Introdução às teorias de campo: desenvolvimento histórico e aplicações

Daniel Gomes, Luca di Beo, Neiva Carvalho, e Rafael Gomes

Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Buscou-se estudar o desenvolvimento e as aplicações das teorias de campo, a fim de avaliar o papel destas na compreensão da física. Iniciou-se com uma abordagem histórica, destacando o longo caminho trilhado até o surgimento de um conceito maduro de campo. Em seguida, apresentou-se a formulação lagrangiana da teoria clássica de campos. Utilizou-se do princípio de Hamilton e da equação de Euler-Lagrange para recuperar resultados conhecidos na gravitação newtoniana e no eletromagnetismo, mostrando assim a eficácia do modelo. Então, estudou-se o Teorema de Noether, uma importante consequência da mecânica lagrangiana, em sua versão para campos. Por fim, utilizou-se da teoria quântica de campos para sugerir que uma abordagem centrada em campos é, além de matematicamente útil, filosoficamente relevante.

Palavras-chave: campos, mecânica, formalismo lagrangiano, relatividade, eletromagnetismo

I. INTRODUÇÃO

Certos conceitos são fundamentais para a compreensão da física moderna. Alguns por serem construtos matemáticos de reconhecida utilidade; outros, devido a sua existência no mundo físico. Um desses conceitos importantes é a ideia de campo.

Matematicamente, um campo é definido como atribuição de um valor (escalar, vetorial, tensorial, etc.) a cada ponto do espaço-tempo. Fisicamente, pode-se interpretar um campo como uma área de influência – uma região do espaço na qual há a presença de uma força. A última definição não é precisa; porém, é historicamente relevante.

Indiscutivelmente, campos são ferramentas matemáticas que permitem a descrição de diversos fenômenos reais. Todavia, com o advento da mecânica quântica, tornou-se possível vê-los como ontologicamente mais fundamentais do que as próprias partículas. De fato, as conhecidas partículas fundamentais parecem ser apenas uma maneira simples de interpretarmos uma região de campo intenso. Dessa forma, é possível identificar um processo na história da física, por meio do qual os campos emergiram, migrando do mero status de ferramenta matemática para, talvez, a posição de ente mais fundamental na descrição do nosso universo.

Como esse processo ocorreu? Com o que se parece uma descrição da física centrada em campos? O que essa descrição revela sobre a realidade na qual vivemos? Com a intenção de responder a essas perguntas, iremos expor um breve estudo acerca da teoria clássica de campos.

Iniciaremos com um relato acerca do surgimento do conceito físico de campo. Em seguida, mostraremos o formalismo lagrangiano e sua generalização para sistemas contínuos, evidenciando a conexão dessa generalização com teorias de campos. Então mostraremos algumas das aplicações básicas do formalismo desenvolvido. Por fim, tentaremos entender o que uma abordagem centrada em campos revela sobre a estrutra da física e do nosso universo. Resumidamente, pretende-se apresentar as teorias de campos sob as perspectivas histórica e matemática; utilizando-se da teoria clássica para investigar a utilidade física do formalismo, e da teoria quântica para sugerir uma interpretação filosófica.

II. HISTÓRICO

O uso de campos na física foi introduzido no século XIX e, em poucos anos, adquiriu grande popularidade. Entretanto, o debate acerca da existência de áreas de influência de forças vem de tempos mais antigos.

As primeiras ponderações que tangenciam esse assunto remontam aos filósofos gregos e à questão da ação à distância. Mary B. Hesse explica, em seu livro Forces and Fields[1], que o problema de como corpos interagem ganhou importância conforme os povos começaram a distinguir entre o material e o imaterial. Nesse processo, analogias mitológicas deram lugar a explicações mecânicas para os fenômenos naturais. Contudo, mesmo após o florescer dessa nova visão no pensamento grego, a filosofia continuou permeada de analogias. Hesse ressalta essa característica como uma das principais diferenças entre a ciência moderna, pós-renascentista, e a filosofia grega.

A questão da ação a distância foi tratada por Aristóteles, que negava a possibilidade desse fenômeno. As explicações do pensador ainda não fugiam das típicas analogias do pensamento grego. Hesse critica:

> "Aristóteles, por exemplo, baseou uma parte importante de sua teoria do movimento em uma analogia com um grupo de trabalhadores movendo um barco, e assegura quase sem argumentos que um corpo pode mover outro somente se estiverem em contato. Analogias desse tipo ajudam a explicar a persistência na física da ideia de que corpos podem agir um sobre o outro somente pelo contato."

De fato, a negação da ação à distância persistiu por séculos na filosofia e na física. Por muito tempo, fenômenos como a transmissão de luz e o magnetismo eram explicados pela introdução de algum meio de transmissão[2]. Um exemplo representativo desse equívoco é a teoria do romano Tito Lucrécio acerca do fenômeno do magnetismo.

O filósofo epicurista pregava a existência de um fluxo de átomos para fora da magnetita. Esse fluxo supostamente afastava o ar ao redor da pedra, deixando um espaço vazio. Em seguida, havia um fluxo de átomos para fora do ferro. Estes ocupavam o vácuo ao redor da magnetita. Ao fim do processo, o ferro era mecanicamente puxado em direção à magnetita[3].

Nota-se que o papel dos átomos na teoria de Lucrécio é o de um mediador entre os dois corpos que interagem. Isso elimina a suposta ação à distância e mantém intacto o paradigma de Aristóteles.

Com o passar dos séculos, estudiosos propuseram explicações diferntes para o fenômeno do magnetismo. Alguns passaram a acatar a ideia de um processo à distância. Petrus Peregrinus de Maricourt, no século XIII, justificou essa ação atribuindo ao magnetismo o status de virtude[4]. William Gilbert, no século XVI, utilizou a expressão "esfera de influência" para descrever a atração magnética[3].

Mesmo com as novas teorias, a aversão no meio filosófico ao conceito de ação à distância permaneceu incólume. A teoria dos vórtices de René Descartes foi uma maneira encontrada de evitar a conclusão indesejada, reintroduzindo partículas como mediadoras da ação[5].

O advento da teoria da gravitação de Isaac Newton foi a primeira grande proposta que abalou a convicção aristoteliana. Embora Newton acreditasse que a ação da força gravitacional era de alguma forma uma ação por contato[6], ele não deixou essa crença explícita em suas obras. Isso abriu espaço para especulações, e muitos pensaram que Newton pregava uma forma de ação à distância[3].

Nos séculos seguintes, a ciência moderna desenvolveu-se com rapidez. Com a realização de mais observações e o surgimento de novas teorias, a negação absoluta do conceito de ação à distância pouco a pouco se desmoronou. Logo, a maioria dos físicos aceitava esse tipo de ação como uma explicação satisfatória para os fenômenos gravitacionais, elétricos e magnéticos.

Foi nesse contexto que uma nova ideia começou a surgir. No século XIX, Michael Faraday descreveu o fenômeno magnético com o auxílio de linhas de campo. Estas eram desenhadas ao redor de um material magnetizado para indicar a maneira pela qual outros corpos são influenciados pelo primeiro. A introdução dessas linhas marcou a entrada de um conceito primitivo, porém inusitado – o conceito de campo.

Pode-se dizer que visão de Faraday representou uma ruptura em relação ao debate da ação à distância, pois colocou a discussão em novos termos. As linhas de força não implicavam em um processo de contato contínuo à moda aristoteliana. Todavia, também não representavam uma ação direta entre dois corpos separados, como desejavam os físicos da época. O recém-introduzido campo era um novo ente, que poderia ser interpretado como independente ou dependente de algum meio de propagação.

Mesmo sem ter recebido qualquer educação formal[7], Faraday deu origem a uma revolução na maneira pela qual os fenômenos elétricos e magnéticos eram compreendidos. Uma mudança profunda como essa só é possível através da introdução de uma perspectiva fundamentada em novos pressupostos[8][9]. De fato, as visões filosóficas e teológicas de Faraday foram essenciais para a formação de seu conceito de campo. Em um artigo acerca da evolução das ideias de Faraday, Nancy Nersessian explica[10]:

> "Os principais ingredientes usados para criar suas concepções iniciais tem sido discutidos por muitos filósofos e historiadores. Eles incluem suas crenças religiosas, suas reflexões críticas acerca da natureza da matéria e da força (...); sua crença na primazia da experimentação e na importância de tentar 'ler' o que está no 'livro da natureza' (...). Estas formaram uma rede de crenças e problemas: teóricos, metodológicos, metafísicos, experimentais, e de senso comum, os quais guiaram sua experimentação e seu raciocínio."

A autora também relata que Faraday não tinha um conceito imutável de campo. Pelo contrário, suas ideias desenvolveram-se ao longo de sua vida, até chegar em uma versão madura, de acordo com a qual "a força é uma substância" e "é a única substância [existente]".

A popularização do novo conceito foi fruto da obra de James Clerk Maxwell. O físico, que unificou a explicação da eletricidade e do magnetismo em uma mesma teoria, desenvolveu sua proposta com base nas ideias de Faraday. Assim, absorveu o conceito de campo, deixando este em evidência nas suas equações[11]. Maxwell, contudo, não acatou as conclusões de Faraday acerca do papel das forças como constituintes da realidade.

A estrutura que hoje conhecemos como teoria clássica de campos desenvolveu-se em seguida, durante o fim do século XIX e as primeiras décadas do século XX. Estabeleceu-se como uma espécie de generalização da mecânica clássica, por meio da qual é possível recuperar as descrições conhecidas da gravitação e do eletromagnetismo. A esse ponto, tornou-se evidente que o novo conceito de campo era uma ferramenta matemática poderosa quando incorporada à física.

O advento da mecânica quântica marcou a necessidade de uma revisão da abordagem tradicional dos campos. Ao longo do século XX, diversas tentativas foram realizadas para descrever campos de maneira coerente com a física que surgia. Esse esforço resultou no surgimento da teoria quântica de campos (QFT), base para os modelos atuais acerca de partículas e forças fundamentais. De modo resumido, a teoria foi construida para que, matematicamente, estas possam emergir de campos básicos.

O sucesso da nova teoria confirmou sua validade do ponto de vista pragmático. Entretanto, não revelou, a princício, implicações mais profundas. Isso porque todo o construto da mecância quântica surgiu como uma visão não intuitiva, mas que funcionava. Dessa forma, eram possíveis múltiplas interpretações para os construtos matemáticos.

Esse cenário, porém, sofreu uma transformação. Pouco a pouco, surgiram resultados que ameaçavam a própria compreensão da realidade como constituída de partículas localizadas. Um exemplo é o teorema de Reeh-Schlieder, sobre o qual Eliano Pessa disserta[12]:

> "[O teorema] indubitavelmente aponta para o fato de que correlações a larga escala caracterizando o estado de vácuo em teorias quânticas fazem ser impossível qualquer interpretação da QFT como descrevendo conjuntos de partículas interagentes, puntiformes ou suavemente localizadas."

Como consequência desses desenvolvimentos da teoria, o debate acerca dos campos reacendeu na filosofia. Se as partículas não podem ser ontologicamente fundamentais, poderiam os campos assim ser? Não há consenso hoje acerca dessa questão. Contudo, ela indica que a relevância dos campos transcende o mero pragmastimo, atingindo questões importantes da filosofia (mais especificamente, da ontologia da realidade física).

III. FORMALISMO

O primeiro passo para compreender de maneira mais profunda a relevância das teorias de campo é o estudo da linguagem dessas teorias. Nesta seção, mostraremos de maneira resumida a estrutura da teoria clássica de campos, pelas lentes do formalismo lagrangiano.

As equações que descrevem a teoria podem ser obtidas através de uma generalização das equações da mecânica clássica. Esse processo é realizado mediante uma passagem de sistemas discretos para sistemas contínuos; em outras palavras, quando se assume o limite $N \to \infty$ para o número de graus de liberdade de um sistema.

A. Sistemas discretos

1. O Princípio de Hamilton

Considere um sistema com um número finito N de graus de liberdade. Seja ($q_1(t)$, $q_2(t)$,..., $q_N(t)$) um conjunto de coordenadas generalizadas que descreve o sistema. Desejamos descrever o movimento entre os instantes de tempo t_1 e t_2, ou seja, encontrar a curva "desenhada" pelas coordenadas generalizadas no espaço N-dimensional durante o intervalo considerado.

O princípio de Hamilton[13] afirma que a curva realmente percorrida será tal que seja extremizada a ação S definida na Eq. 1:

$$S(q_k, \dot{q_k}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_k, \dot{q_k}, t) \tag{1}$$

onde L é chamada de lagrangiana, e pode ser calculada como $L = T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial.

2. Equação de Euler-Lagrange

Partindo do Princípio de Hamilton, calculamos a variação δS, e então encontramos as equações de movimento igualando o valor encontrado a zero.

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_k, \dot{q_k}, t) \right) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \delta \dot{q_k} \tag{3}$$

Integrando por partes o segundo termo, temos:

$$\delta S = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \right) \delta q_k \tag{4}$$

O primeiro termo, conhecido como "termo de superfície", é nulo, pois $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2)$. Assim, temos:

$$\delta S = -\sum_{k=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} \right) \delta q_k \tag{5}$$

Impondo $\delta S = 0$ para qualquer δq_k e qualquer intervalo de integração, encontramos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{6}$$

Esse resultado é conhecido como Equação de Euler-Lagrange.

B. Sistemas contínuos

1. Introdução

Para desenvolver uma teoria de campos na forma lagrangiana, é necessário estender o formalismo apresentado para sistemas contínuos. Essa extensão torna-se fácil de vizualizar por meio de um exemplo.

Um sistema contínuo típico consiste em uma corda vibrante. Esta pode ser modelada como uma distribuição contínua de matéria. Quando ocorre uma vibração, cada ponto da corda sofre um deslocamento em relação à posição de equilíbrio. A configuração da corda em um dado instante é descrita pelo deslocamento de cada ponto da corda nesse instante. Nesse caso, define-se $\varphi(x,t)$ como uma coordenada associada a cada ponto x da corda.

Nos sistemas discretos, são utilizadas coordenadas generalizadas $q_k(t)$, para as quais k representa um número inteiro. Por outro lado, quando se considera um sistema contínuo, k é uma variável contínua, representada por x em $\varphi(x,t)$. Como no caso da corda, para campos em uma dimensão espacial, utiliza-se a notação $\varphi(x,t)$ para o deslocamento transversal do ponto x no instante t.

Sistemas contínuos de mais dimensões requerem uma variável $\varphi(\vec{x},t)$, com $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, e que pode ser escalar ou vetorial. Matematicamente, φ representa um campo, pois atribui um valor a cada ponto do espaço-tempo.

2. Equação de movimento de campos

O procedimento para obter as equações de sistemas contínuos não muda. A partir de uma lagrangiana, calcula-se a ação. Então, partindo do princípio de Hamilton, obtém-se as equações de movimento.

Em se tratando de campos, considera-se interações entre corpos ou partículas que ocorrem localmente. Essas interações são mediadas por um campo que se propaga de uma partícula para outra, com uma certa velocidade. O campo interage consigo mesmo, num ponto e numa vizinhança infinitesimal desse ponto. Portanto, as teorias de campo descritas pela formulação lagrangiana são teorias que envolvem interações locais que se propagam com velocidade finita.

Num caso unidimensional, a lagrangiana depende do campo $\varphi(x,t)$ e de suas derivadas, tanto temporais quanto espaciais $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$.

A lagrangiana para sistemas discretos corresponte a uma soma sobre valores de k e depende de $\dot{q}_k$. No caso de sistemas contínuos, a soma é substituída por uma integral, e a lagrangiana é dada pela Eq. 7.

$$L = \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi', x, t) \tag{7}$$

Na expressão, $\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ e $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. A função $\mathcal{L}$ é chamada de densidade lagrangiana, pois é uma grandeza que, integrada no espaço, fornece uma lagrangiana.

A ação é dada pela integral no tempo da densidade lagrangiana:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dtL = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi', x, t)dx \tag{8}$$

A equação de campo de Lagrange decorre do princípio de Hamilton ($\delta S = 0$). As condições impostas sobre $\delta\varphi$ são representadas pelas Eqs 9 e 10

$$\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0 \tag{9}$$

$$\delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0 \tag{10}$$

A Eq. 9 indica que, para qualquer valor de x, $\delta\varphi$ deve ser igual à zero entre os instantes t_1 e t_2. A Eq. 10 indica que as variações são nulas nas fronteiras espaciais. Admitindo essas condições, demonstra-se a Eq. 11,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'}\delta\varphi' \right) \tag{11}$$

na qual podemos utilizar as seguintes relações:

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\delta\varphi, \qquad \delta\varphi' = \frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi \tag{12}$$

Então, integra-se os dois termos da Eq. 11 por partes (Eqs. 13 e 14 respectivamente).

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'}\delta\varphi \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta\varphi \right) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \delta\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\varphi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta\varphi \right) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente, substituindo as Eqs 13 e 14 na Eq. 11, obtemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) \right] \delta \varphi = 0 \tag{15}$$

Como a Eq. 15 deve valer para qualquer perturbação $\delta\varphi$, obtemos a Eq 16, que é a equação de Euler-Lagrange para um campo φ em uma dimensão.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) = 0 \tag{16}$$

Uma generalização tridimensional da Eq. 16 pode ser escrita na forma covariante (Eq. 17) unindo as derivadas espaciais e temporais. Essa abordagem é preferível para aplicações relativísticas.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{17}$$

IV. APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS

Tendo uma visão geral do formalismo a ser utilizado, nesta seção, serão desenvolvidas algumas aplicações básicas, com o intuito de exemplificar como a escolha de uma lagrangiana ou ação adequada leva a resultados já conhecidos.

A. Campo gravitacional

Como primeira ilustração do formalismo lagrangiano para campos, será estudada a gravitação newtoniana. Visto que, na extensão do formalismo lagrangeano para sistemas contínuos, utiliza-se das derivadas do campo ($\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ e $\nabla\varphi$) ao invés da velocidade, e dado que a lagrangeana da gravitação newtoniana não deve depender explicitamente do tempo, propõe-se uma lagrangeana com termo cinético proporcional a $\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi$. Já para o termo potencial, no caso interpretado como um termo de interação própria do campo, adota-se um comportamento linear em φ. Assim, propõe-se para a lagrangeana a Eq. 18[14].

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi - \rho\varphi \tag{18}$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange, obtém-se:

$$\rho - \nabla \left(k \nabla \varphi \right) = 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad k\nabla^2\varphi = \rho \tag{20}$$

Este resultado é a equação de Poisson para o campo gravitacional, com constante $k = \frac{1}{4\pi G}$.

B. Relatividade restrita

Considere agora uma partícula livre relativística. Encontraremos uma ação apropriada para essa situação, a fim de tornar possível a descrição do movimento de um cojunto de partículas no campo eletromagnético. Sabe-se que o movimento é descrito pela trajetória que extremiza a ação. Logo, os extremos da ação não podem depender do referencial; caso contrário, observadores em velocidades distintas encontrariam trajetórias distintas para a partícula. Assim, faz sentido pensar que a ação deve ser invariante por transformações de Lorentz (mudanças de referencial na relatividade restrita).

Considere o intervalo ds dado pela Eq. 21 (Adotaremos sempre unidades tais que $c = 1$ para simplificação).

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \tag{21}$$

O diferencial de tempo no referencial da própria partícula (tempo próprio), será igual a ds. Note que esta grandeza deve ser um invariante de Lorentz, pois o intervalo de tempo em uma trajetória medido pela própria partícula não depende do referencial. Assim, define-se a ação como proporcional à integral de ds por sobre a linha de mundo da partícula[15]. A massa aparece para que as unidades estejam corretas.

$$S = -m\int ds \tag{22}$$

Parametrizando a linha de mundo como $ds^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, obtém-se:

$$\Rightarrow S = -m\int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \tag{23}$$

C. Eletromagnetismo

Uma vez que é conhecida a ação para uma partícula livre na relatividade restrita, acrescentando devidos termos, pode-se ter uma formulação para o eletromagnetismo. Mostra-se que, a partir dessa formulação, pode-se chegar às equações de Maxwell e à equação que fornece a Força de Lorentz.

1. *Ação proposta*

Ao incluir um campo eletromagnético, devem surgir dois novos termos na ação, referentes à interação partícula-campo e à interação do campo eletromagnético com si mesmo respectivamente[16]. Assim, temos uma ação descrita pela Eq. 24; ou, escrevendo o primeiro termo explicitamente e os demais em função da da densidade lagrangiana, pela Eq. 25[17], para um sistema de N partículas.

$$S = S_{part} + S_{int} + S_{em} \tag{24}$$

$$\Rightarrow S = \int \sum_{a=1}^{N} -m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu} + \int d^4x (\mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{em}) \tag{25}$$

Propõe-se, para as densidades lagrangianas $\mathcal{L}_{int}$ e $\mathcal{L}_{em}$, as Eqs. 26 e 27 respectivamente, nas quais J_μ é a quadricorrente, A_μ é o quadripotencial e $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético.

$$\mathcal{L}_{int} = -J^\mu A_\mu \tag{26}$$

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{27}$$

2. *Equações de Maxwell*

Igualando a variação δS da ação devido a uma perturbação δA^μ no potencial[16], temos:

$$\delta S = \delta \left(\int \sum_{a=1}^{N} -m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu} + \int d^4x \left(-J^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \delta S = \int d^4x \left(-J^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \right) \tag{29}$$

Pela definição do tensor $F^{\mu\nu}$, segue a simplificação:

$$F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} (\partial^\mu (\delta A^\nu) - \partial^\nu (\delta A^\mu)) = F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) - F_{\mu\nu} \partial^\nu (\delta A^\mu) \tag{30}$$

Note que $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico (trocar a ordem dos índices altera apenas o sinal). Logo,

$$F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) = -F_{\mu\nu} \partial^\nu (\delta A^\mu) \tag{31}$$

Utilizando as Eqs. 30 e 31; e, em seguida, manipulando os termos, obtemos:

$$F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = 2 F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) = -2 \partial^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu = -2 \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu \tag{32}$$

Substituindo a Eq. 32 na Eq. 29 e impondo $\delta S = 0$, encontramos:

$$0 = \delta S = \int d^4x \, (-J^\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu}) \, \delta A_\nu \tag{33}$$

Como a Eq. 33 não deve depender da perturbação no quadripotencial nem do intervalo de integração, o termo entre parênteses deve ser nulo. Assim, concluimos que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{34}$$

Essa é a forma covariante das duas equações de Maxwell inomogêneas. Alternativamente, o mesmo resultado pode ser obtido substituindo as densidades lagrangianas (Eqs. 26 e 27) diretamente na equação de Euler-Lagrange (Eq. 17). Nesse caso, tomamos as derivadas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_{\mu\nu}} F^{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -F^{\mu\nu} \tag{35}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -J^\nu \tag{36}$$

Substituindo essas derivadas na Eq. 17, obtemos novamente a Eq. 34.

As demais equações de Maxwell (homogêneas), nesse formalismo, são identidades (decorrem da identidade de Bianchi para o tensor $F^{\mu\nu}$(Eq. 37)[16]).

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} \tag{37}$$

3. Força de Lorentz

Agora consideramos a variação δS devido a uma perturbação δx^ν. Note que o terceiro termo da ação desaparecerá, pois este depende apenas do campo. Reescrevendo a corrente como uma soma do movimento de todas as cargas q_a, temos:

$$\delta S = \delta \left(\sum_{a=1}^{N} -m_a \int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx_a^\mu}{d\xi}\frac{dx_a^\nu}{d\xi}} - q_a \int d\xi A_\mu \frac{dx^\mu}{d\xi} \right) \tag{38}$$

Note que parametrizamos a ação, escrevendo-a em termos do parâmetro ξ. Assim, tomando esse parâmetro como sendo o tempo próprio τ, segue:

$$\delta S = -\sum_{a=1}^{N} \int d\tau \left(m_a \eta_{\mu\nu} \frac{dx_a^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta x_a^\nu + q_a \left(A_\mu \frac{d}{d\tau}\delta x_a^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_{\nu(a)}} \delta x_a^\nu \frac{dx_a^\mu}{d\tau} \right) \right) \tag{39}$$

$$\Rightarrow \quad \delta S = -\sum_{a=1}^{N} \int d\tau \left(m_a \eta_{\mu\nu} \frac{dx_a^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta x_a^\nu + q_a \frac{dx_a^\nu}{d\tau} \delta x_a^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right) \tag{40}$$

Impondo $\delta S = 0$, obtemos:

$$0 = \sum_{a=1}^{N} \int d\tau \left(m_a \eta_{\mu\nu} \frac{dx_a^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \delta x_a^\nu + q_a \frac{dx_a^\nu}{d\tau} \delta x_a^\mu F_{\mu\nu} \right) \tag{41}$$

Como essa equação deve valer para qualquer δx_a^ν e qualquer intervalo de integração, o termo entre parênteses deve ser nulo. Assim, para uma partícula de massa m e carga q,

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q \eta^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{42}$$

Essa equação é a forma covariante da força de Lorentz.

V. EXTENSÃO DO FORMALISMO

A. Teorema de Noether

Tendo explorado, por meio do formalismo lagrangiano, as principais aplicações da teoria clássica de campos, consideraremos pela mesma perspectiva o papel das simetrias. Uma simetria pode ser definida como a invariância do sistema por uma dada transformação. Dessa forma, partimos da expressão genérica para uma transformação infinitesimal descrita por N parâmetros[18]:

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \tag{43}$$

$$\varphi'_\alpha(x') = \varphi_\alpha(x) + \Delta\varphi_\alpha(x) \tag{44}$$

onde as variações em x e em φ são dadas pelas Eqs. 45 e 46.

$$\Delta x^\mu = \sum_{i=1}^{N} X^{\mu\ (i)} \epsilon_i \tag{45}$$

$$\Delta\varphi_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \Psi_\alpha^{(i)} \epsilon_i \tag{46}$$

Podemos escrever a variação no campo como:

$$\Delta\varphi_\alpha(x) = \delta\varphi_\alpha(x) + \partial_\mu \varphi_\alpha(x) \Delta x^\mu \tag{47}$$

Se o sistema é invariante por essa transformação, os extremos da ação devem ser invariantes. Assim, a variação ΔS para uma transformação infinitesimal deve ser nula. Da Eq. 8, temos:

$$\Delta S = S' - S = \int d^4x' \mathcal{L}(x'^\mu, \varphi'_\alpha(x'^\mu), \partial_\beta \varphi'_\alpha(x'^\mu)) - \int d^4x \mathcal{L}(x^\mu, \varphi_\alpha(x^\mu), \partial_\beta \varphi_\alpha(x^\mu)) = 0 \tag{48}$$

onde

$$\mathcal{L}(x'^{\mu},\varphi'_{\alpha}(x'^{\mu}),\partial_{\beta}\varphi'_{\alpha}(x'^{\mu}))=\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\mu}}\Delta x^{\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha}}\Delta\varphi_{\alpha}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi_{\alpha})}\Delta(\partial_{\beta}\varphi_{\alpha}) \tag{49}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{L}(x'^{\mu},\varphi'_{\alpha}(x'^{\mu}),\partial_{\beta}\varphi'_{\alpha}(x'^{\mu}))=\mathcal{L}+\frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}}\Delta x^{\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha}}\delta\varphi_{\alpha}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\beta}\varphi_{\alpha})}\partial_{\beta}(\delta\varphi_{\alpha}) \tag{50}$$

Substituindo o penúltimo termo da Eq. 50 na Eq. 17 (Euler-Lagrange) e manipulando os índices, podemos agrupá-lo com o último termo pela regra da cadeia, de modo que ambos sejam expressos como uma derivada em x^{μ}. Logo, obtemos:

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}}\Delta x^{\mu}+\frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\delta\varphi_{\alpha}\right) \tag{51}$$

Substituindo na Eq. 48, e escrevendo o diferencial d^4x' como $d^4x(1+\partial\Delta x^{\mu}/\partial x^{\mu})$[18], obtemos:

$$\Delta S=\int d^4x\frac{\partial\Delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\mathcal{L}+\left(\frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}}\Delta x^{\mu}+\frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\delta\varphi_{\alpha}\right)\right)\left(1+\frac{\partial\Delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right)=0 \tag{52}$$

Desprezando o termo $\partial\Delta x^{\mu}/\partial x^{\mu}$ na expressão entre parênteses, pois este gera somente termos de ordem quadrática nas variações, encontramos:

$$\Delta S=\int d^4x\frac{\partial\Delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\mathcal{L}+\frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}}\Delta x^{\mu}+\frac{d}{dx^{\mu}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\delta\varphi_{\alpha}\right)=0 \tag{53}$$

Podemos simplificar os dois primeiros termos pela regra da cadeia. Assim:

$$\Delta S=\int d^4x\frac{d}{dx^{\mu}}\left(\mathcal{L}\Delta x^{\mu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\delta\varphi_{\alpha}\right)=0 \tag{54}$$

Usamos, então, as Eqs 45 e 46 para descrever as variações Δx^{μ} e $\delta\varphi_{\alpha}$ em termos dos parâmetros infinitesimais ϵ_i. Finalmente, encontramos:

$$0=\Delta S=\int d^4x\sum_{i=1}^{N}-\epsilon_i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}X^{\nu\ (i)}-\Psi_{\alpha}^{(i)}\right)-\mathcal{L}X^{\mu\ (i)}\right) \tag{55}$$

Note que há uma soma em ν, representada pela convenção de Einstein. Uma vez que a expressão deve ser válida para quaisquer valores de ϵ_i, decorre:

$$\partial_{\mu}J^{\mu(i)}=0, \tag{56}$$

onde

$$J^{\mu(i)}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}X^{\nu\ (i)}-\Psi_{\alpha}^{(i)}\right)-\mathcal{L}X^{\mu\ (i)} \tag{57}$$

Dessa forma, a Eq. 56 consiste em uma série de N leis de conservação, expressas aqui na forma de equações de continuidade para as correntes $J^{\mu(i)}$, chamadas de *Correntes de Noether*. Esse resultado é conhecido como a versão generalizada do Teorema de Noether. Lembrando que partimos do fato de que o sistema é invariante por uma transformação infinitesimal que envolve N parâmetros, cada um representando uma simetria, o teorema demonstrado implica que cada simetria contínua em um sistema é equivalente a uma lei de conservação.

B. O tensor energia-momento

Podemos definir um tensor $T_{\mu\nu}$ que expressa a corrente de Noether para translações no espaço-tempo, ou seja, transformações dadas por:

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + g^{\mu\nu}\epsilon_{\nu} \\ \varphi'_{\alpha} = \varphi_{\alpha} \end{cases}, \tag{58}$$

ou seja,

$$\begin{cases} X^{\mu\ (i)} = g^{\mu\nu} \\ \Psi_{\alpha}^{(i)} = 0 \end{cases} \tag{59}$$

Substituindo a Eq. 59 na Eq. 57, obtemos o tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{\alpha})}\frac{\partial\varphi_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}g^{\sigma\nu} - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \tag{60}$$

Esse tensor pode ser entendido fisicamente como o fluxo da componente μ do quadrimomento em uma superfície dada por $x^{\nu} = constante$[19]. Trata-se de um elemento muito importante no desenvolvimento da teoria da relatividade geral.

VI. A NATUREZA DOS CAMPOS

A perspectiva clássica é suficiente para dar uma ideia da eficácia do estudo de campos. Por meio dela, encontram-se equações corretas para a gravitação e o eletromagnetismo. Além disso, tornam-se evidentes leis de conservação, por meio do Teorema de Noether.

Mesmo assim, essa perspectiva é limitada. Sabe-se que a mecânica clássica é uma descrição válida do mundo macroscópico, mas que esta não se aplica a partículas e estruturas de pequena escala. Da mesma maneira, a teoria clássica de campos não é suficiente para descrever o mundo microscópico.

A abordagem quântica é marcada pelas mesmas características realçadas até aqui – fornece uma descrição acurada dos fenômenos quânticos, e torna possível a determinação de propriedades decorrentes de simetrias. Entretanto, ela contribui em um aspecto a mais, pois mostra que a validade dos campos não é restrita ao âmbito matemático.

Nesta seção, serão esboçadas algumas considerações acerca da teoria quântica de campos, com foco mais filosófico do que matemático, para buscar entender a natureza desses campos.

A. Quantização do Campo

Na passagem para uma descrição quântica, dois processos são fundamentais. Primeiro, transforma-se o campo $\varphi(\vec{x},t)$ e a variável $\pi(\vec{x},t) \equiv \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi)$ em operadores quânticos. Nota-se que $\pi(\vec{x},t)$ realiza o papel de momento conjugado ao campo. Em seguida, considera-se os comutadores desses novos operadores, impondo as relações das Eqs. 61, 62 e 63[20].

$$[\hat{\varphi}(\vec{x},t), \hat{\varphi}(\vec{x}',t)] = 0 \tag{61}$$

$$[\hat{\pi}(\vec{x},t), \hat{\pi}(\vec{x}',t)] = 0 \tag{62}$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{x},t), \hat{\pi}(\vec{x}',t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{63}$$

Os operadores momento e hamiltoniano, utilizados em toda a mecância quântica, são dados por:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{64}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + V(\vec{x},t)) \tag{65}$$

Os valores esperados desses operadores fornecem, respectivamente, o momento linear e a energia do sistema.

B. Criação e Aniquilação

Após a solução de uma equação para o campo $\hat{\varphi}(\vec{x},t)$, conhecida como a Equação de Klein-Gordon[20], torna-se conveniente reescrever $\hat{H}$ e $\hat{p}$ em termos dos operadores $a^\dagger(k)$ e $a(k)$. Estes são semelhantes aos operadores de criação e aniquilação de um oscilador harmônico quântico, os quais permitem adicionar ou retirar um quantum de energia do sistema.

Pode-se interpretar os operadores $a^\dagger(k)$ e $a(k)$ como representantes da criação e aniquilação de partículas. Dessa forma, o operador $a^\dagger(k)$, agindo sobre um estado de vácuo, cria uma partícula de momento k. É possível determinar a natureza da partícula criada com base nas características do campo em questão. Um campo escalar real irá gerar bósons, enquanto um campo escalar complexo irá gerar uma partícula com sua anti-partícula[21].

C. Interpretações

É evidente que, na teoria quântica de campos, as partículas surgem a partir de campos matemáticos. O processo de criação e aniquilação mostra que aquelas correspondem a estados excitados destes. Isso leva a duas possibilidades de interpretação.

Por um lado, poder-se-ia argumentar que os campos são simplesmente um aparato matemático que descreve bem os processos reais; estes, ocorrendo com partículas. Essa visão é a mais intuitiva, tendo em vista que o conceito de campo é mais abstrato do que o de partícula. Por outro lado, poder-se-ia dizer que os campos existem como constituintes de nosso universo, enquanto as partículas são apenas a forma pela qual interpretamos essa realidade. Essa visão é motivada pela busca de um significado à primazia dos campos na descrição teórica.

Em outras palavras, a questão pode ser colocada da sequinte forma: O que é ontologicamente fundamental no universo? Partículas ou campos?

Quando a teoria quântica de campos estava no início de seu desenvolvimento, as duas respostas pareciam igualmente razoáveis. No entanto, novos resultados teóricos começaram a surgir, e todos apontavam para a mesma direção: partículas não podem ser entes fundamentais na realidade.

O efeito Unruh mostra que um observador em um referencial acelerado irá identificar partículas em um estado de vácuo[22]. Isso sugere que a própria presença ou ausência de partículas seja dependente do referencial.

Um teorema demonstrado por Malament expressa a impossibilidade da construção de uma mecânica quântica relativística de partículas localizáveis na ausência de uma teoria de campos[23]. Essencialmente, a presença de uma partícula está sujeita à existência anterior de um campo.

O argumento de Malament parte de uma série de premissas, dentre as quais está a definição de partícula como um ente localizado. Todavia, outras demonstrações mais recentes fornecem resultados similares sem partir da premissa da localidade das partículas. Um desses resultados, demonstrado por Doreen Fraser implica que, em se tratando de sistemas interagentes, não se pode incluir partículas na ontologia da QFT[24].

Essas conclusões, embora não sejam necessariamente indiscutíveis, parecem desacreditar a visão de que a realidade é constituída primordialmente por partículas. Por mais que campos sejam menos tangíveis do que partículas do ponto de vista humano, eles provavelmente possuem papel mais fundamental na constituição da realidade.

VII. CONCLUSÃO

Estudamos, inicialmente, o surgimento histórico do conceito de campo na física, percebendo que o desenvolvimento deste só foi possível após a superação de um debate antigo acerca de ação à distância. A introdução do conceito foi, em última instância, fruto de uma mudança no pensamento, nas crenças básicas a partir das quais o conhecimento científico é construído. Analisamos a teoria clássica de campos, através do formalismo lagrangiano, ressaltando como pode-se obter, por este meio, os principais resultados da gravitação newtoniana e do eletromagnetismo. Em seguida, ponderamos sobre teoremas gerais que decorrem da minimização da ação em uma teoria de campos. Com essas considerações, é fácil perceber a utilidade prática de olhar para a física por essa perspectiva.

Entretanto, não paramos por aqui. Ao olhar para o desenvolvimento da física moderna, notou-se uma transição no entendimento da essência da realidade. Parece fazer mais sentido, à luz da mecânica quântica, interpretar as próprias partículas não como entidades fundamentais, mas sim como uma manifestação de campos.

Historicamente, a física foi desenvolvida em como a descrição do comportamento de partículas pois estas são uma descrição mais intuitiva do mundo que vemos; porém, a nível quântico, é possível que o constituinte mais fundamental da natureza sejam os próprios campos. Nesse sentido uma teoria de campos não é apenas uma ferramenta matemática útil, mas também uma descrição essencial da realidade.

---

[1] M. B. Hesse, *Forces and Fields: The Concept of Action at a Distance in the History of Physics* (1961).

[2] E. McMullin, Physics in Perspective **4** (2002).

[3] J. F. M. Rocha, Rev. Bras. Ensino Fís. **vol. 31** (2009).

[4] A. C. Sparavigna, Mechanics, Materials Science & Engineering Journal **n. 2** (2015).

[5] J. M. F. Bassalo, Rev. Bras. Ensino Fís. **vol. 16** (1994).

[6] I. Newton, «Original letter from Isaac Newton to Richard Bentley,» `http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/THEM00258`, acessado em 3 de Novembro de 2017.

[7] `http://www.bbvopenmind.com/en/faraday-electromagnetic-theory-light/`, Acessado em 3 de Novembro de 2017.

[8] T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions* (University of Chicago Press, Chicago, 1996).

[9] M. Polanyi and H. Prosch, *Meaning* (University of Chicago Press, Chicago & London, 1975).

[10] N. J. Nersessian, in *Faraday Rediscovered*, edited by D. Gooding and F. A. J. L. James (Palgrave,

London, 1985).

[11] K. Johnson, ≪James Clerk Maxwell - The Great Unknown,≫ http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Johnson/index.html (2002), Acessado em 3 de Novembro de 2017.

[12] E. Pessa, *The concept of particle in Quantum Field Theory*.

[13] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*.

[14] A. Vecchiato, *Variational Approach to Gravity Field Theories: From Newton to Einstein and Beyond*, 1st ed. (Springer, 2017).

[15] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, 2004).

[16] D. Trancanelli, ≪Eletromagnetismo I (Notas de Aula, 2^o Semestre/2017),≫ http://www.fma.if.usp.br/~dtrancan/notasEM.html, Acessado em 2 de Novembro de 2017.

[17] B. Dutta, ≪Electromagnetic Theory II,≫ http://people.physics.tamu.edu/dutta/chapter7.pdf, Acessado em 2 de Novembro de 2017.

[18] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2nd ed. (Editora Livraria da Física, 2007).

[19] G. Alexander, ≪General Relativity: Notes,≫ https://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/physics/current/teach/module_home/px436/notes/, Acessado em 7 de Novembro de 2017.

[20] M. Dasgupta, ≪An Introduction to Quantum Field Theory,≫.

[21] D. Tong, ≪Quantum Field Theory,≫ http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html, Acessado em 7 de Novembro de 2017.

[22] L. C. B. Crispino, Review of Modern Physics **80** (2007).

[23] R. Clifton, *Perspectives on Quantum Reality: Non-Relativistic, Relativistic and Field-Theoretic* (1996).

[24] D. Fraser, ≪The Fate of ‘Particles’ in Quantum Field Theories With Interactions,≫ (2008).