

# Tratamento Lagrangeano escalar para gravitação

Gabriel Massoni Salla, Guilherme Dias Vianna

5 Novembro de 2017

## Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2 Desenvolvimento</b>	<b>2</b>
2.1 Construção da Lagrangeana . . . . .	2
2.2 Resolução da equação não-linear e consequências . . . . .	4
2.3 Digressão em RG e QFT . . . . .	7
<b>3 Conclusão</b>	<b>9</b>
<b>Referências</b>	<b>9</b>

## Introdução

A teoria quântica de campos (QFT) é hoje a teoria na vanguarda da física teórica de partículas elementares. Com ela é possível entender fenômenos quânticos e relativísticos que regem o comportamento de partículas e campos. Para compreendê-la, porém, é preciso antes estudar a teoria clássica de campos, pois está de certa forma a fundação da QFT.

A QFT consegue explicar muitos fenômenos e prever resultados precisamente, porém é claro que ela possui falhas. Uma delas é a dificuldade em incorporar a relatividade geral na teoria. Apesar de não existir uma descrição quantizada da gravidade, a RG pode ser obtida a partir do formalismo Lagrangiano de campos clássicos.

Neste trabalho nos propomos a entender como tratar o campo gravitacional como uma teoria de campos clássica escalar e estudar certos efeitos não-lineares deste campo. E também fazer conexões dos resultados com RG e QFT.

A principal inspiração para este trabalho se deve ao "Quantum Field Theory and the Standard Model" de Schwartz, D. [1]. Ele traz um longo exercício no capítulo de teoria clássica de campos propondo esta abordagem e a aplicação dela para o problema de Mercúrio (como será explicado).

## 1 Objetivos

O objetivo deste trabalho pode ser formulado da seguinte forma: Queremos entender como a gravitação de Newton pode ser estendida para o formalismo Lagrangeano, e além disso verificar o comportamento de termos não-Newtonianos. Para tal, seguiremos o seguinte roteiro.

1. Estudar como é uma Lagrangeana para um campo escalar e a partir desta construir uma que, aplicadas as equações de movimento, nos dê a expressão para o potencial gravitacional Newtoniano.
2. Modificar ligeiramente a Lagrangeana obtida anteriormente para incluir termos não lineares.
3. Resolver a equação de movimento para esta nova Lagrangeana usando métodos perturbativos. Além disso compreender como este resultado afeta uma situação concreta, a órbita de Mercúrio.

4. Representação alternativa do problema utilizando diagramas de Feynman clássicos e complementar o problema para o caso da precessão no periélio de Mercúrio.

Ou seja, primeiramente nos familiarizar com as técnicas da teoria clássica de campos e descobrir como descrevemos uma teoria escalar com ela. Depois, incorporar a esta teoria a gravitação de Newton. Após o passo 1 ser concluído, teremos em mãos uma Lagrangeana que descreve a gravitação clássica. A partir dela veremos como podemos alterá-la para incluir termos não-Newtonianos, e escolheremos um termo em particular para incluir na Lagrangeana. As equações diferenciais para o novo problema não são facilmente resolvidas, portanto usaremos uma técnica utilizada frequentemente em QFT, perturbação. Após resolvermos a equação, vamos ver em particular como essa alteração no potencial newtoniano afeta a órbita de Mercúrio. Posteriormente, podemos discutir a solução real do problema com RG e ver como isso traz mais uma correção ao potencial, levando a precessão do periélio de Mercúrio. E uma visão alternativa, que é mais próxima de QFT, é a representação do problema através dos diagramas de Feynman clássicos.

## 2 Desenvolvimento

### 2.1 Construção da Lagrangeana

O formalismo Lagrangeano da mecânica analítica pode ser estendido para estudar campos. Campos são grandezas que dependem das coordenadas do espaço-tempo, e o sistema todo pode ser descrito apenas por estes campos. Isto é, não são mais as coordenadas generalizadas (que formam um conjunto discreto) que descrevem o sistema, mas sim os campos, que variam de forma contínua.

A ideia inicial para a generalização é bem simples. A ação clássica é dada por:

$$S_{cl}[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \quad (1)$$

A integral é tomada em um intervalo  $[t_i, t_f]$  arbitrário, e  $q$  são as coordenadas generalizadas. Do ponto de vista relativístico esta integral está péssima, porque a distinção entre tempo e espaço é clara. Para generalizarmos a equação (1), tomaremos a integral de  $dt \rightarrow d^4x$  sobre todo espaço tempo. Consequentemente precisamos mudar  $L \rightarrow \mathcal{L}$ , esta nova grandeza chama-se densidade de Lagrangeana e é função da nova variável  $\phi$  (um campo) e de suas derivadas em  $\vec{x}$  e  $x^0 = ct$ .\* Então:

$$S[\phi(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x) \quad (2)$$

Em que  $\partial_\mu$  é o 4-vetor gradiente. Resta saber então quais são as equações de Euler-Lagrange para esta nova Lagrangeana, ou seja, precisamos aplicar o princípio de Hamilton e descobrir como o sistema é descrito por  $\mathcal{L}$ . O processo é o mesmo no caso clássico, pulamos a dedução e temos as equações:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3)$$

Uma dedução da versão contínua das equações de Lagrange e sua posterior adaptação para o formalismo covariante pode ser vista em [2], por exemplo, uma excelente referência para toda a mecânica analítica. Basta saber então como o campo gravitacional pode ser entendido como uma teoria de campos. Na verdade este é um problema muito mais complicado do que parece. Um estudo detalhado deste problema envolve relacionar um tensor de rank 2,  $g_{\mu\nu}(x)$ , a transformações gerais de coordenadas. Naturalmente este raciocínio nos leva a obter uma Lagrangiana cujas equações de movimento são as equações de Einstein para RG.

Mas este não é o foco. O objetivo deste projeto é conseguir estudar efeitos não-newtonianos, porém sem ter de aplicar RG. O procedimento é razoavelmente simples.

Para começarmos, pensemos classicamente. O potencial Newtoniano é quem rege o problema planetário, e este potencial é dado por [3]:

$$V_{Newton}(r) = -\frac{G_N m}{r} \quad (4)$$

---

\*Deixamos explícito que, ao longo do texto,  $\vec{x}$  é o vetor posição usual  $\in \mathbb{R}^3$  enquanto  $x = x^\mu = (x^0, \vec{x})$  é o quadrivetor posição  $\in \mathbb{M}^4$  (espaço de Minkowski)

$G_N$  é a constante de gravitação,  $m$  é a massa do corpo gerando o potencial e  $r$  é a coordenada radial.  $V_{Newton} \equiv V$  é um campo escalar e depende da separação espacial entre a massa  $m$  e um ponto do espaço qualquer,  $r$ . Vamos montar uma densidade de Lagrangeana para  $V$ , na qual as equações de movimento nos leve à expressão (4).

Para tal, precisamos antes saber como é em geral uma Lagrangeana para um campo escalar sob o grupo de Lorentz,  $\phi(x)$ .

Este campo se transforma de modo a permanecer invariante (é um escalar)  $\Rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$ . A princípio,  $\mathcal{L}$  pode depender de  $\phi$ ,  $\partial_\mu\phi$  e  $x^\mu$ . Contudo, depender de  $x^\mu$  significa dar preferência para uma particular direção no espaço-tempo (a de  $x^\mu$ ), quebrando a isotropia e homogeneidade. O que temos ao nosso dispor é  $\partial_\mu\phi$  e  $\phi$ . Precisamos contrair  $\partial_\mu\phi$ , e o único 4-vetor disponível seria  $\partial^\mu\phi$ . Como  $\phi$  é um escalar podemos colocar toda e qualquer potência de  $\phi$  na Lagrangeana que ela continuaria sendo um Lorentz-invariante. A Lagrangiana é então:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \sum_n a_n\phi^n \quad (5)$$

Sendo o fator  $\frac{1}{2}$  convenção e  $a_n$  são coeficientes numéricos. Uma equação de movimento linear é gerada se tornarmos relevante apenas um termo (quadrático em  $\phi^2$  da somatória). A densidade efetivamente utilizada é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{\omega^2}{2}\phi^2 \quad (6)$$

O novo fator  $\frac{1}{2}$  e a definição de sinais e constantes é só para nos poupar de futuras redefinições. A obtenção da equação de movimento é feita por uma ginástica algébrica mediana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega^2\phi^2)}{\partial\phi} &= 2\omega^2\phi \\ \frac{1}{2}\partial_\nu\frac{\partial(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\nu\phi)} &= \frac{1}{2}\partial_\nu\frac{\partial(g^{\mu\xi}\partial_\xi\phi\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\nu\phi)} \end{aligned}$$

A derivada mais interna pode ser resolvida trivialmente com a regra do produto:

$$\frac{\partial(g^{\mu\xi}\partial_\xi\phi\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\nu\phi)} = g^{\mu\xi}\frac{\partial(\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\xi\phi + g^{\mu\xi}\frac{\partial(\partial_\xi\phi)}{\partial(\partial_\nu\phi)}\partial_\mu\phi = g^{\mu\xi}\delta_\nu^\mu\partial_\xi\phi + g^{\mu\xi}\delta_\nu^\xi\partial_\mu\phi = 2\partial^\nu\phi$$

Na última passagem foi realizado um levantamento de índice através do tensor métrico e uma filtragem através do delta de Kroenecker  $\delta_\nu^\xi$  definido como na literatura usual [4]. Para compensar o fator de 2 é que se define usualmente a densidade lagrangiana com o fator  $\frac{1}{2}$ . Substituindo nas equações de Lagrange, obtém-se simplesmente:

$$\partial_\nu\partial^\nu\phi + \omega^2\phi = 0$$

Definindo  $\partial_\nu\partial^\nu \equiv \square$ , chamado de operador D'Alembertiano (ou "box"), que seria uma generalização quadridimensional do operador Laplaciano. Obtém-se então a equação de Klein-Gordon:

$$(\square + \omega^2)\phi = 0 \quad (7)$$

A QFT nos conta que a quantidade  $\omega$  é relacionada à massa da partícula mediadora do campo [5]. No nosso caso da Gravitação, a massa esperada dessa partícula é nula e anula  $\omega$ , levando a uma equação da forma:

$$\square\phi = 0$$

Essa equação descreve um campo livre (sem fontes geradoras) e estático (independente do tempo). Para se convencer disso, tomando  $\phi = V$ , obtem-se para o potencial newtoniano:

$$\nabla^2V = 0$$

A obtenção da equação de Laplace nos conforta com a sensação de que o desenvolvimento até agora é consistente.

É intuitivo que ao colocarmos um termo não homogêneo  $V(x)\Xi(x)$  na lagrangeana, obteríamos uma equação de Poisson ao invés:

$$\nabla^2 V = \Xi(\vec{x})$$

Onde faríamos a identificação (por consistência)  $\Xi(\vec{x}) = 4\pi G_N \rho(\vec{x})$ , em que  $\rho(\vec{x})$  é a distribuição de massa no espaço.

Agora é fácil obter o potencial newtoniano, basta colocar  $\rho(\vec{x}) = m\delta^{(3)}(\vec{x})$ , i.e., uma fonte pontual na origem. Obtemos a equação:

$$\nabla^2 V = 4\pi G_N m \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (8)$$

Em que o fator de acoplamento do campo com a fonte é a massa da fonte e  $G_N$  é para corrigir a dimensão. Esta é apenas a equação para uma função de Green usual [6], com solução

$$V(\vec{x}) = -\frac{G_N m}{|\vec{x}|} \quad (9)$$

Portanto, a Lagrangiana que nos dá o potencial Newtoniano para uma fonte  $\Xi$  é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu V \partial^\mu V - V \Xi(x) \quad (10)$$

O último comentário sobre (10) é que podemos reescrever  $\partial_\mu V \partial^\mu V$  como  $-V \square V$ , pois 4-divergências totais são irrisórias na Lagrangeana.\*

## 2.2 Resolução da equação não-linear e consequências

A ideia a partir de agora é introduzir termos não lineares nas derivadas de  $\phi$  dentro da lagrangiana. As equações geradas não são tão simples quanto as aqui obtidas, por isso é prudente usarmos métodos mais refinados do que as técnicas usuais se quisermos resolvê-las.

Incluir termos de interações (não-lineares) se torna um processo muito intuitivo com o formalismo Lagrangeano. Podemos apenas incluir termos com derivadas de  $\phi$  (com os box) e potências de  $\phi$ , pois estas são as opções Lorentz-invariantes disponíveis. As potências de  $\phi$  representam interações do campo com ele mesmo, e já vimos que não há interação  $\phi^2$ . Portanto não vamos considerar potências.

Vamos então pensar num termo do tipo  $\phi \square \phi$ , que já possuímos na Lagrangeana. A primeira ideia que aparece é colocar um expoente 2 ou no box, ou em um dos  $\phi$ 's <sup>†</sup>. O termo com  $\square^2$  é mais complicado de estudar e não possui significado físico satisfatório para a teoria escalar [1]. Vamos inserir um  $\phi \square \phi^2$  na Lagrangeana.

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{2} \phi \square \phi - \phi \Xi(x) + \phi \square \phi^2 \quad (11)$$

Colocamos o sinal "-" porque há algo gravemente errado em  $\mathcal{L}$ , que está na análise dimensional. Voltando à ação (2), olharemos tudo do ponto de vista de unidades naturais.

Unidades naturais parecem confusas a primeira vista, mas elas se provam muito práticas [7]. Nos referimos "unidades naturais" o sistema no qual  $\hbar = c = 1$  e  $G_N$  continua com seu valor usual. Então tudo com dimensão de velocidade e ação tornam-se adimensionais. A única informação não óbvia que precisamos para a discussão é

$$\hbar c = 192 \text{ fm MeV} \Rightarrow \text{Energia} = (\text{Comprimento})^{-1} \quad (12)$$

Então a dimensão de  $S[\phi]$  é zero, e a de  $d^4 x$  é  $-4$  (em unidades de energia). Consequentemente a dimensão de  $\mathcal{L}$  é  $+4$  em energia. A dimensão de  $\square$  é  $+2$ , portanto a partir do termo  $\phi \square \phi$  concluímos que a dimensão de  $\phi$  é  $+1$ . Todavia, a fonte tem dimensão  $+4$ , pois a fonte nada mais é do que o tensor energia-momento [8], e junto com  $\phi$  dá dimensão  $+5$ . Precisamos colocar então um fator com dimensão  $-1$  multiplicando [9] para acertar a dimensão. Como agora estamos lidando com unidades naturais, fica claro que o único parâmetro universal com dimensão de massa

\*Observe que  $\partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \phi \square \phi$ , caso optássemos por escrever uma ação com o termo  $\phi \square \phi$ , teríamos  $S = \int d^4 x \phi \square \phi = \int d^4 x \partial_\mu(\phi \partial^\mu \phi) - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ , a integral em todo o volume quadrimensional no primeiro termo nos rende um termo de borda (basta utilizar o Teorema de Gauss) que se anula caso seja assumido que  $\phi$  se anula no infinito, isso implica que  $S \propto -S_{cl}$  o que é um argumento mais do que suficiente

<sup>†</sup>Os termos  $\phi^2 \square \phi$  e  $\phi \square \phi^2$  são equivalentes, pelo mesmo argumento da nota acima.

(=energia) relacionado ao nosso problema é a massa de Planck  $M_P = \frac{1}{\sqrt{G_N}}$ . Reescrevemos a Lagrangeana corretamente.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\Box\phi + \frac{1}{M_P}\phi\Box\phi^2 - \frac{1}{M_P}\phi\Xi \quad (13)$$

Esta Lagrangeana (13) é justamente o que procuramos estudar, ela possui as informações do potencial newtoniano e agora de um termo que não é previsto por Newton. As equações de movimento (3) geram agora uma EDP não linear:

$$\Box\phi = \frac{1}{M_P}\Box\phi^2 - \frac{1}{M_P}\Xi \quad (14)$$

Vamos considerar a mesma fonte pontual,  $\Xi(x) = m\delta^{(3)}(\vec{x})$ , porque assim poderemos comparar diretamente com (4). Desta forma aparece um termo proporcional a  $\frac{m}{M_P}$ .

O significado da massa de Planck é análogo ao de um fator de escala. Quando chegamos na escala de Planck [7], todos os efeitos precisam ser considerados (gravitacionais e quânticos). Então a razão  $\frac{m}{M_P} \equiv \lambda$  nos informa o quanto o sistema está na escala Planck. Seria interessante saber como a solução da equação (14) se comporta em ordens de  $\lambda$ , isto é, expandir  $\phi$  em potências de  $\lambda$ . Esta é a deixa para resolvermos perturbativamente em  $\lambda$ .

Esta técnica consiste em fazer exatamente o que foi descrito: identificar um parâmetro ( $\lambda$ ) e expandir a solução da equação diferencial em termos dele. Primeiramente reescrevemos a equação em termos de  $\lambda$ .

$$\Box\phi = \frac{1}{m}\lambda\Box\phi^2 - \lambda\delta^{(3)} \quad (15)$$

O procedimento agora é chutar uma solução  $\phi = \phi_0 \sim \mathcal{O}(\lambda^0)$  e rejeitar todos os termos que são de ordem superior a  $\lambda^0$ . Conseguimos então obter  $\phi_0$ . Depois, fazemos um outro chute,  $\phi = \phi_0 + \phi_1$ , em que  $\phi_1 \sim \mathcal{O}(\lambda)$ . Novamente desprezando as ordens superiores e sabendo quem é  $\phi_0$ , obtemos  $\phi_1$ . Reiteramos este processo até a ordem desejada, e obtemos nossa solução.

Aplicando este método agora para (14), a solução  $\phi_0$  é apenas a equação de campo livre,  $\Box\phi_0 = 0$ . Mas esta solução não será considerada no resultado, pois não estamos interessados em saber o que acontece em ausência de massa. Justamente o contrário, o problema só surge devida a presença de massa, o campo livre que aparece só pode ser a solução identicamente nula. Então toda solução perturbativa que possuir como resposta a equação do campo livre será rejeitada,  $\Rightarrow \phi_0 \equiv 0$ . Para a primeira ordem,  $\phi = \phi_1$ . Então:

$$\begin{aligned} \Box\phi_1 &= \frac{1}{m}\lambda\Box\phi_1^2 - \lambda\delta^{(3)} \\ \lambda\Box\phi_1^2 \sim \mathcal{O}(\lambda^3) &\Rightarrow \Box\phi_1 = -\lambda\delta^{(3)} \end{aligned}$$

E essa é apenas a equação que já vimos para o potencial Newtoniano em unidades naturais,  $\Rightarrow \phi_1 = V$ .

Toma-se mais um ansatz da forma  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  com  $\phi_2 \sim \mathcal{O}(\lambda^2)$ , substituindo em (15) temos:

$$\Box\phi_1 + \Box\phi_2 = \frac{1}{m}\lambda\left[\Box\phi_1^2 + 2\Box(\phi_1\phi_2) + \Box\phi_2^2\right] - \lambda\delta^{(3)}$$

Observe que aparecem os seguintes termos:

$$\lambda\Box\phi_1^2 \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\lambda\Box(\phi_1\phi_2) \sim \mathcal{O}(\lambda^4)$$

$$\lambda\Box\phi_2^2 \sim \mathcal{O}(\lambda^5)$$

Desprezando todos, chegamos em:

$$\Box\phi_1 + \Box\phi_2 = -\lambda\delta^{(3)}$$

Que é trivialmente reduzida, se lembrarmos da equação para  $\phi_1$ :

$$\square\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$$

Pela mesma lógica da nulidade de  $\phi_0$ . Indo até mais uma ordem, resolvemos (15) para  $\phi = \phi_1 + \phi_3$ , com  $\phi_3 \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$ :

$$\square\phi_1 + \square\phi_3 = \frac{1}{m}\lambda \left[ \square\phi_1^2 + 2\square(\phi_1\phi_3) + \square\phi_3^2 \right] - \lambda\delta^{(3)}$$

Olhando a ordem dos termos dentro do colchete:

$$\lambda\square\phi_1^2 \sim \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\lambda\square(\phi_1\phi_3) \sim \mathcal{O}(\lambda^5)$$

$$\lambda\square\phi_3^2 \sim \mathcal{O}(\lambda^7)$$

Veja que finalmente temos um termo novo que foi desprezado anteriormente, usando a equação para  $\phi_1$  novamente, chegamos em:

$$\square\phi_3 = \frac{\lambda}{m}\square\phi_1^2$$

É intuitivo pensar que, de alguma maneira, pode-se escrever:

$$\phi_3 = \frac{\lambda}{m}\phi_1^2 + \varepsilon$$

Veja que, considerando  $\phi$  isotrópico e estático, pode-se trocar  $\square$  por  $\nabla^2$  (em coordenadas polares) =  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$  sem nenhum problema, com duas integrações sucessivas obtemos que:

$$\varepsilon(r) = A + B \ln(r)$$

com  $A$  e  $B$  constantes, mas supondo que todos os campos envolvidos se anulam no infinito, chega-se que  $A = B \equiv 0$ . Poderia-se prosseguir até ordens superiores, no entanto, em terceira já temos um potencial que é obviamente não newtoniano (portanto não é clássico\*).

O novo potencial gravitacional encontrado então escreve-se como:

$$\phi = \phi_1 + \phi_3 = \phi_1 + \frac{\lambda}{m}\phi_1^2$$

Olhando para  $\phi_1 \equiv V$  e passando para unidades naturais, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\lambda \frac{1}{r} \\ \phi_3 &= \frac{\lambda^3}{m} \frac{1}{r^2} \\ \therefore \phi &= \lambda \frac{1}{r} \left( -1 + \frac{\lambda^2}{m} \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \tag{16}$$

A parte mais desconcertante é que o potencial tem agora uma parcela repulsiva!

Temos a nossa solução, mas que informações novas/consequências ela nos trás? Vamos então ilustrar a consequência de (16) num problema concreto, da órbita de Mercúrio. Observe que o efeito deste potencial é mais relevante próximo da origem, por isso escolhemos este planeta em particular, pois é ele que está mais próximo do Sol e sente muito mais os efeitos de  $\frac{1}{r^2}$ .

---

\*O uso da expressão "clássico" aqui se dá no seu sentido histórico, sendo denominada qualquer teoria pré-Relatividade Restrita de clássica. Existe outra denominação, de caráter matemático, que separa teorias em "quânticas" e "não-quânticas". No último sentido, Relatividade poderia ser entendida como uma teoria clássica como falaremos adiante.

Para Mercúrio, podemos verificar quanto é o papel de  $\phi_3$  em  $\phi$  em questão de precisão. Temos que  $M_P \sim 10^{19}$  GeV,  $m_{Sol} \sim 10^{57}$  GeV e  $r \sim 10^{26} (\text{GeV})^{-1}$  para Mercúrio e Sol.

$$\frac{\phi_3}{\phi_1} = \frac{1}{M_P} \frac{m}{M_P} \frac{1}{r} \sim 10^{-7}$$

Isso significa que precisamos de uma medição com precisão desta ordem para perceber os efeitos de  $\phi_3$ . Isto é, os efeitos de  $\phi_3$ , por exemplo, no período de revolução são  $10^{-7}$  vezes menor que os de  $\phi_1$ . Lembrando que o período no problema de Kepler é dado por:

$$T_1^2 = 4\pi^2 r^3 \frac{1}{G_N m} \quad (17)$$

O período agora sofre uma alteração,  $T_3$ , devido a  $\phi_3$ , como uma superposição, afirmação inspirada em [3]. E pelo raciocínio anterior estima-se que  $\frac{T_3}{T_1} \sim 10^{-7}$ . O mesmo vale para a frequência angular  $\Omega$  da órbita.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow \frac{2\pi}{T_3 + T_1} \quad (18)$$

$T_3 + T_1$  é o novo período. E considerando agora que  $\frac{T_3}{T_1} \ll 1$ .

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_1(1 + \frac{T_3}{T_1})} \simeq \frac{2\pi}{T_1} \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) \quad (19)$$

Portanto a frequência angular também possui uma correção da ordem de  $10^{-7}$ . Esta é uma estimativa baseada em argumentos razoáveis, porém obter a dependência de  $T_3$  nos parâmetros relevantes do problema (as massas do Sol e de Mercúrio, a massa de Planck e a distância característica) não é uma tarefa fácil. A variação do período,  $T_3$ , surge de um pequeno deslocamento da órbita clássica, e não é claro como obter este deslocamento.

Note que para medir os efeitos é necessário então uma precisão de  $10^{-7}$ , no caso de Mercúrio. Para outros planetas este número cai rapidamente e os efeitos gerados por  $\phi_3$  se tornam realmente irrelevantes.

Um comentário pertinente também é sobre o teorema de Bertrand [2, 3]. Este teorema afirma categoricamente que se o potencial não é o Newtoniano ou o de Hooke (da forma  $H(r) = \alpha r^2$  com  $\alpha$  uma constante positiva), as órbitas limitadas não são fechadas. Ou seja, o efeito de  $\phi_3$  na órbita já trás consequência não trivial, o não fechamento de sua órbita. Porém novamente, os efeitos de  $\phi_3$  se tornam realmente consideráveis apenas para Mercúrio.

### 2.3 Digressão em RG e QFT

Já cumprimos boa parte dos nossos objetivos, em entender classicamente um problema que não é a princípio clássico. Fazemos agora uma breve conexão com as duas teorias por trás deste problema, RG e QFT.

O que aconteceria se estudássemos este problema diretamente com RG? Quando aplicadas as equações para o caso de Mercúrio e Sol, continuaríamos encontrando a solução (16), todavia com a adição de novos termos [10]. Em especial um termo proporcional a  $r^{-3}$ . Este não gera diretamente uma alteração no formato da órbita dada por (16), mas prevê um deslocamento desta órbita. Isto é, a órbita começa a precessionar em torno do Sol. Este fenômeno é conhecido como a precessão do periélio de Mercúrio (Figura 1). E esta velocidade é muito bem determinada a partir das equações.

Naturalmente que não conseguimos obter este termo  $r^{-3}$  do formalismo desenvolvido aqui. Basicamente porque a teoria com a qual trabalhamos é escalar e a gravitação não é escalar, de tal forma que toda RG é construída em cima de tensores de rank 2 para mais.

Podemos olhar o problema de outra forma. A gravidade, apesar de ter certas incompatibilidades com a teoria quântica, ainda assim pode ser manipulada com QFT. Isso é possível pois RG é uma teoria clássica de campos, e portanto facilmente generalizável para uma teoria quântica\*. E assim podemos fazer cálculos com as técnicas de QFT, em particular com os diagramas de Feynman.

Uma fonte de massa (o Sol por exemplo) gera um potencial Newtoniano. Esse termo Newtoniano é um efeito de primeira ordem como foi visto. Então, a interação gravitacional apenas se propaga da fonte até o ponto em questão. A representação em diagrama é a Figura (2)

\* É justamente essa teoria quântica que se obtém que possui todos os problemas que inviabilizam aceitar RG como uma teoria quântica.

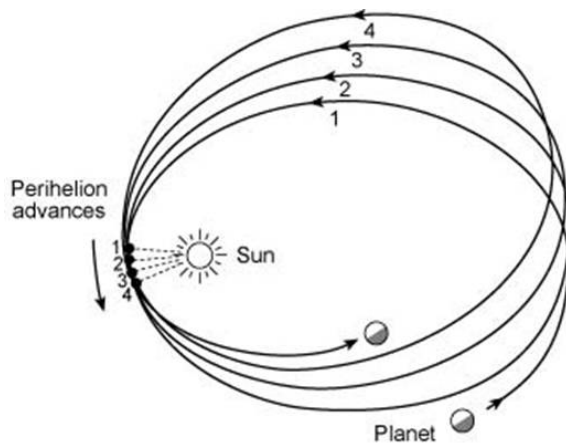


Figura 1: Ilustração da precessão do periélio



Figura 2: Representação diagramática do potencial Newtoniano

Em que a estrela seria a fonte e o ponto à esquerda o ponto no espaço no qual estamos interessados. Essa representação diagramática é de certa forma esclarecedora, ela nos diz que a interação está se propagando no espaço-tempo da fonte para todos os outros pontos. Outra vantagem em representar desta forma o potencial Newtoniano é conseguir visualizar como são os termos de ordem superior. Da mesma forma que no formalismo Lagrangeano fica intuitivo adicionar termos a Lagrangeana, imaginamos que um diagrama possa ser da forma:

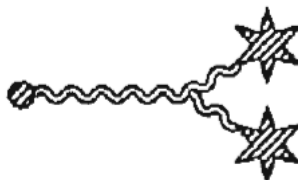


Figura 3: Diagrama com um vértice

E o problema agora é interpretá-lo. Ao que tudo indica, parece que a mesma fonte está gerando dois potenciais Newtonianos que se encontram em um certo ponto privilegiado do espaço-tempo, e depois juntos se propagam. Mas de qualquer forma não é muito claro o que está acontecendo. Para entender, lança-se mão das regras de Feynman [9]. Estas regras falam justamente como se interpreta (e como se faz contas com) estes diagramas.

Porém, não precisamos complicar demais os conceitos. Pense apenas o seguinte, no diagrama existem duas fontes,  $\Xi(x)$  e  $\Xi(y)$  (as mesmas  $\Xi$  de antes). Elas se propagam (de maneira Newtoniana) até um ponto arbitrário do espaço-tempo. Como este ponto é arbitrário, integramos sobre ele (em todo espaço-tempo). Depois os campos se propagam até o ponto de interesse.

O diagrama da Figura (3) é algo de segunda ordem como mencionado. Este fato se traduz no diagrama pelo vértice, o ponto de encontro das duas fontes. Para cada vértice num diagrama, multiplica-se pelo fator de perturbação, no caso  $M_P^{-1}$ .

Estas regras descritas nos parágrafos anteriores condensam os conceitos físicos em diagramas e omitem os cálculos, isto é, é necessário aprender como se desenha diagramas, pois o cálculo é apenas o algoritmo descrito (sem nenhum insight necessário). Aplicando este algoritmo para o diagrama (3), encontramos que o diagrama contribui com um termo que é idêntico à  $\phi_3$  anteriormente calculado. Então a soma dos diagramas (2) e (3) nos dá a equação (16). Portanto uma aplicação das técnicas de QFT para resolver o mesmo problema.



Foi comentado anteriormente sobre o fator  $r^{-3}$ . Como ele aparece em representação diagramática? De acordo com [1], ele é da forma seguinte.



Figura 4: Diagrama com um loop

Os diagramas (2) e (3) podem ser interpretados de maneira completamente clássica como discutido, porém o diagrama (4) não. Loops são fenômenos que acontecem em diagramas de Feynman em QFT de verdade e portanto são correções quânticas para as teorias clássicas. Note então que um diagrama quântico dá um resultado previsto por RG.

### 3 Conclusão

Com tudo isso exposto, percebe-se que, como diz [2] em seu prefácio, a Mecânica está longe de ser peça de museu, suscitando discussões sem respostas triviais muito interessantes. Examinamos uma lagrangeana de Klein-Gordon (que transita entre a parte clássica e quântica da Teoria de Campos) e observamos que é evidente adaptá-la para a Gravitação de Newton.

Feito isso, buscamos generalizações não-lineares e computamos as consequências de tais ideias. Fomos levados a um potencial novo que muda a órbita de Mercúrio e seu período, como era esperado e conhecido. Comparamos nossos resultados com os obtidos pelo método canônico da Relatividade Geral e tentamos entender por que há uma diferença fundamental entre eles. Ao utilizarmos os diagramas e regras de Feynman, percebemos a diferença entre os resultados como a necessidade de uma correção quântica (só que através da RG), ambos surgindo de maneira quase que acidental no desenvolvimento.

Então, a maior conclusão, além da validade de nosso método para uma análise qualitativa do movimento de Mercúrio, é a de que a Gravidade e a Teoria Quântica de Campos estão de fato inerentemente conectadas, sendo que como esse acoplamento se dá ainda é um processo desconhecido, justificando o interesse de tantos pesquisadores contemporâneos nesse tema.

### Referências

- [1] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [2] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [3] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] E.C. Oliveira and Jr. Vaz. *Métodos Matemáticos*. Editora Unicamp, 2016.
- [5] Jun John Sakurai. *Advanced quantum mechanics*. Pearson Education India, 1967.
- [6] FW Byron Jr and RW Fuller. *Mathematics of classical and quantum mechanics*. Addison-Wesley, Don Mills, 1970.
- [7] Diego Trancanelli. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica a gravidade quântica.
- [8] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [9] Michael Edward Peskin. *An introduction to quantum field theory*. Westview press, 1995.
- [10] Gerald Maurice Clemence. The relativity effect in planetary motions. *Reviews of Modern Physics*, 19(4):361, 1947.