8.3 Transformada cosseno discreta

Exemplo: KLT(2) e a DCT-II

Vimos na aula que o processo com matriz de autocorrelação

$$R_{ss}^{(2)} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix}$$

tem transformada de Karhunen-Loève (KLT) inversa

$$A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que leva à KLT direta

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Também pode ser KLT inversa

$$A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva à KLT direta

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A forma da decomposição em autovalores fica

$$R_{ss}^{(2)} = A^T R_{\theta\theta}^{(2)} A$$

ou

$$R_{\theta\theta}^{(2)} = A R_{ss}^{(2)} A^T$$

com matriz de autocorrelação dos coeficientes

$$R_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(0)+R(1) & 0 \\ 0 & R(0)-R(1) \end{bmatrix}$$

A forma da decomposição de Cholesky é

$$R_{ss}^{(2)} = L \cdot D \cdot L^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & ld_1 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & ld_1 \\ ld_1 & l^2 d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Identificamos

$$\begin{cases} d_1 = R(0) \\ l = \dfrac{R(1)}{R(0)} \\ d_2 = \dfrac{R^2(0) - R^2(1)}{R(0)} = \left(1 - \dfrac{R^2(1)}{R^2(0)}\right) R(0) \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} d_1 = \varepsilon_0 \\ d_2 = \varepsilon_1 \end{cases}$$

Isto é, a decomposição de Cholesky gera na matriz diagonal os erros quadráticos médios mínimos da predição linear.