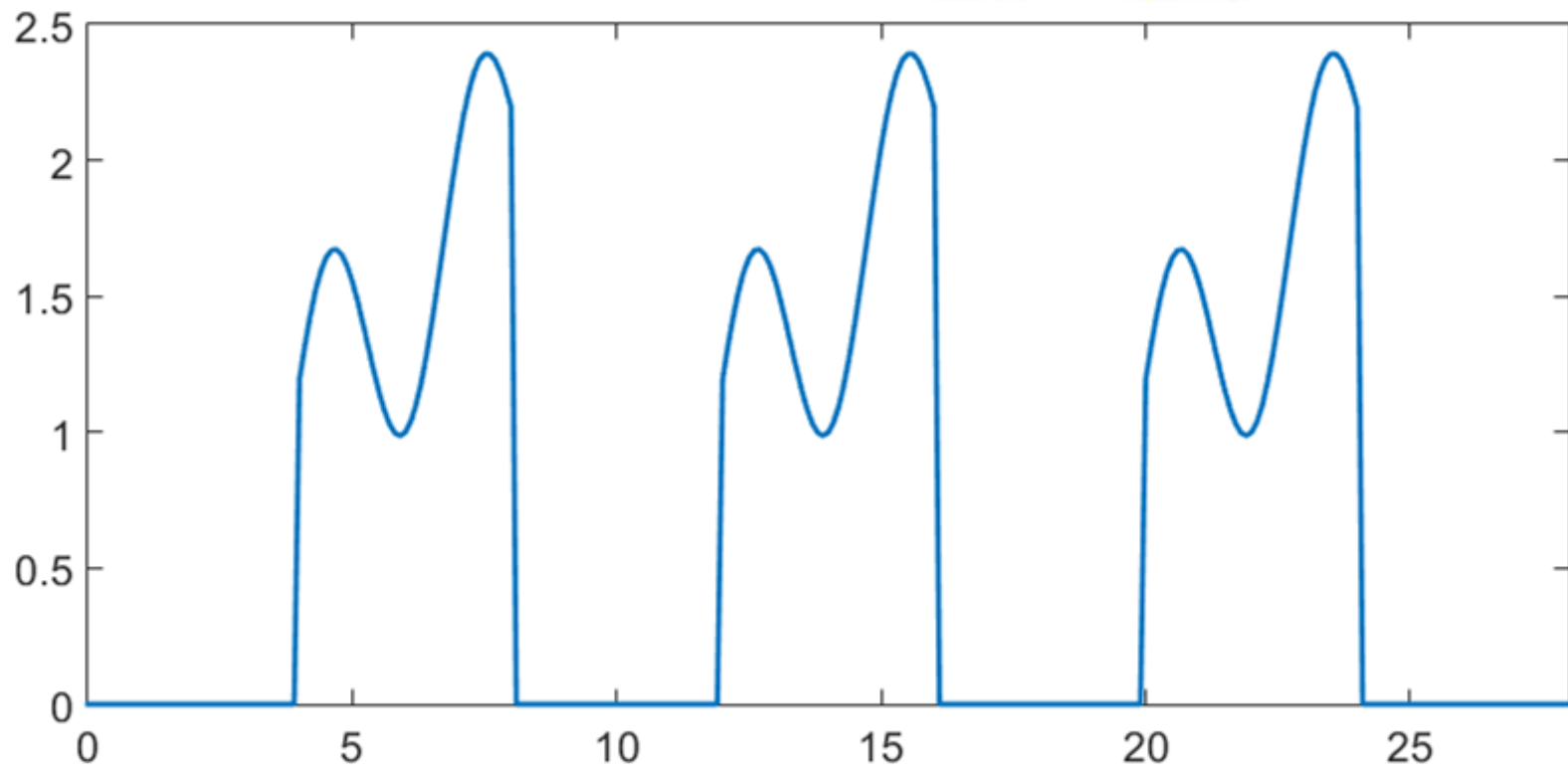
○ que fazer?

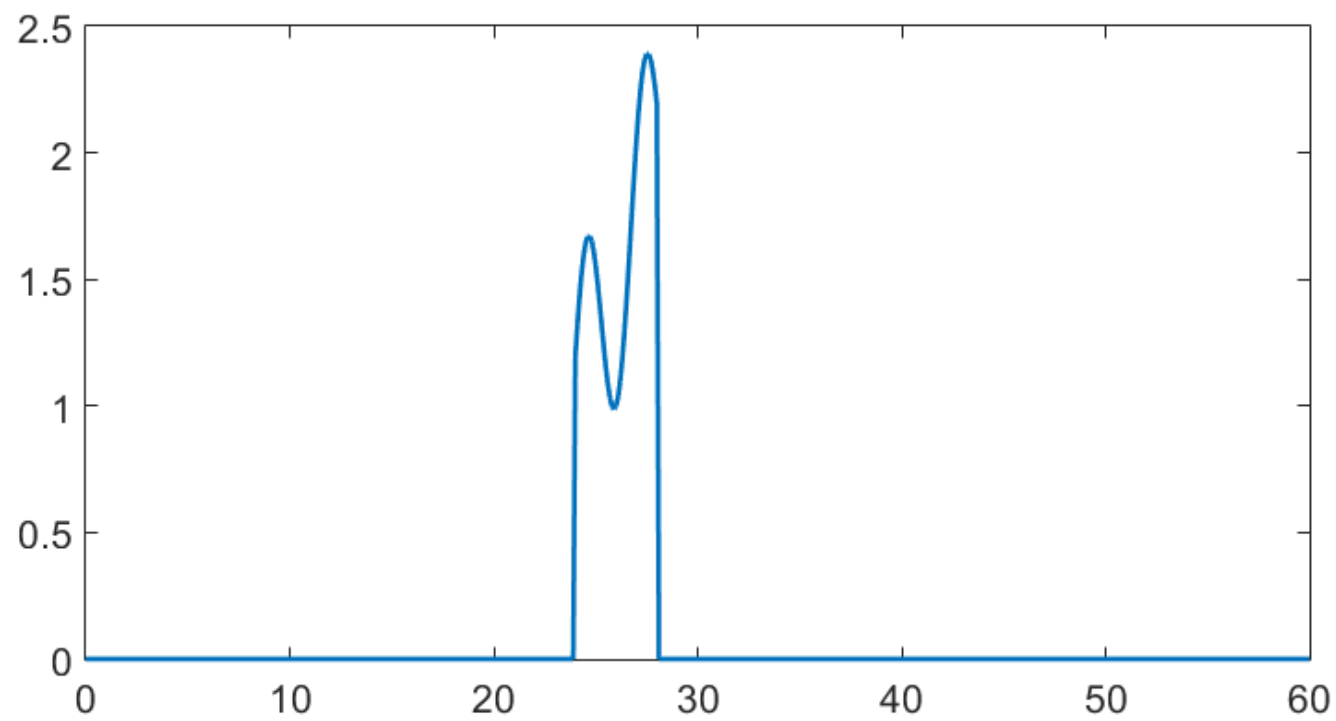
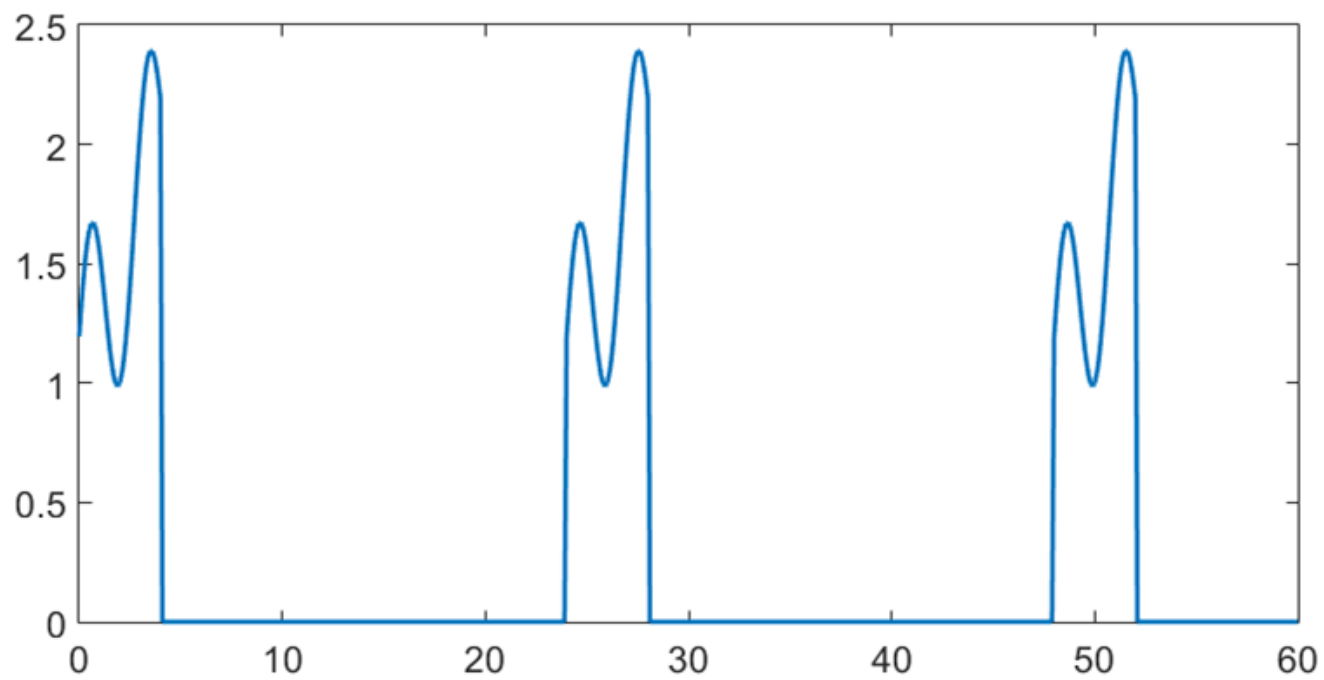


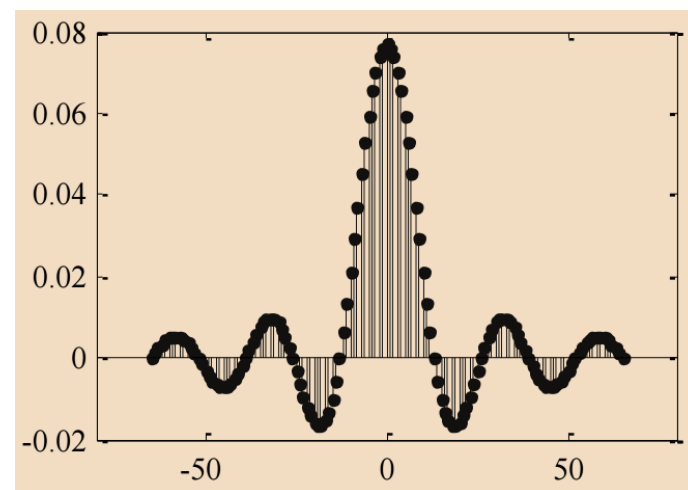
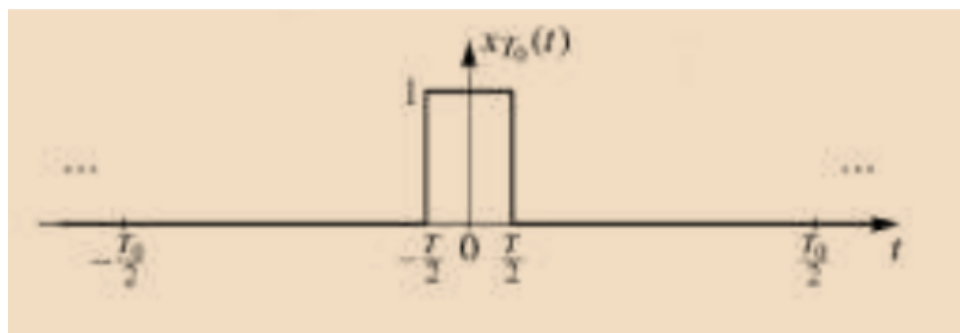
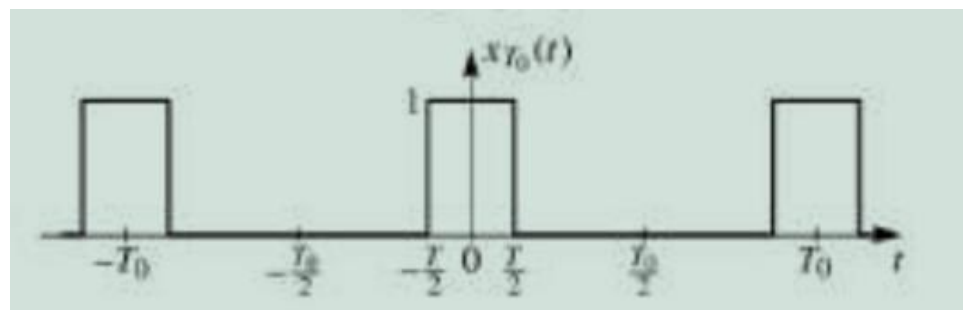
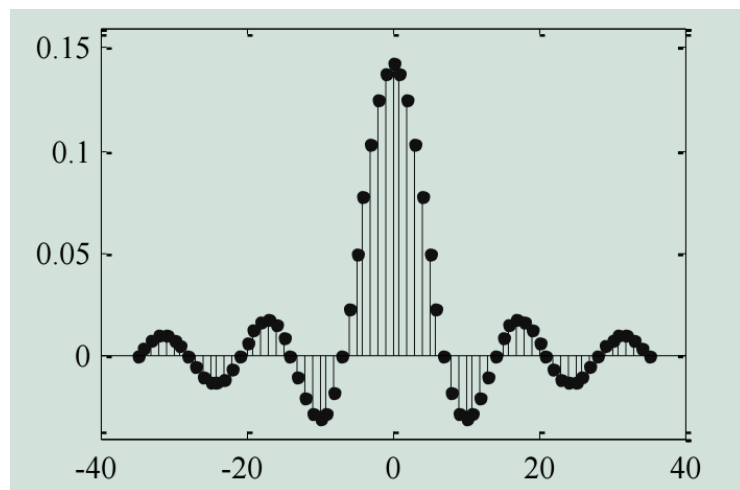
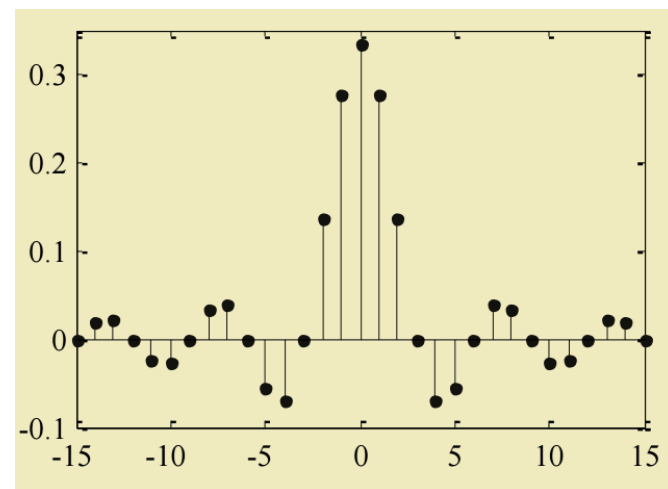
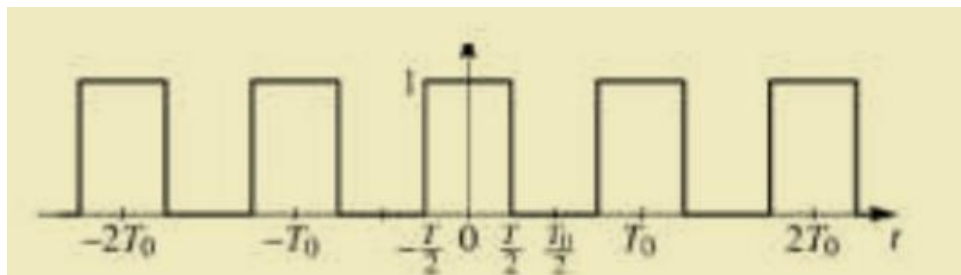


Assim eu resolvo...

Mas não é o mesmo sinal...





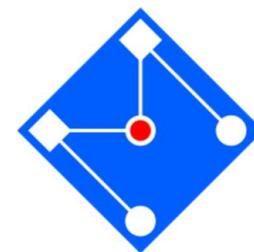


Um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito.

$$X[n] = \frac{1}{T} \int x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

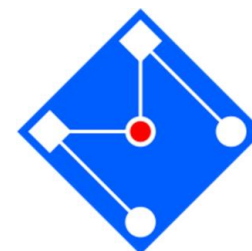
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt e^{jn\omega_0 t}$$



$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$



$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt e^{jn\omega_0 t}$$

Se $T \rightarrow \infty$, o somatório $\rightarrow$ integral,
 $n\omega_0 \rightarrow \omega$, $1/T \rightarrow d\omega/2\pi$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt e^{j\omega t} d\omega$$



TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$, simbolizada por

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

permite expressar o sinal $x(t)$ não periódico, como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$



A TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

FT



Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



MAGNITUDE E FASE

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)}$$

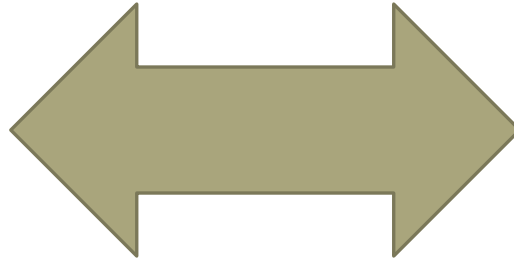
Amplitude
(magnitude) do
espectro

Fase do espectro

Amplitude é uma função par e fase é uma função ímpar!

Um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito.

$$T \rightarrow \infty \text{ e } \frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \text{ e } n\omega_0 \rightarrow \omega$$



Síntese

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{jn\omega_0 t}$$

Síntese

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Análise

$$X[n] = \frac{1}{T} \int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

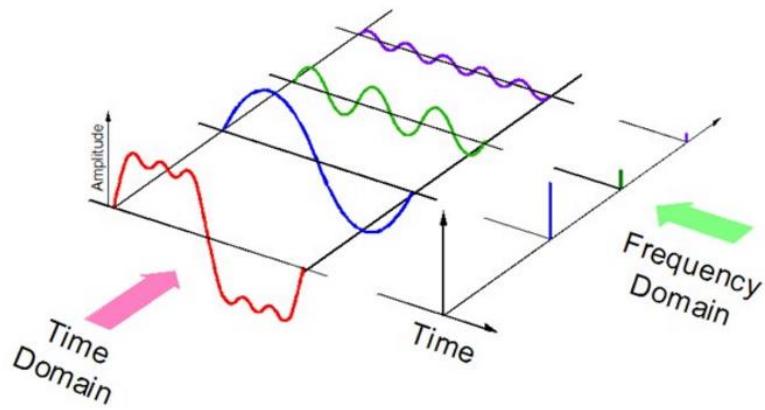
Análise

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

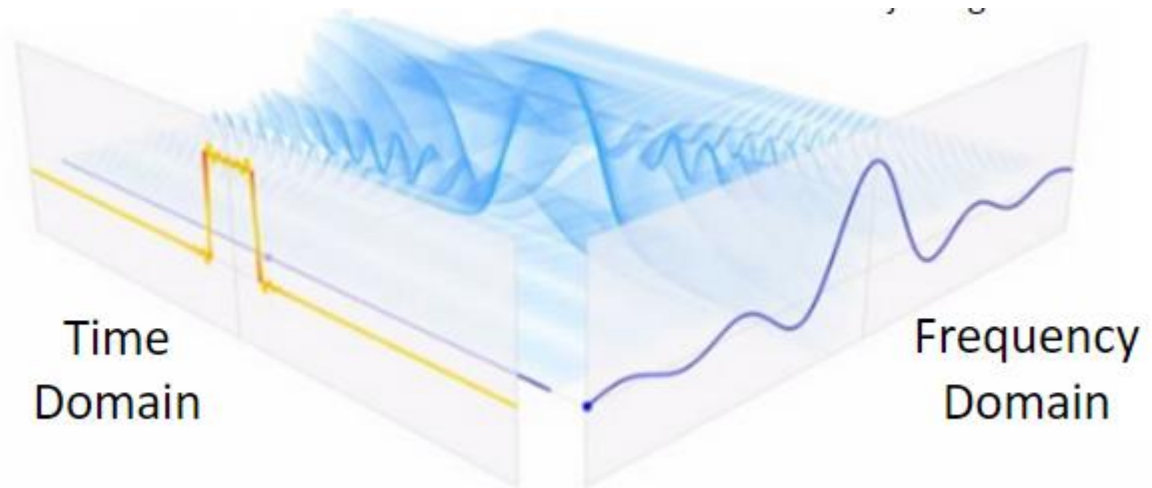
Harmônicos $X[n]$ distanciados
 $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Valores contínuos $X(\omega)$

FS



FT



EXEMPLO 1



Calcular a transformada da função:

$$x(t) = e^{-at}u_1(t), a > 0$$

```
t=0:0.001:10;  
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]  
    x=exp(-a.*t);  
    plot(t,x);  
    hold on  
end  
legend('a=0.5', 'a=1.0',  
       'a=1.5', 'a=2.0')  
hold off
```

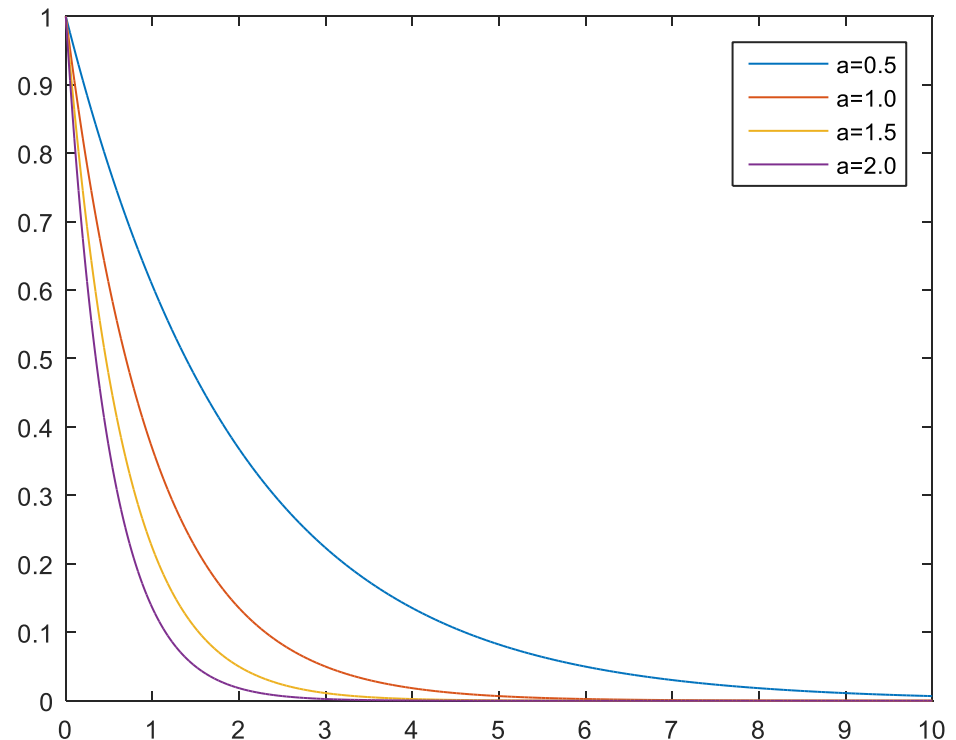
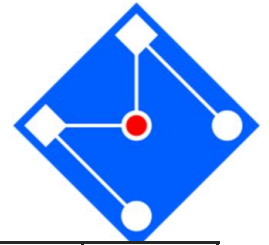


DIAGRAMA DE MÓDULO



```
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]
    w=-2:0.01:2;
    aux=ones(1,length(w)).*a;
    x=1./(aux.^2+w.^2);
    plot(w,x);
    hold on
end
legend('a=0.5', 'a=1.0',
       'a=1.5', 'a=2.0')
hold off
```

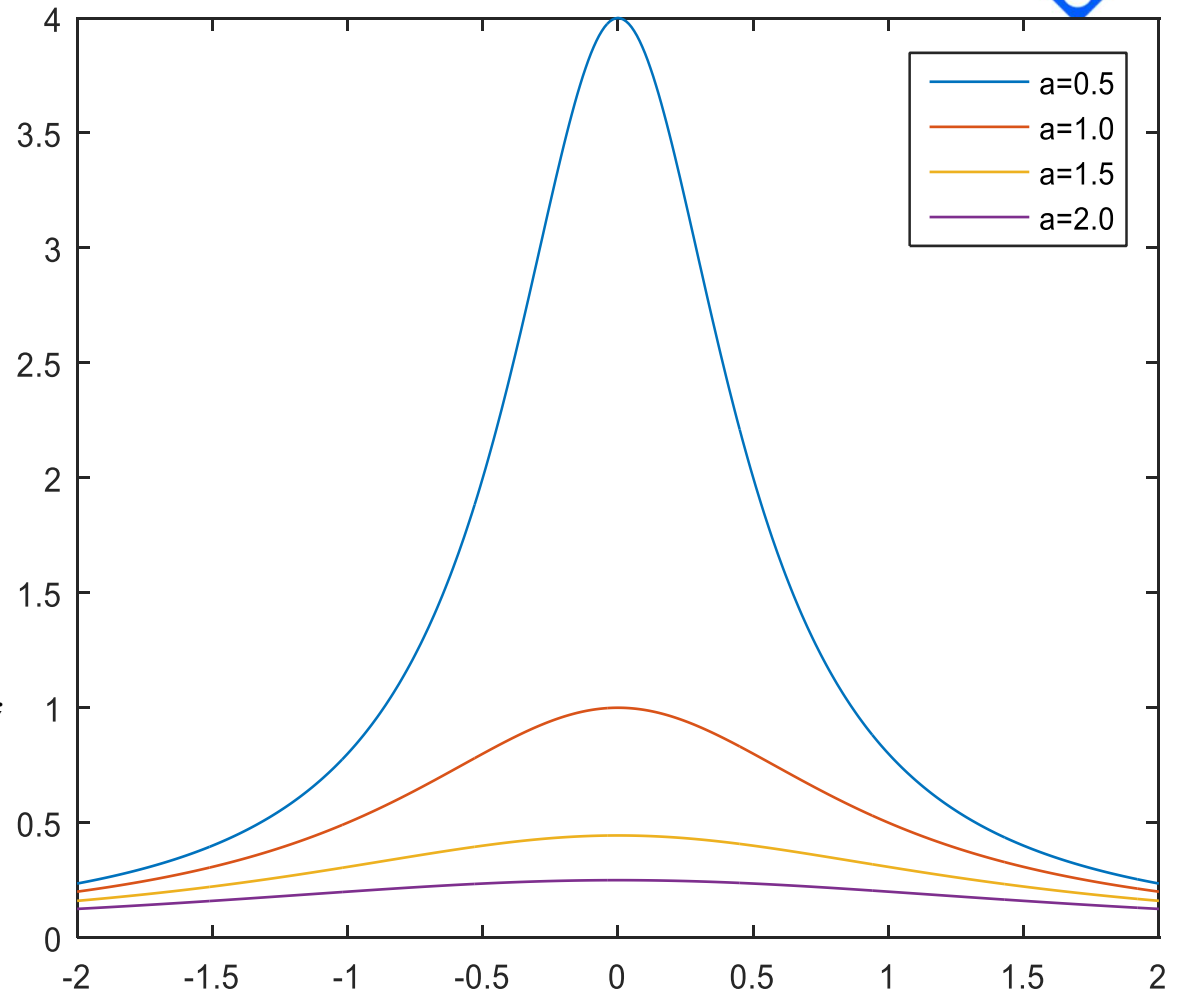
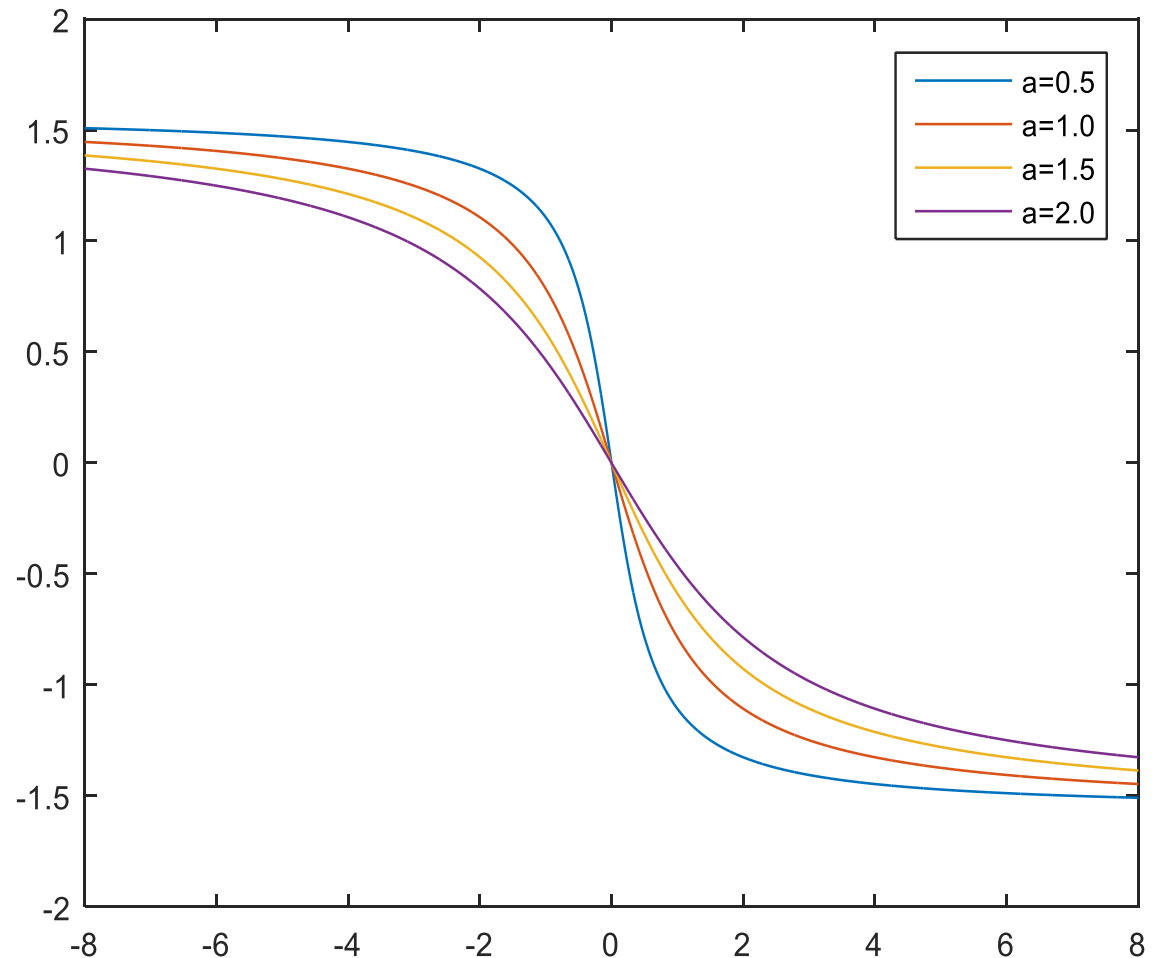
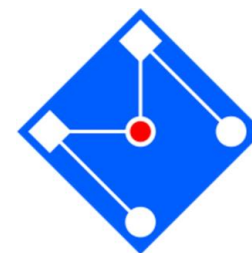


DIAGRAMA DE FASE



```
for a=[0.5 1.0 1.5 2.0]
    w=-8:0.01:8;
    aux=ones(1,length(w)).*a;
    x=-atan(w./aux);
    plot(w,x);
    hold on
end
legend('a=0.5', 'a=1.0',
        'a=1.5', 'a=2.0')
hold off
```



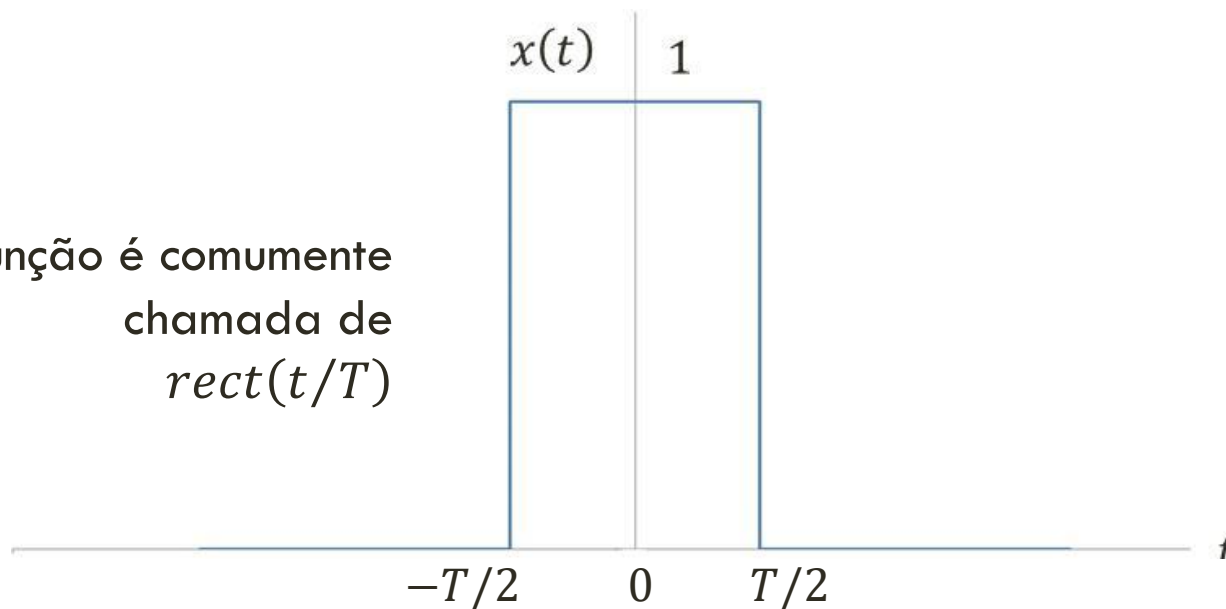


EXEMPLO 2

Calcular a transformada da função pulso retangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

Essa função é comumente
chamada de
 $rect(t/T)$



$$X(\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T \operatorname{sinc}(\omega T/2)$$

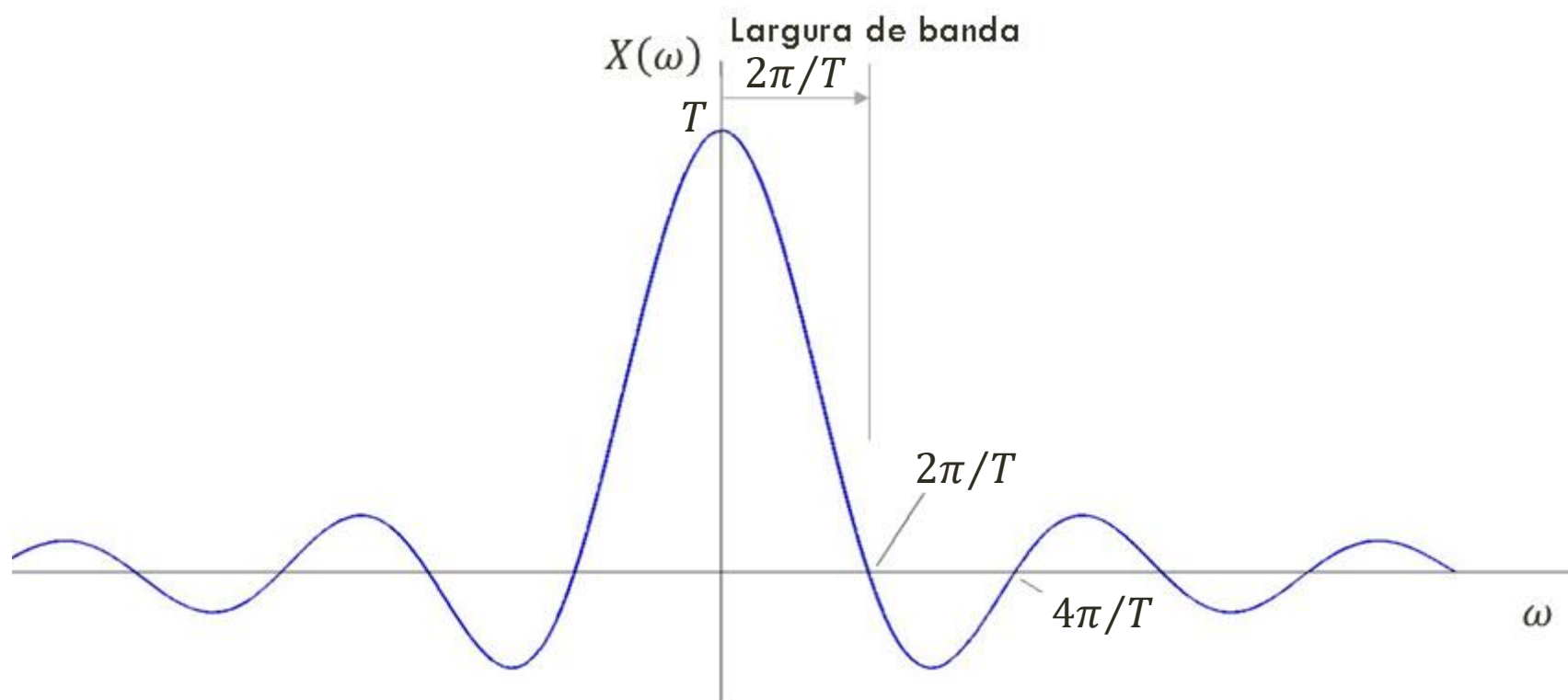
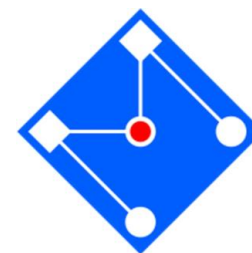


Diagrama de módulo

(Só tem parte real...)

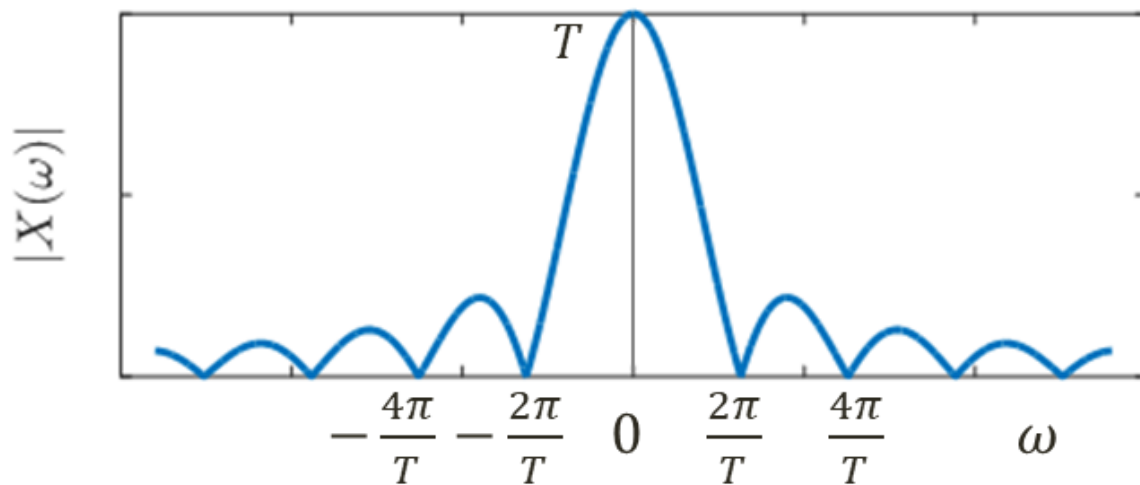
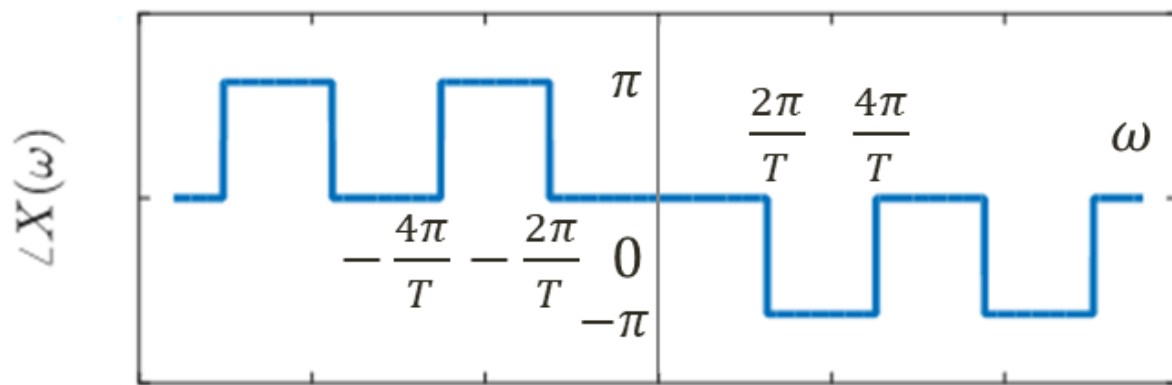


Diagrama de fase

$$\text{Para } \omega > 0: \quad \angle X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } X(\omega) > 0 \\ -\pi & \text{se } X(\omega) < 0 \end{cases}$$

(lembre-se que a função é ímpar)



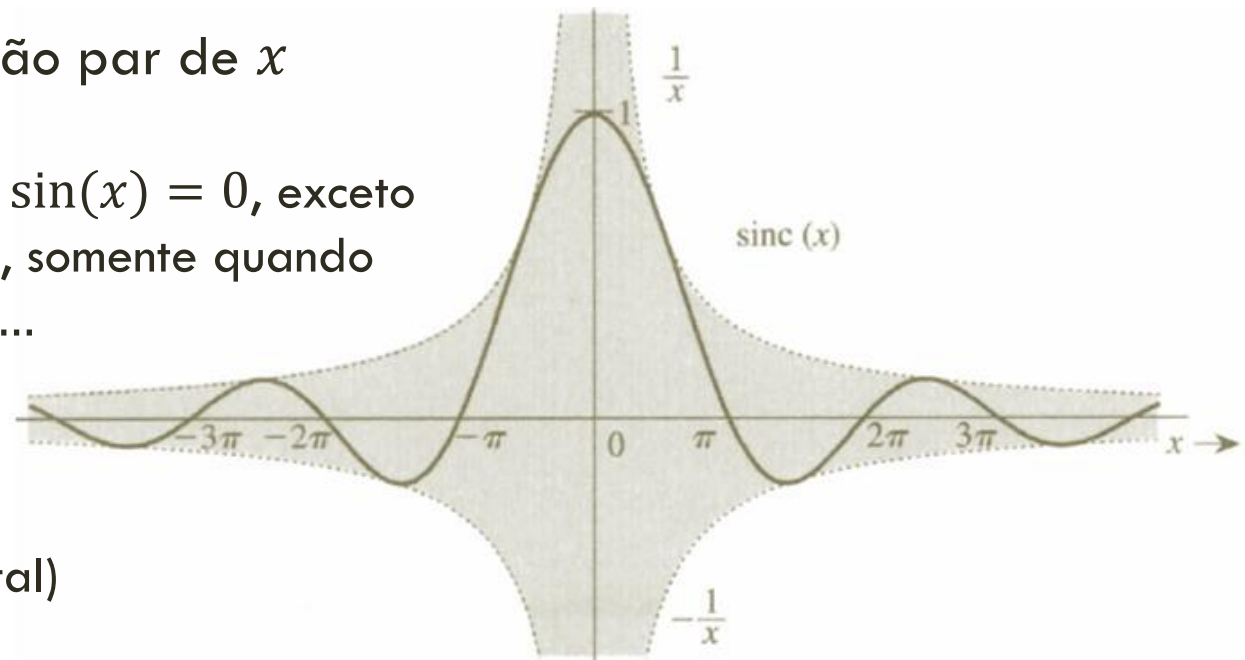


AFINAL, O QUE É A FUNÇÃO SINC?

$\text{sinc}(x)$ é o produto de um sinal de oscilação $\sin(x)$ pela função decrescente $1/x$. Por isso, é um amortecimento da oscilação com período 2π e amplitude decrescente $1/x$

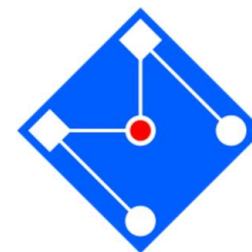
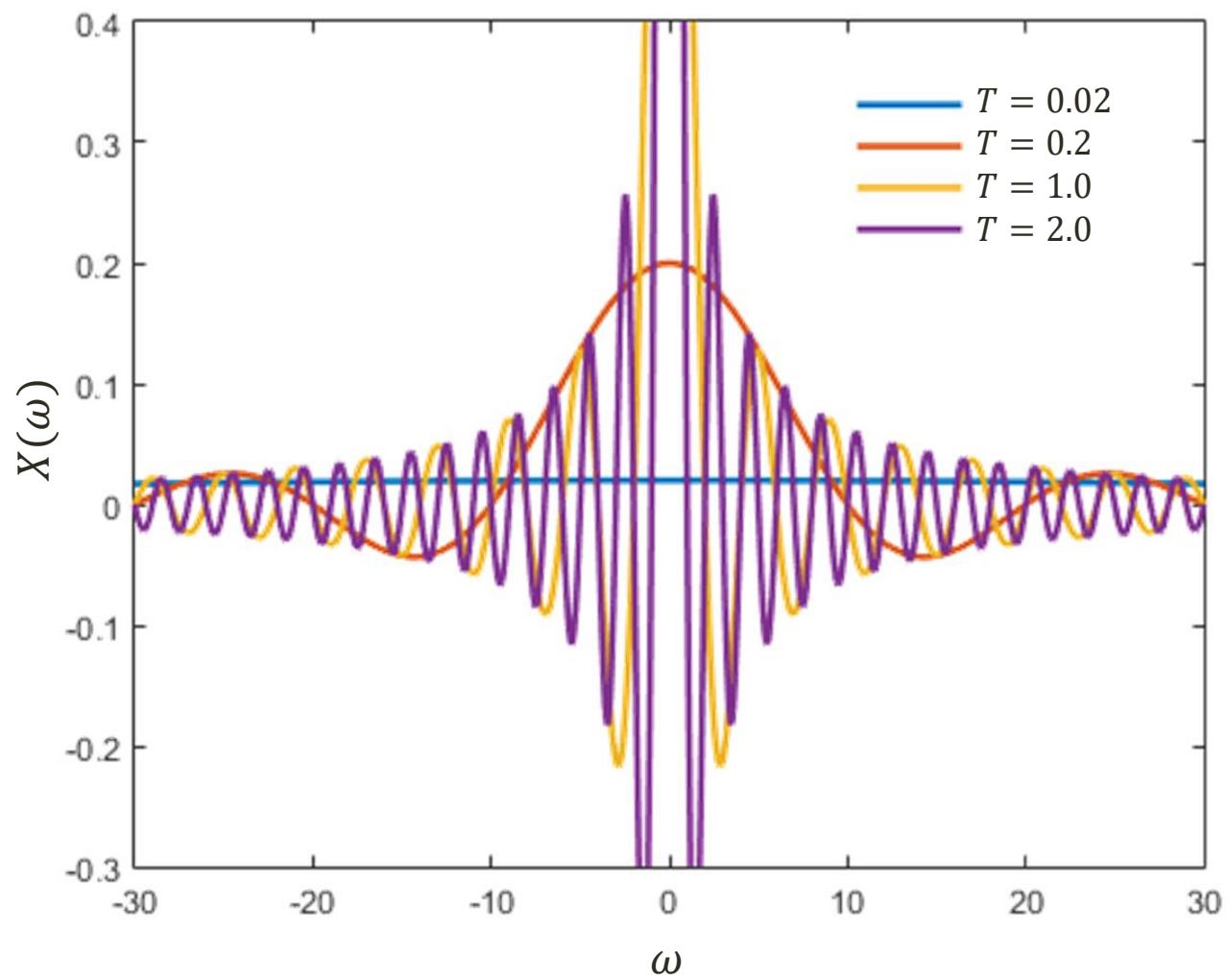
$\text{sinc}(x)$ é uma função par de x

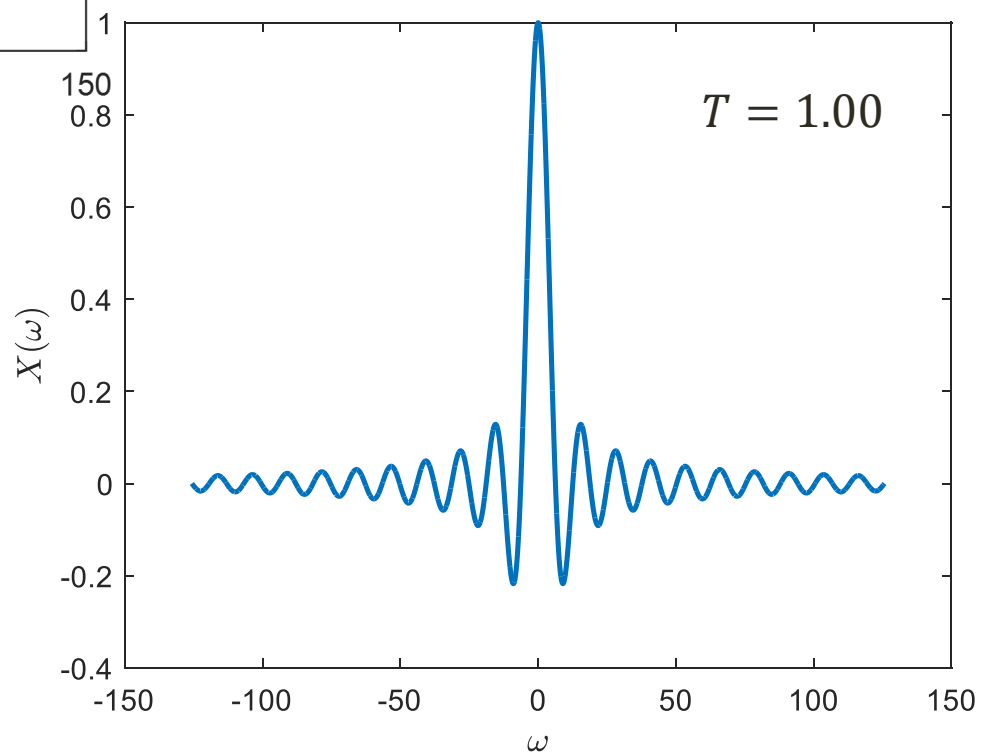
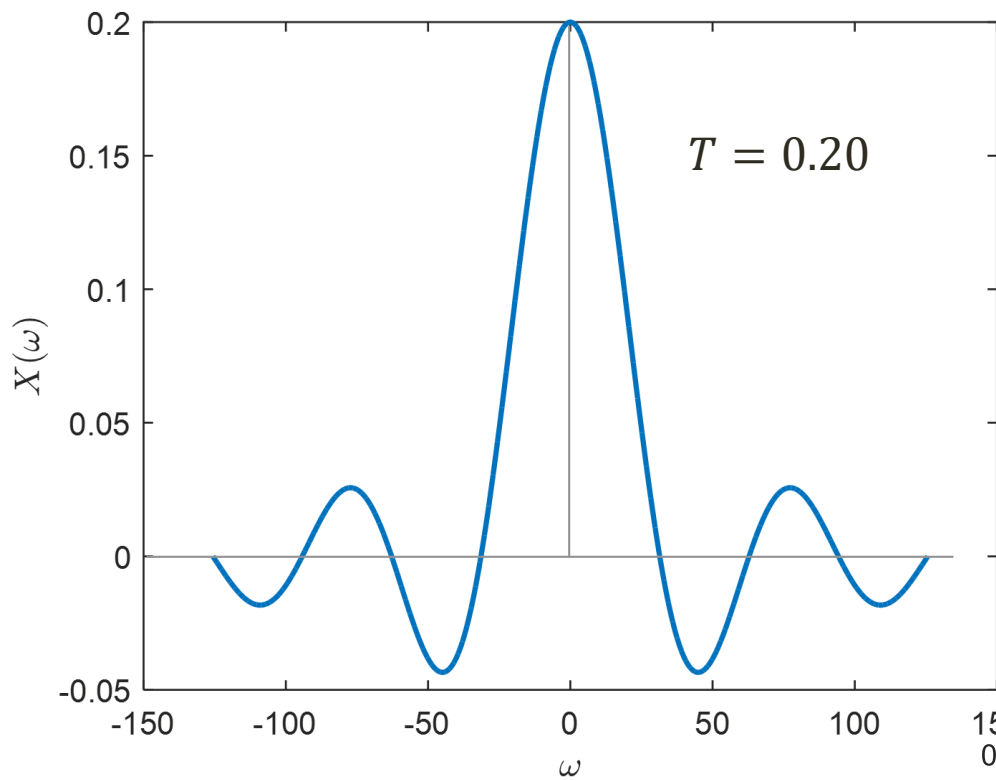
$\text{sinc}(x) = 0$ quando $\sin(x) = 0$, exceto quando $x = 0$. Isto é, somente quando $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$



$\text{sinc}(0) = 1$ (L'Hôpital)

$$X(\omega) = T \operatorname{sinc}(\omega T/2)$$







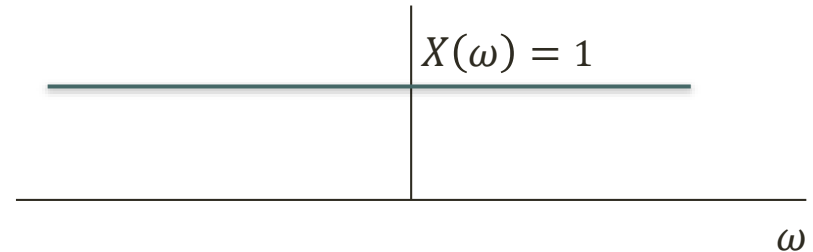
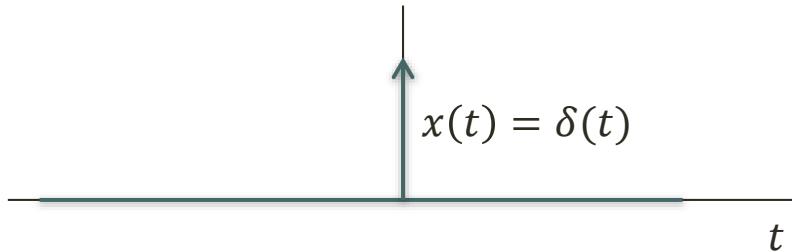
FT PARA IMPULSO UNITÁRIO

$\delta(t)$

Se $x(t) = \delta(t)$,

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

Impulso unitário contém componente em todas as frequências.





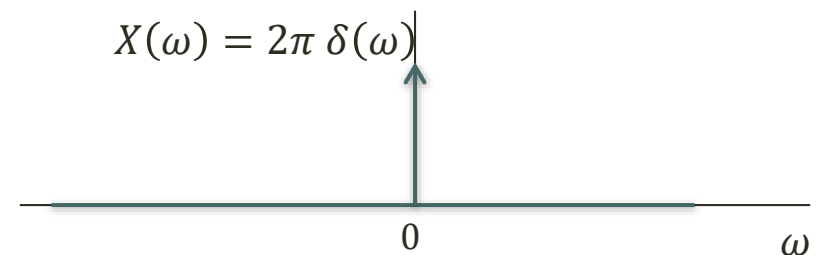
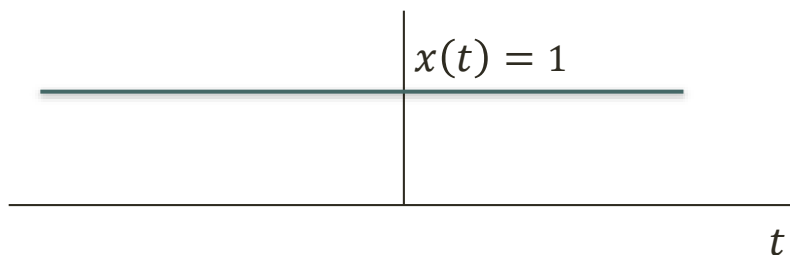
INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega)$

Se,

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

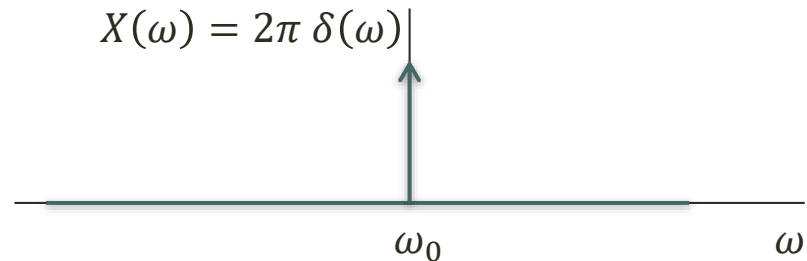




INVERSA DA FT PARA $\delta(\omega - \omega_0)$

Se,

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$



Então, aplicando-se a equação de síntese da FT,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Similarmente:

$$X(\omega) = 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$$

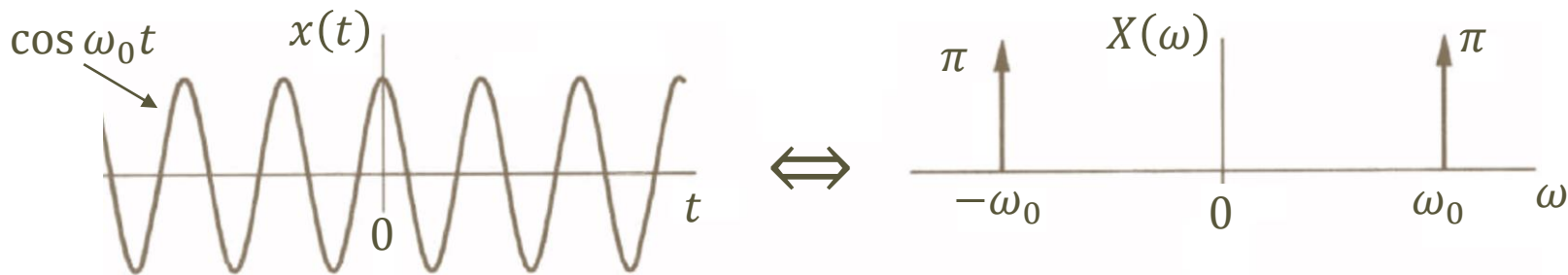
TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO COSSENO $\cos \omega_0 t$



$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

Espectro de sinal cosseno tem dois impulsos em frequências positiva e negativa.



ENTÃO....



$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\text{rect}(t/2a)$	$2a \text{sinc}(\omega a)$



FT PARA QUALQUER SINAL PERIÓDICO

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \delta(\omega - n\omega_0)$$

$X(\omega)$ define a transformada de Fourier para sinais periódicos em função dos coeficientes $X[n]$ da série de Fourier exponencial.

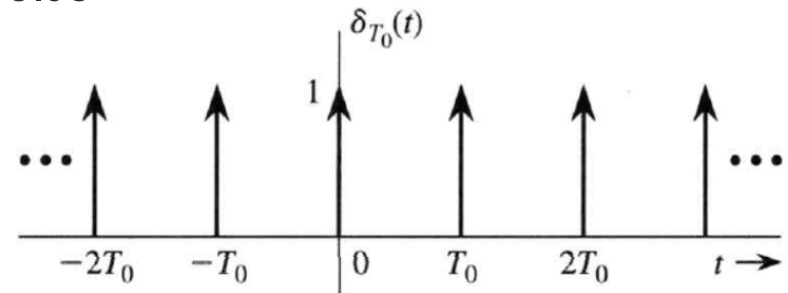
Ou seja, FT de um sinal periódico é uma versão amostrada dos coeficientes da série de Fourier! Resulta em um espectro discreto com impulsos nos harmônicos $n\omega_0$ de amplitude igual ao coeficiente da série de Fourier naquele harmônico multiplicado por 2π .



FT PARA UM TREM DE IMPULSOS

Então, considere agora um trem de impulso

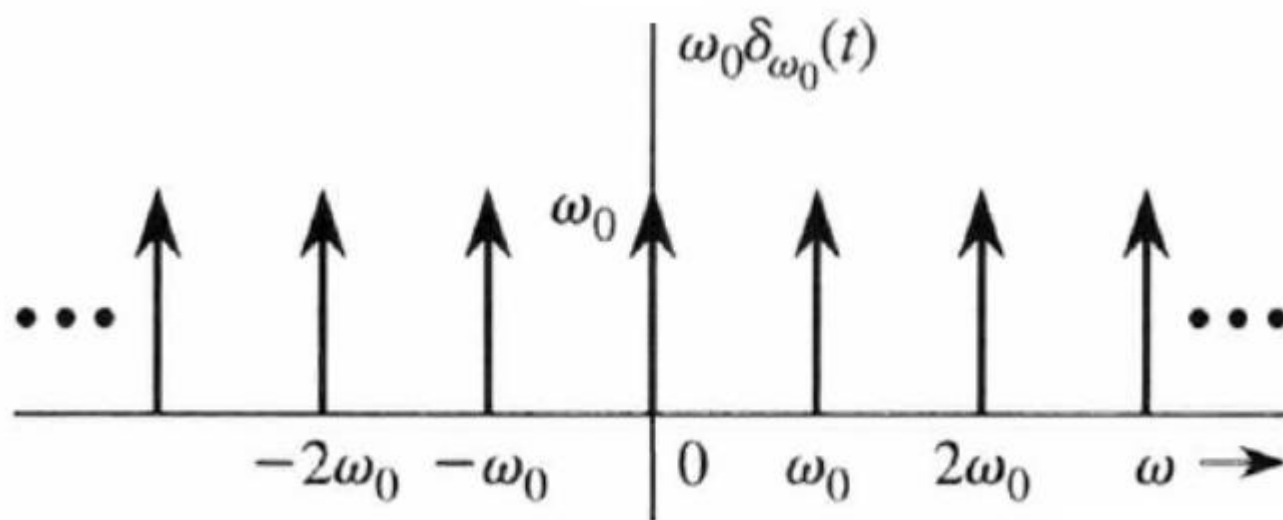
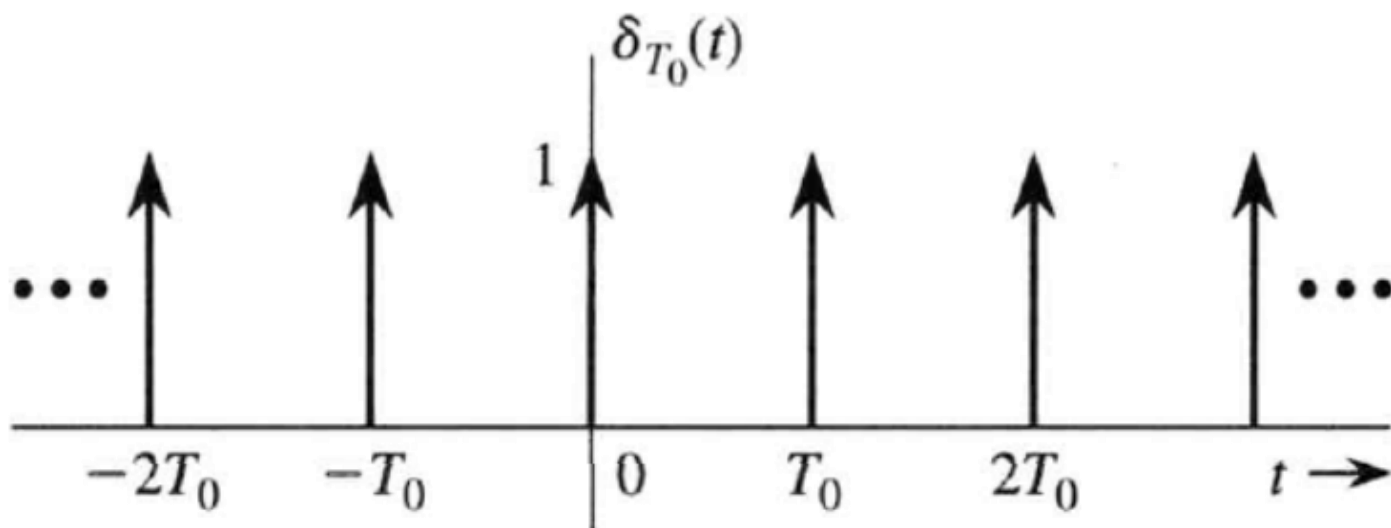
$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$



A série de Fourier desse impulso pode ser definida como,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \therefore X[n] = \frac{1}{T_0}$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$





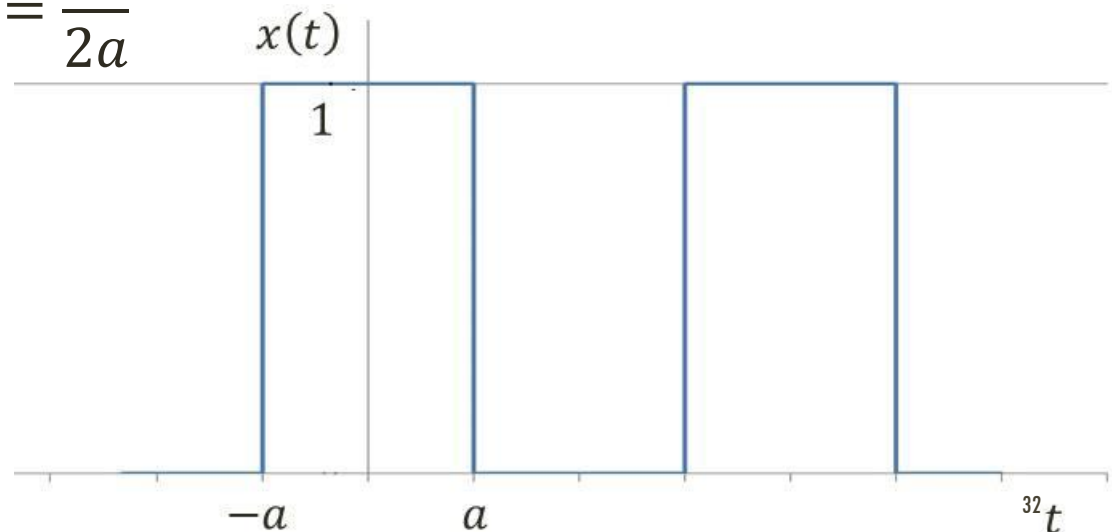
FUNÇÃO RETANGULAR

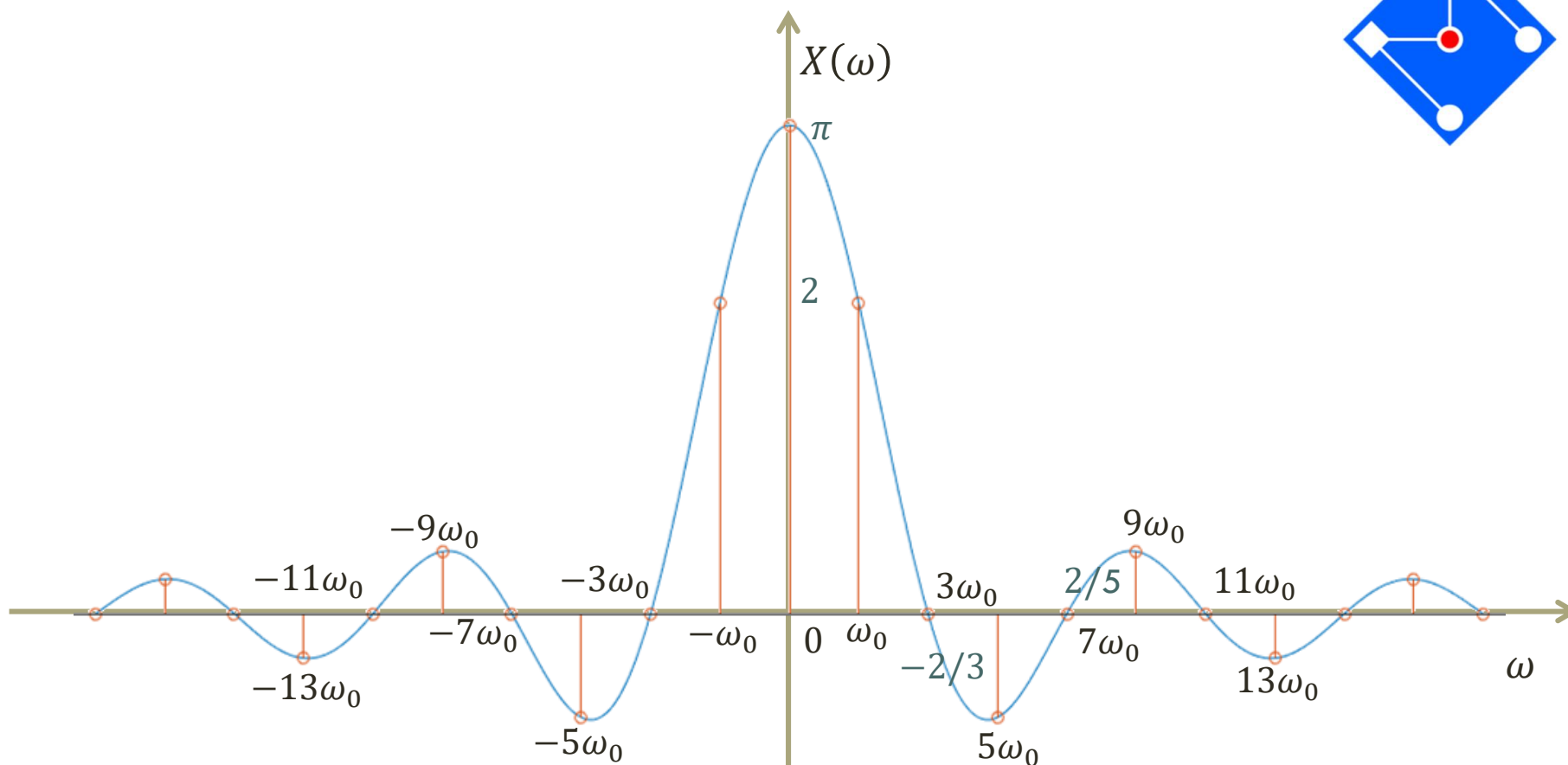
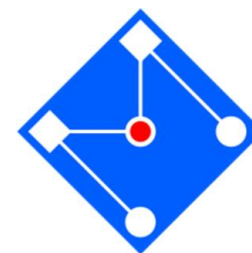
Suponha que a função retangular do exemplo anterior seja estendida e transformada em uma função periódica...

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < a \\ 0, & \text{se } a < |t| < T/2 \end{cases}$$

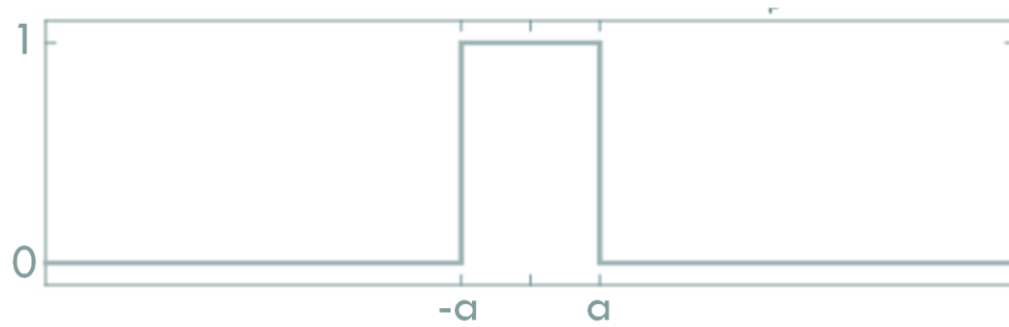
$$x(t + T) = x(t)$$

$$T = 4a, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2a}$$



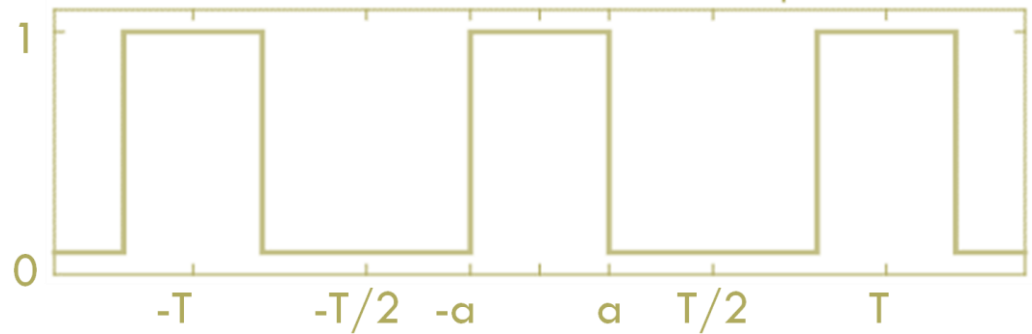


$$a = 1, \quad T = 4a, \quad \omega_0 = \pi/2$$



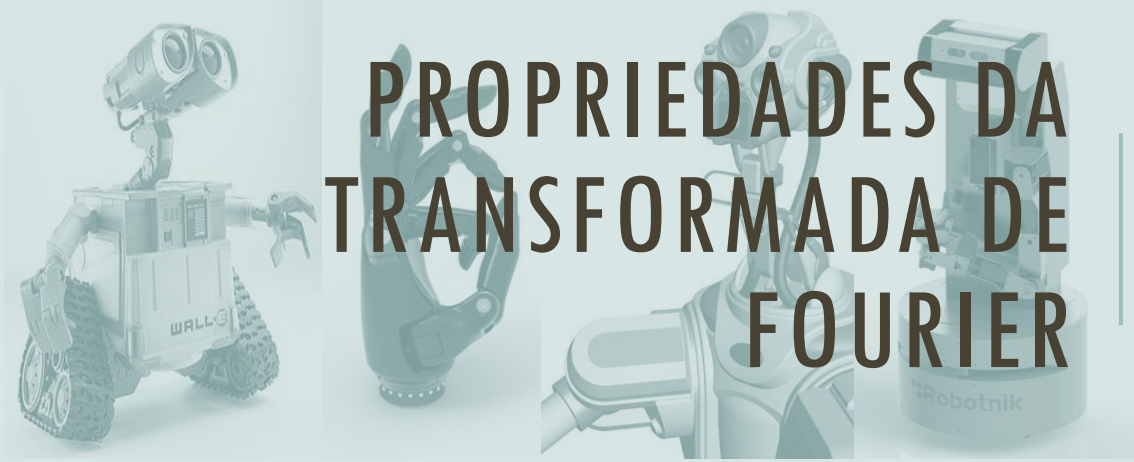
$$X(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a)$$

Se $x_T(t)$ é a extensão periódica de $x(t)$, com o período T , então os coeficientes da série de Fourier, $X_T(\omega)$, de $x_T(t)$, e $X(\omega)$, de $x(t)$, são relacionados por:



$$X_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} X(n\omega_0)$$

$$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2a}{T} \operatorname{sinc}(n\omega_0 a) \delta(\omega - n\omega_0)$$



PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma ferramenta muito valiosa na análise de sinais e sistemas no domínio da frequência. As propriedades da FT fornecem *insights* valiosos sobre muitas propriedades ou resultados no processamento de sinal.



LINEARIDADE

A propriedade de linearidade ou de superposição de efeitos estabelece que combinações lineares no domínio do tempo correspondem a combinações lineares no domínio da frequência.

$$ax(t) + by(t) \longrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$$



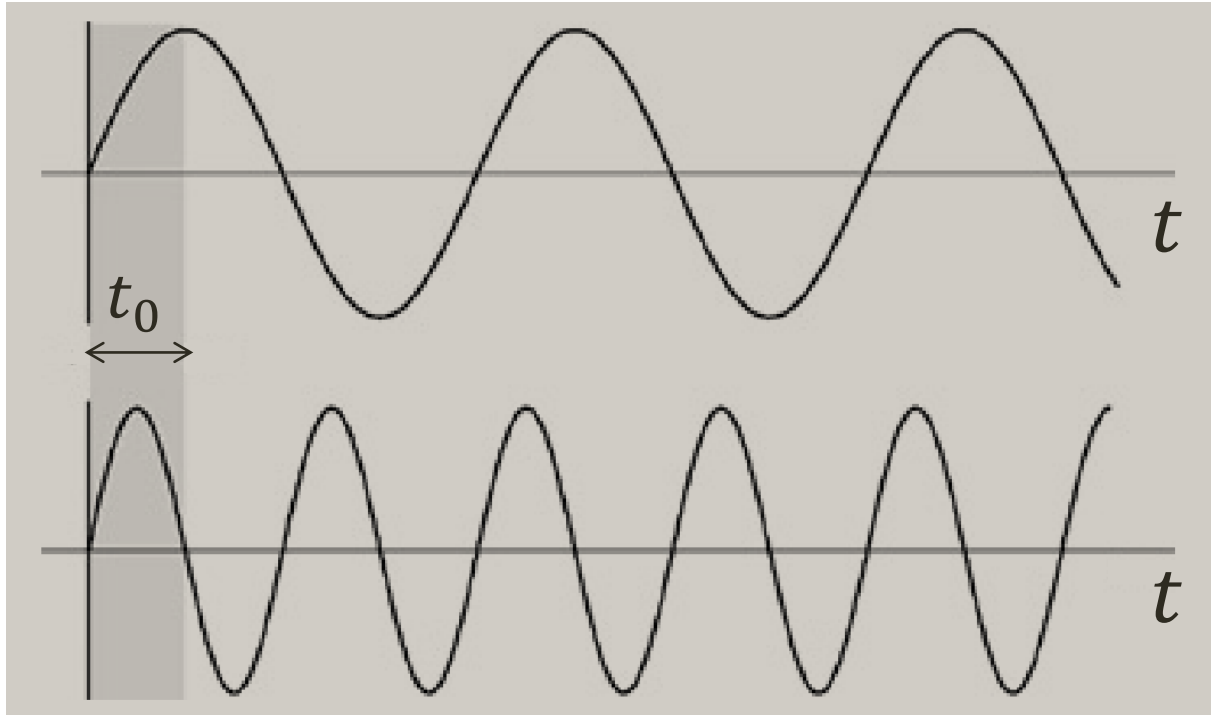
TRANSLAÇÃO NO TEMPO

Transladar um sinal no domínio do tempo faz com que a transformada de Fourier seja multiplicada por uma exponencial complexa.

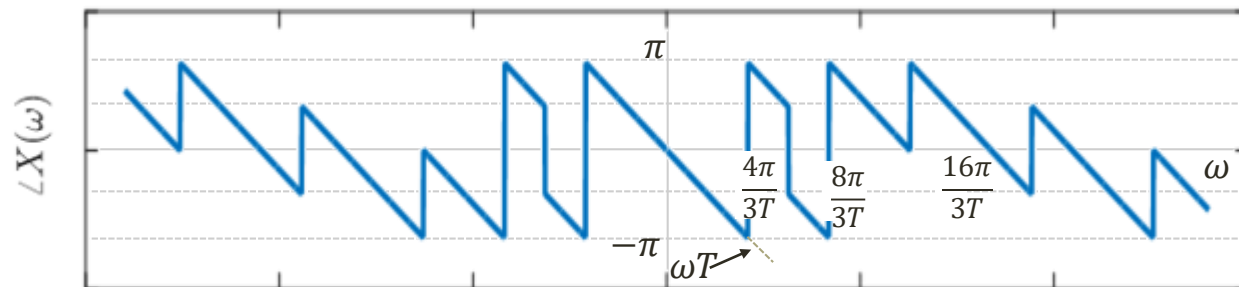
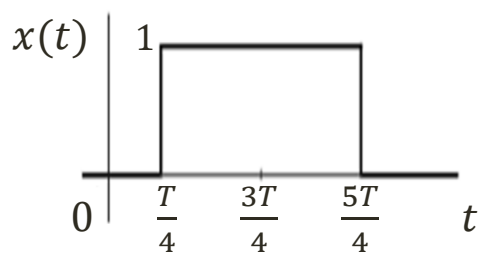
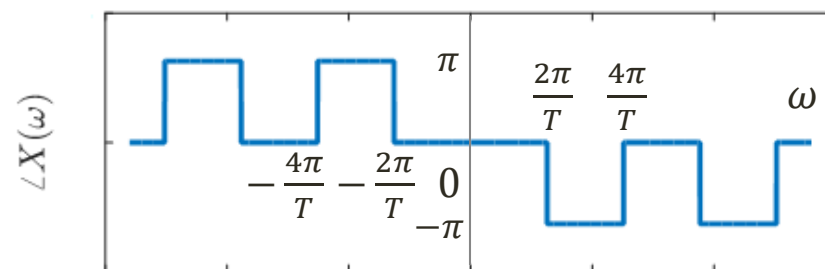
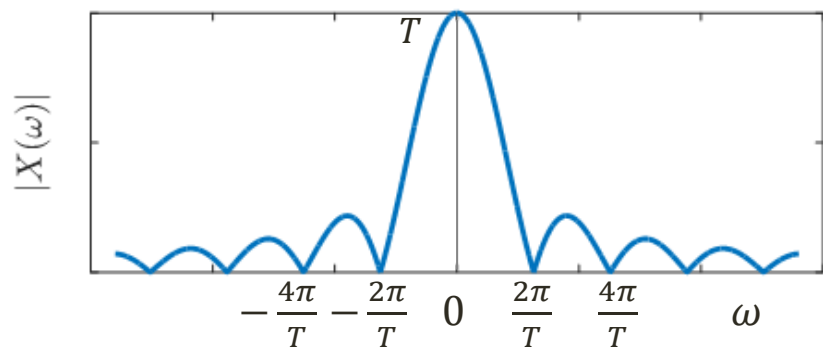
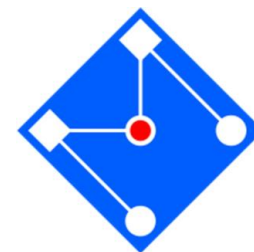
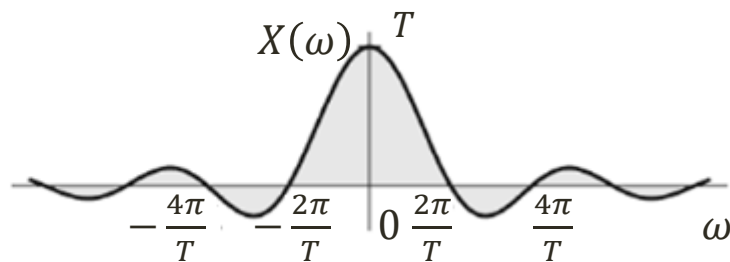
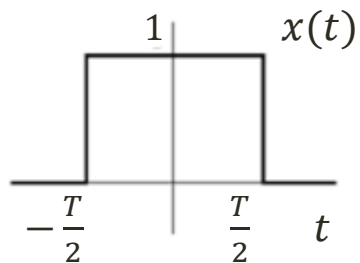
$$x(t - t_0) \xrightarrow{CTFT} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Este resultado mostra que retardar um sinal por t_0 segundos não altera o espectro de amplitude. O espectro de fase, no entanto, é alterado por $-\omega t_0$.

$\cos \omega t$ atrasado de t_0 é dado por: $\cos(\omega t - \omega t_0)$



O princípio do desvio de fase linear é muito importante, e vamos encontrá-lo novamente, por exemplo, filtragem de sinal sem distorção.



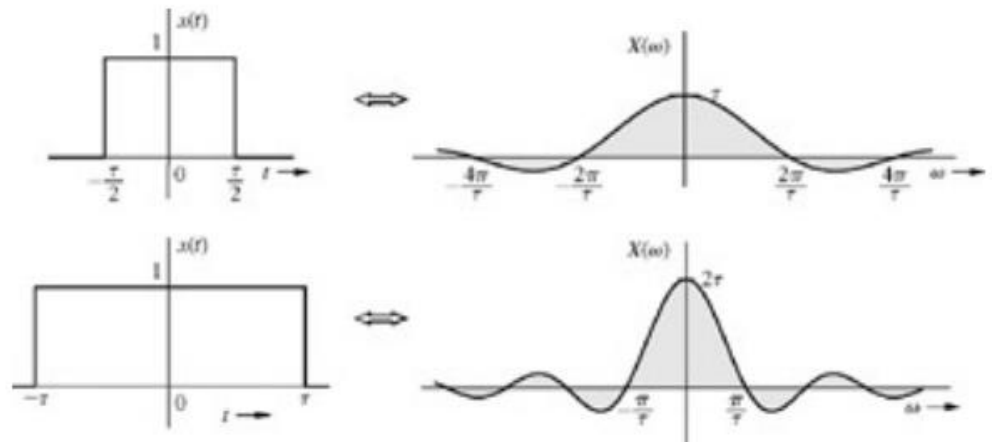


ESCALONAMENTO NO TEMPO

A compressão de um sinal no domínio do tempo resulta numa expansão no domínio da frequência e vice-versa.

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(-t) \longrightarrow X(-\omega)$$



DUALIDADE



Transformada direta e inversa são similares!

Pequenas diferenças:

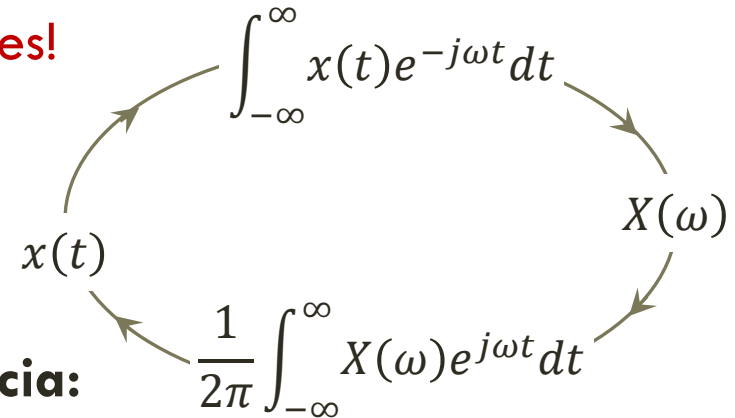
- O fator 2π que aparece na equação inversa
- O índice exponencial com sinais opostos

Base para dualidade de tempo e frequência:

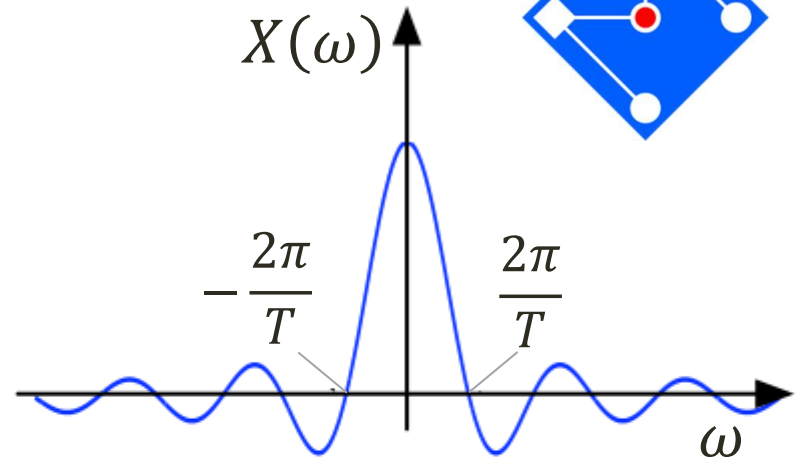
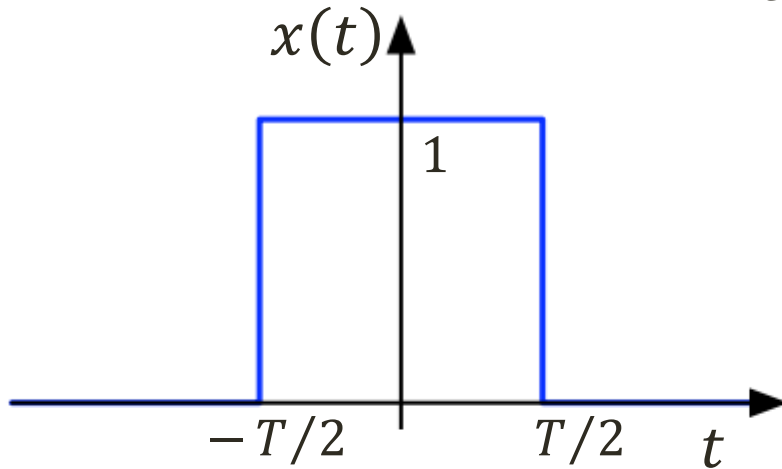
Para qualquer relação entre $x(t)$ e $X(\omega)$, existe uma relação dual, obtida trocando $x(t)$ e $X(\omega)$ (com pequenas modificações),

$$x(t) \xrightarrow{CTFT} X(\omega)$$

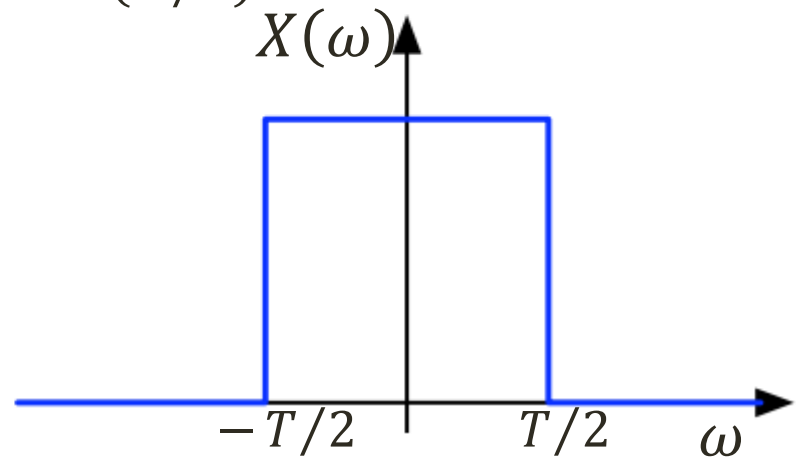
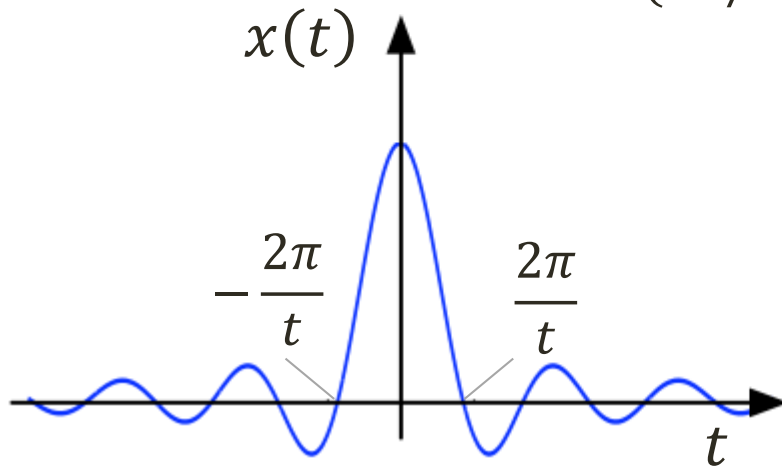
$$X(t) \xrightarrow{CTFT} 2\pi x(-\omega)$$



$$\text{rect}(t/T) \xrightarrow{\text{CTFT}} T \text{sinc}(\omega T/2)$$



$$T \text{sinc}(xT/2) \xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi \text{rect}(\omega/T)$$





$y(t)$	$Y(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$2\pi X(\omega - \omega_0)$

TRANSLAÇÃO NA FREQUÊNCIA



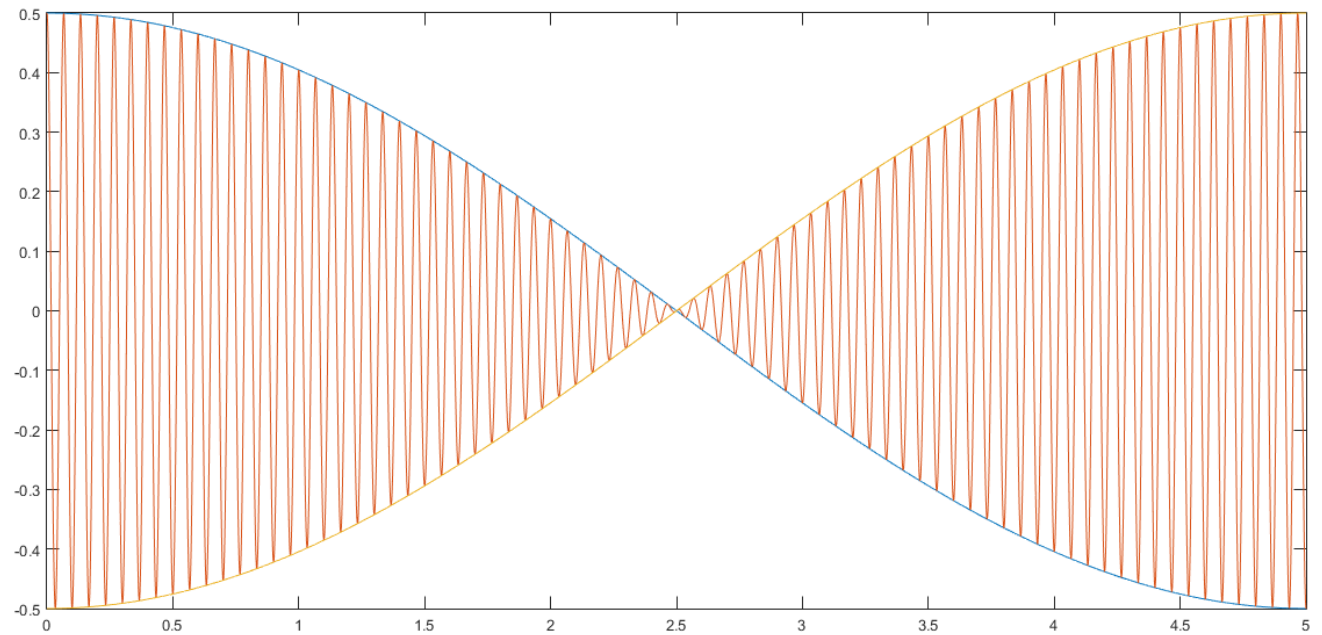
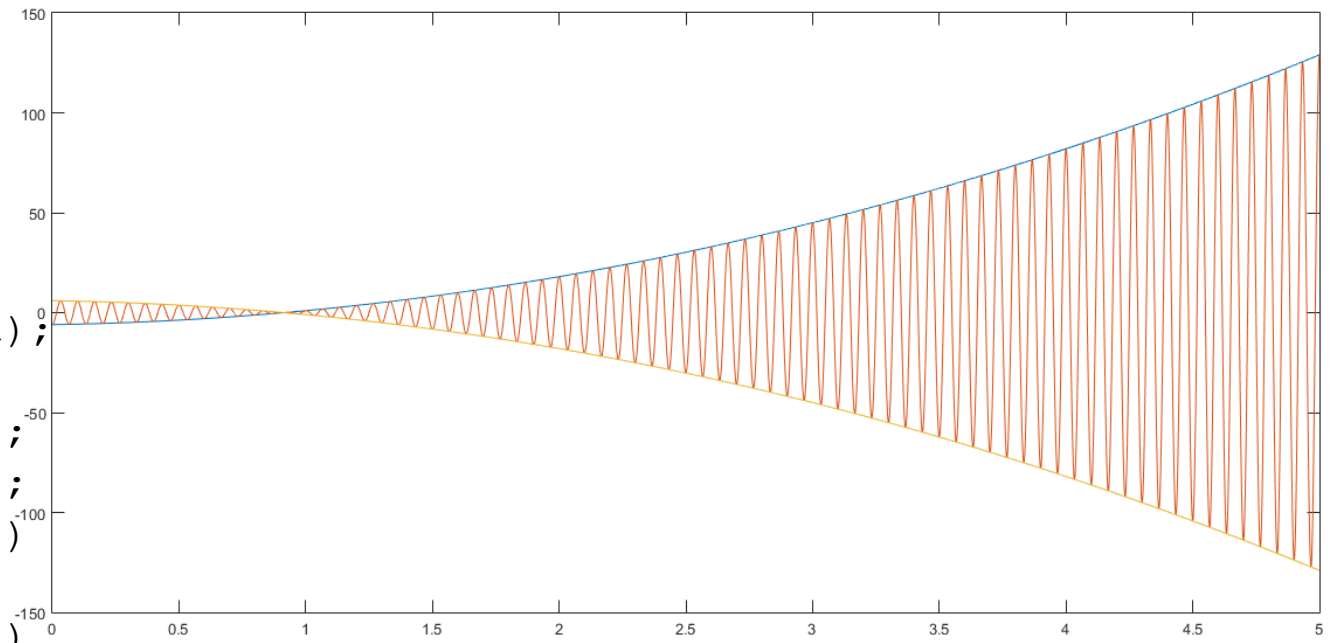
Devido à propriedade da *dualidade* que acabamos de ver...

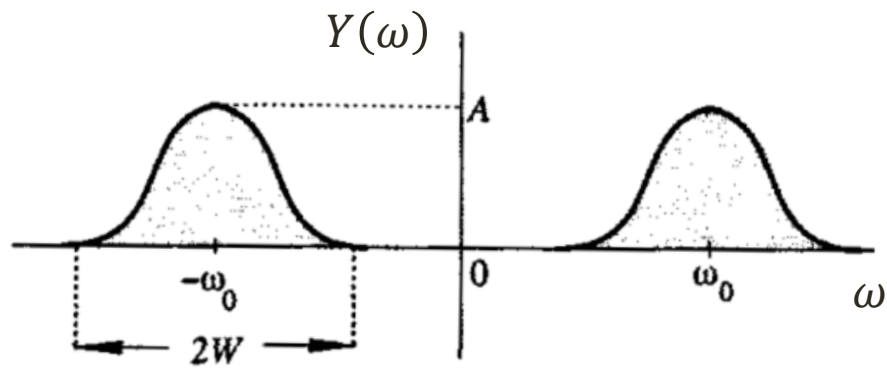
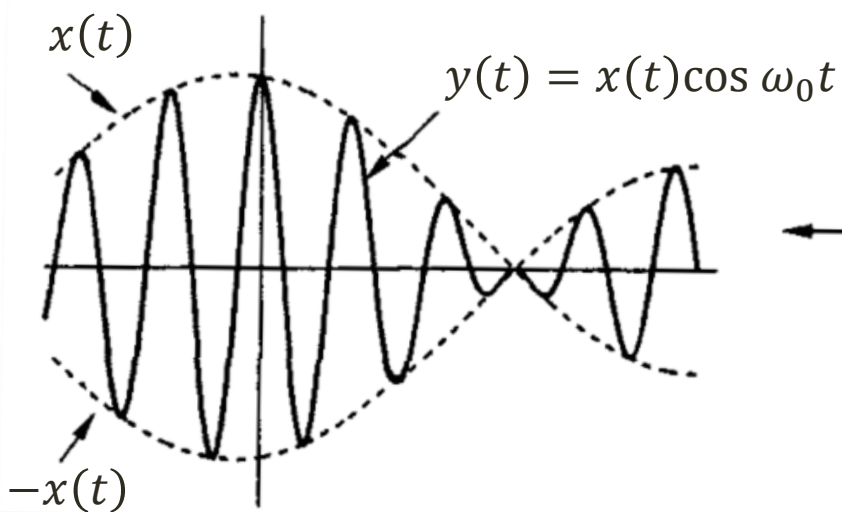
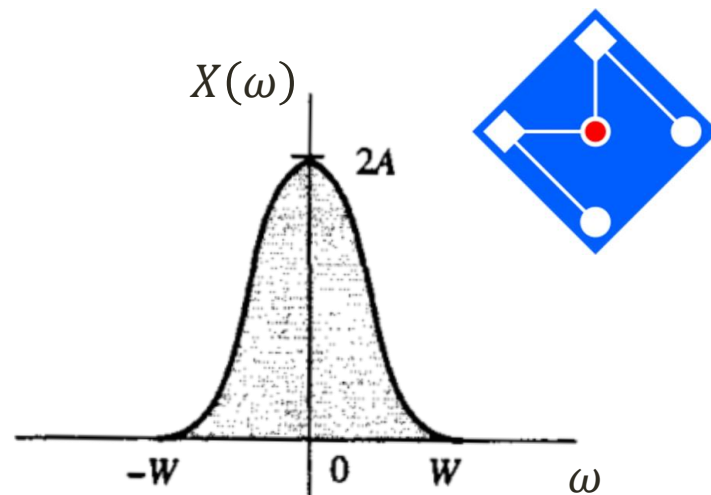
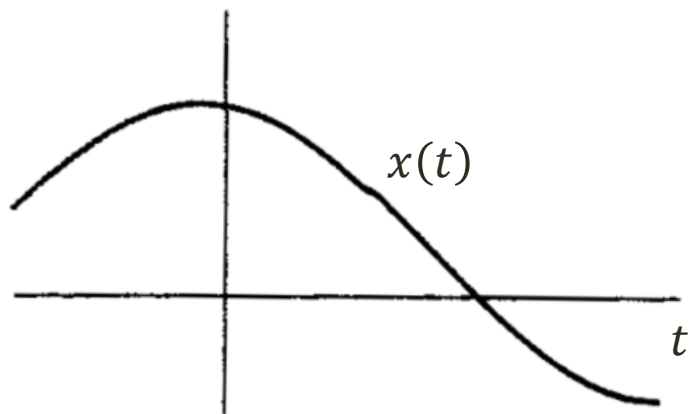
$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{CTFT} 2\pi X(\omega - \omega_0)$$

```

t=0:0.0001:5;
w0=30;
x1=0.5*cos(0.2*pi.*t);
x2=5*t.^2+2*t-6;
y1=x1.*cos(w0*pi.*t);
y2=x2.*cos(w0*pi.*t);
plot(t,x1,t,y1,t,-x1)
figure;
plot(t,x2,t,y2,t,-x2)

```





DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO



A transformada de Fourier converte a operação de diferenciação no tempo na multiplicação por $j\omega$ na frequência.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

CONVOLUÇÃO



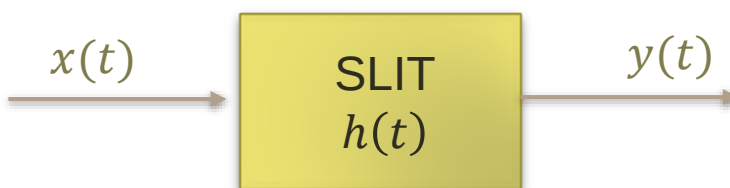
A transformada de Fourier da convolução de dois sinais é o produto das transformadas desses sinais.

$$y(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

RESPOSTA IMPULSO E CONVOLUÇÃO



O sistema é completamente caracterizado pela função resposta ao impulso, $h(t)$. A saída $y(t)$, é obtida no domínio do tempo por Convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$


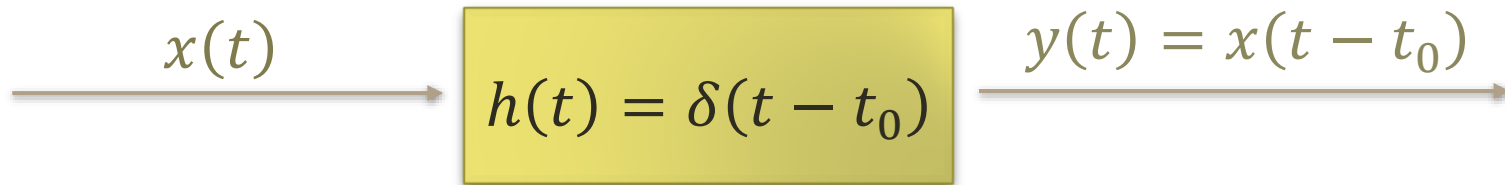
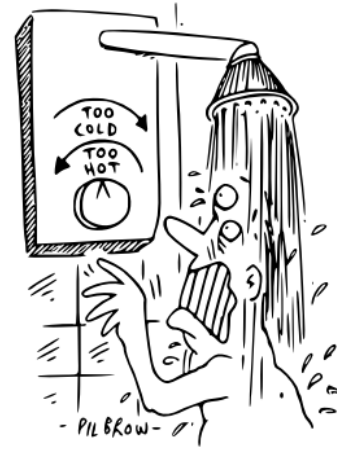
Ou, no domínio da frequência,

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

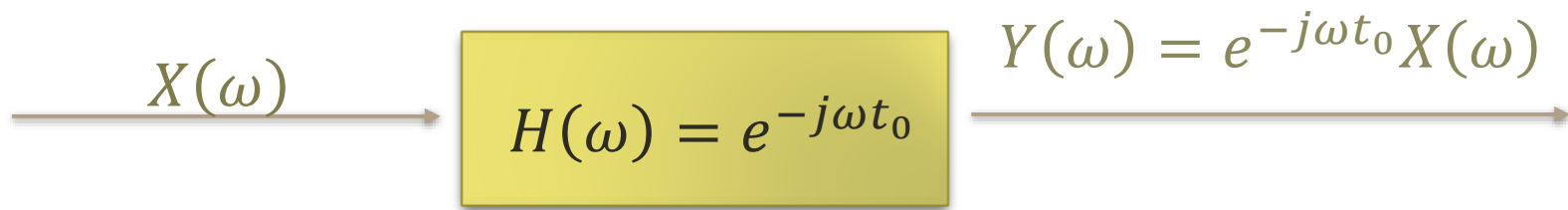
onde $H(\omega)$ é a resposta em frequência do sistema, definida como a transformada de Fourier de $h(t)$,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

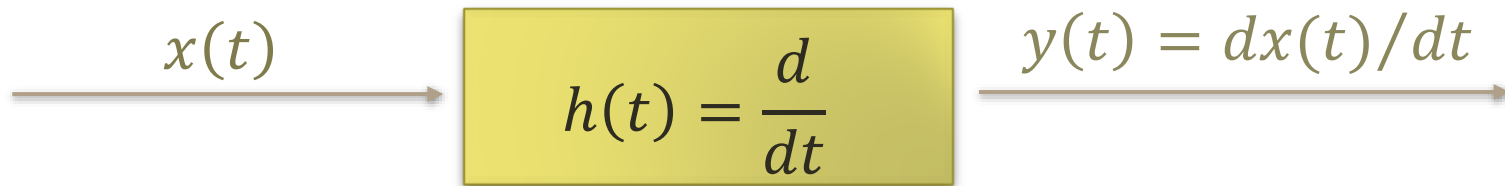
TIME DELAY SYSTEM



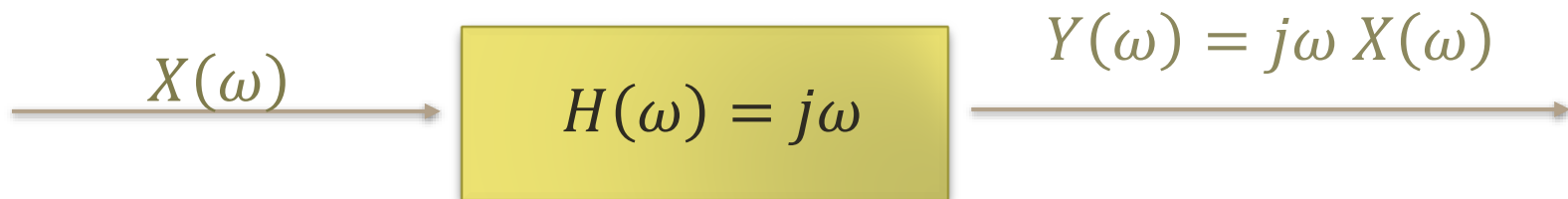
Modelo esquemático do atraso de um sistema



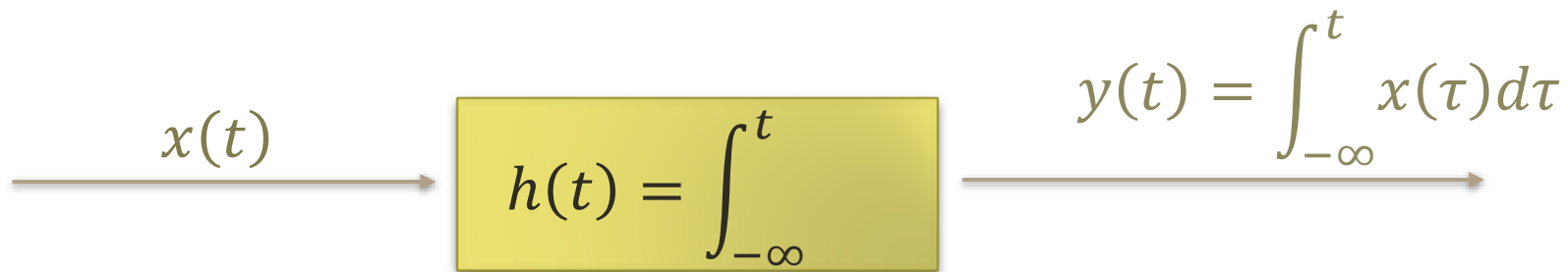
DIFERENCIADOR



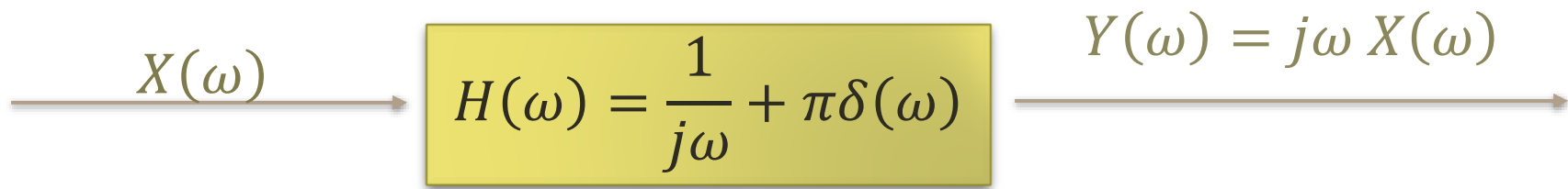
Modelo esquemático do diferenciador



INTEGRADOR



Modelo esquemático do integrador

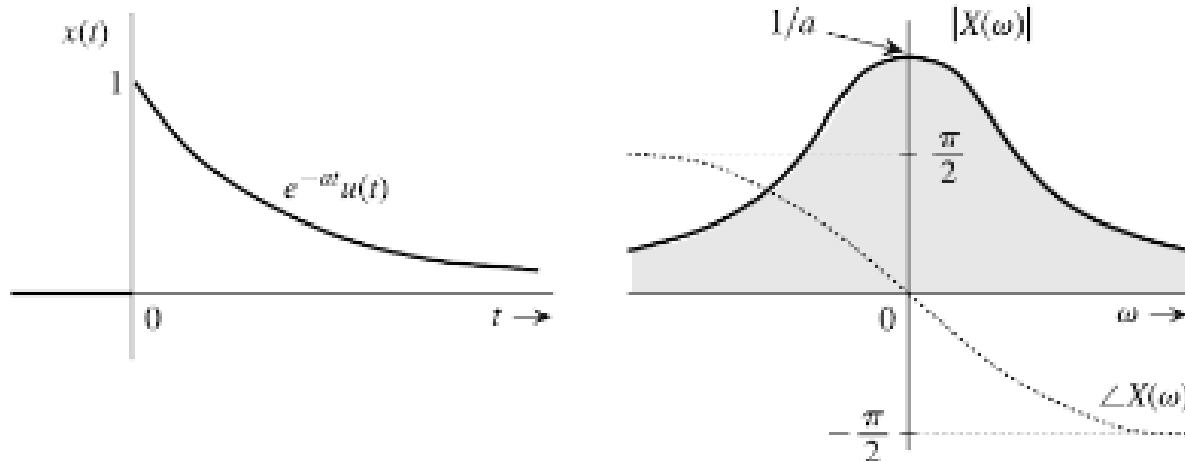


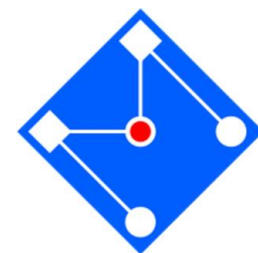


EXEMPLO 1

Calcule a Transformada de Fourier (TF), construa os diagramas de módulo e fase.

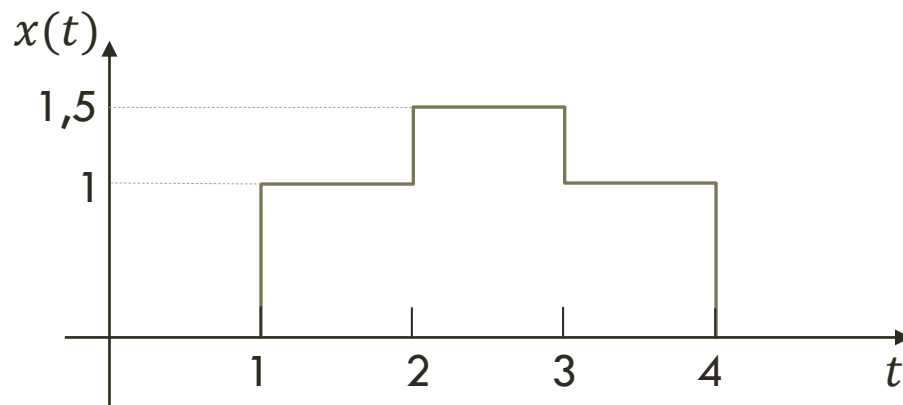
$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$





EXEMPLO 2

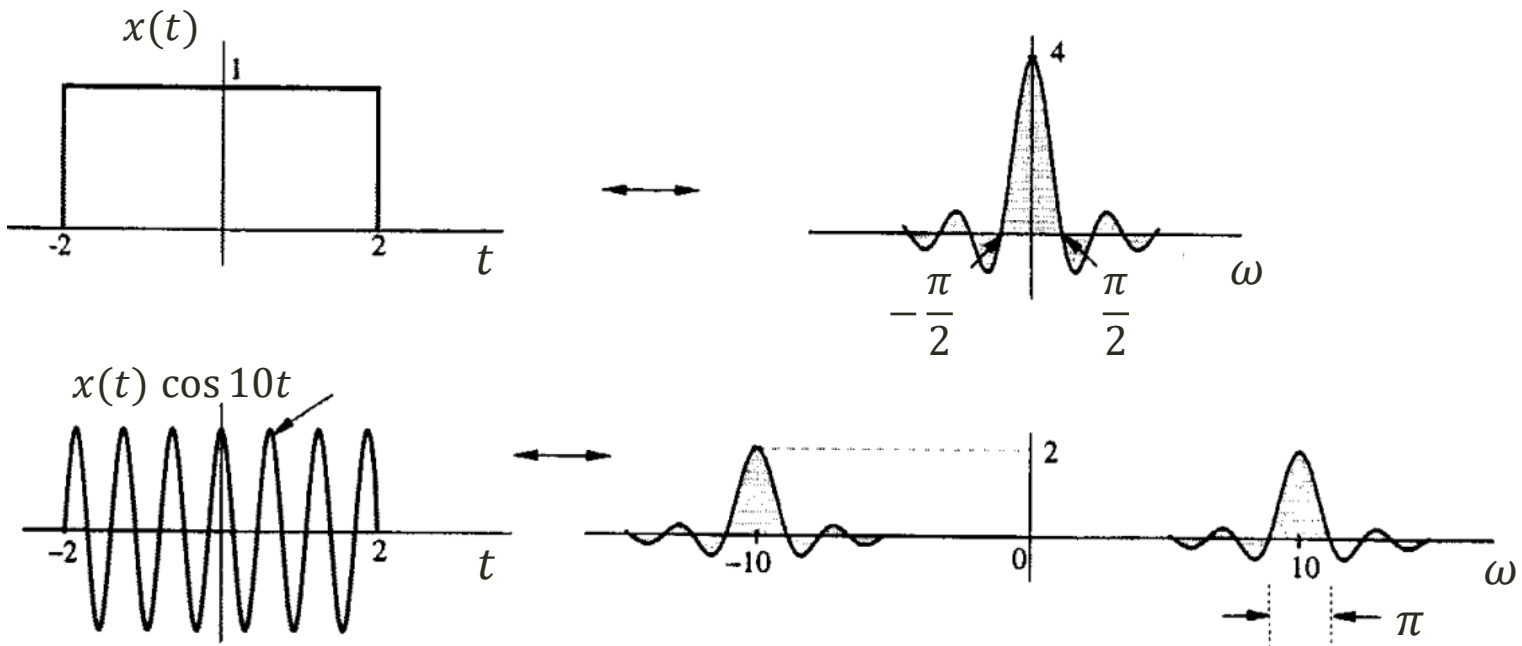
Use as propriedades da linearidade e translação para resolver o exercício abaixo.



EXEMPLO 3



Calcule a Transformada de Fourier do sinal modulado $x(t) \cos 10t$ onde $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$



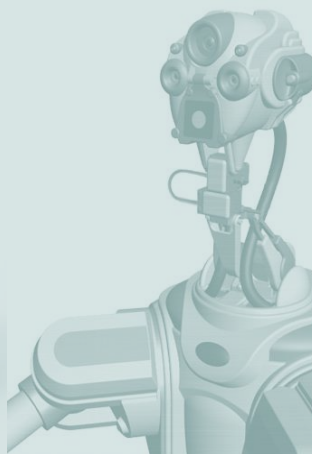


LEAKAGE

As limitações da vida real têm consequências. Por exemplo, um tempo de medição finito resulta em fuga espectral!!!!

Queremos conhecer a transformada de Fourier de uma tensão medida experimentalmente $x(t)$... Como vamos calcular uma integral com limites $\pm\infty$?

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$



FIM