UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
Departamento de Economia

Programa de Pós-Graduação em Economia

Microeconomia II (EAE5706)
Prof. Rafael V. X. Ferreira

Lista de Exercícios 10 – Desenho de Mecanismos

Questão 1 Esse exercício é conceitual.

a) Defina formalmente um mecanismo Γ.

b) Defina um equilíbrio de Nash Bayesiano do mecanismo Γ.

c) Defina uma função de escolha social implementável em equilíbrio de Nash Bayesiano pelo mecanismo Γ.

d) Defina uma função de escolha social *ex-post* eficiente.

e) Enuncie o Princípio da Revelação para equilíbrio de Nash Bayesiano.

f) Demonstre o Princípio da Revelação para equilíbrio de Nash Bayesiano.

Questão 2 Considere um ambiente quase-linear em que $u_i(x, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + \bar{m}_i + t_i$ e $X = \left\{(k, t_1, ..., t_I) \in K \times \mathbb{R} \mid \sum_i^I = 1 t_i \leq 0\right\}$.

a) Mostre que não existe uma função de escolha social ditatorial.

b) Dê um exemplo de implementação em estratégias dominante neste caso (dica: mencionar um exemplo apropriado já é suficiente).

c) Explique porque seus resultados são consistentes com o Teorema de Gibbard-Satterthwaite.

Questão 3 Considere uma sociedade composta por $I > 2$ indivíduos com preferências $\succsim_i^{\theta_i}$ por dois *outcomes*: A e B. O conjunto de todos os perfis de tipos é $\Theta = \{-1, 0, 1\}^I$ e as preferências do indivíduo i pode ser tanto $A \succsim_i^1 B, A \sim_i^0 B$ ou $B \succsim_i^{-1} A$.

a) Considere a função de escolha social

$$f(\theta_1, ..., \theta_I) = \begin{cases} A, & \text{se } \theta_1 \in \{1, 0\} \\ B, & \text{se } \theta_1 = -1 \end{cases}$$

f é implementável em estratégias dominantes? Prove.

b) Agora seja I_A e I_B denotar o número de indivíduos em $\{1, ..., I\}$ tal que $\theta_i = 1$ e $\theta_i = -1$, respectivamente. Nessa parte do exercício, nós descreveremos os perfis de tipos pelo par (I_A, I_B). Considere a função de escolha social:

$$g(I_A, I_B) = \begin{cases} A, & \text{se } I_A \geq I_B \\ B, & \text{se } I_A < I_B \end{cases}$$

g é implementável em estratégias dominantes? Prove.

Questão 4 Dois parceiros, João e Maria, devem acabar com sua parceria. João tem m "ações"da parcerira, enquanto Maria possui n de participação. (Todas as ações são idênticas e João e Maria são os únicos donos (detêm todas as ações, $m + n$). É conhecimento comum que os valores de uma ação de cada parceiro são coletados independentemente de uma distribuição uniforme em $[0, 1]$, mas o valor individual de cada ação dos parceiros são informações privadas (tanto para Maria quanto para João).

a) Caracterize a regra de alocação eficiente de participação (ações).

b) Considere o seguinte mecanismo: cada parceiro submete uma proposta (*bid*) de venda de uma ação; o parceiro com o *bid* mais alto compra as ações do outro parceiro ao preço (por ação) igual à proposta mais alta. Derive um equilíbrio de Bayes-Nash deste mecanismo. [dica: observe aquele em que o *bid* de cada parceiro é uma função linear do seu valor.]

c) Considere o caso em que $m = n > 0$. Qual é a função de escolha social que é implementada pelo mecanismo em (b)? Verifique que *truth-telling* é um equilíbrio de Nash bayesiano. Ela é eficiente *ex-post*? É individualmente racional (ou satisfaz as restrições de participação)?

d) Agora assuma que $m > 0$ e $n = 0$. Qual é a função de escolha social que é implementada pelo mecanismo em (b)? Verifique que *truth-telling* é um equilíbrio de Nash bayesiano. Ela é eficiente *ex-post*? É individualmente racional (ou satisfaz as restrições de participação)?

Questão 5 Considere uma economia de trocas puras com $L < \infty$ bens e $I < \infty$ agentes, $E = \{((X_i, \omega_i, \succsim_i (\theta_i))_{i \in I}\}$ em que $X_i \in \mathbb{R}^L_+$ e e a relação de preferências $\succsim_i (\theta_i)$ é definida por uma função utilidade contínua, côncava e estritamente crescente $u_i(., \theta_i) : X_i \to \mathbb{R}$. Assuma que a dotação inicial de cada agente satisfaz $\omega_i = (\omega_1 i, ..., \omega_L i) >> 0$. O conjunto de alternativas é

$$X = \left\{ (x_1, ..., x_I) : x_i \in \mathbb{R}^L_+ \text{ e } \sum_i x_{li} \leq \sum_i \omega_{li} \text{ para} l = 1, ..., L \right\}$$

Considere a função de escolha social

$$f : \Theta \to X$$
$$\theta \to (f_i(\theta_i))_{i \in I}$$

que, para cada vetor de tipos θ, leva a uma alocação de equilíbrio competitivo.

a) Defina o equilíbrio competitivo para E.

b) Seja $\{p, (x_i)_{i\in I}\}$ um equilíbrio competitivo. Mostre que $p \in \mathbb{R}^L_+ +$ e que se $\tilde{x}_i \succsim_i (\theta_i) x_i$, então $p\,\tilde{x}_i \geq p\,\omega_i$.

c) Mostre que a função de escolha social f é *ex-post* eficiente.

Questão 6 Seja K um conjunto finito de projetos e I um conjunto finito de agentes, que podem ser de um tipo $\theta_i \in \Theta_i = [\underline{\theta_i}, \bar{\theta}_i]$ (com distribuições independentes ϕ_i). O conjunto de alternativas é $X = \left\{(k,t) \in K \times \mathbb{R}^I : \sum_{i\in I} t_i \leq 0\right\}$ e a utilidade de um indivíduo é dada por $u_i(x, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + t_i$.

a) Mostre que, para qualquer função de escolha social $f : \Theta_1 \times ... \times \Theta_I = \Theta \to X$ *ex-post* eficiente, temos que $\forall \theta \in \Theta$,

$$\sum_{i\in I} v_i(k(\theta), \theta_i) = \max_{k\in K} \sum_{i\in I} v_i(k, \theta_i) \text{ e}$$

$$\sum_{i\in I} t_i(\theta) = 0$$

b) Considere agora $u_i(x, \theta_i) = \theta_i\ v_i(k) + t_i$. Suponha que a função de bem-estar social f é Nash-Bayes implementável (isto significa que falar a verdade é equilíbrio de Nash Bayesiano do jogo simultâneo proposto pelo mecanismo de revelação direta). Escreva

$$\bar{t}_i(\theta_i) \equiv E_{\theta_{-i}}[t_i(\theta_i, \theta_{-i})] = \int_{\Theta_{-i}} t_i(\theta_i, \theta_{-i}) \left[\prod_{j\neq i} \phi_j(\theta_j)\right] d(\theta_{-i})$$

como função da utilidade esperada do tipo mais baixo.

Questão 7 Suponha que dois agentes coletivamente escolhem do conjunto $X = \{x, y, z\}$. Cada agente pode ser de dois tipos, então $\Theta_1 = \{\theta_1', \theta_1''\}$ e $\Theta_2 = \{\theta_2', \theta_2''\}$. As preferências são dadas por:

$$y \succ_1^{\theta_1'} z \succ_1^{\theta_1'} x \quad z \succ_1^{\theta_1''} x \succ_1^{\theta_1''} y \quad x \succ_2^{\theta_2'} y \succ_2^{\theta_2'} z \quad z \succ_2^{\theta_2''} y \succ_2^{\theta_2''} x$$

a) Encontre todas as funções de escolha social *ex-post* eficientes.

b) Quais dessas funções de escolha social encontradas no item anterior são implementáveis em estratégias dominantes?

Questão 8 Suponha que X tenha no mínimo 3 elementos.

a) Mostre que toda função de escolha social constante $f : \Theta \to X$ é implementável em estratégias dominantes.

b) Mostre que uma função de escolha social constante não pode ser ditatorial se $\mathcal{R}_i = \mathcal{P}_i$ para todo $i = 1, ..., I$ (i.e., as possíveis preferências são todas preferências estritas).

c) Explique porque (1) e (2) acima são consistentes com o Teorema de Gibbard-Satterthwaite.

Questão 9 Considere um modelo de troca com dois agentes. Um deles, o vendedor, possui um bem e o comprador não o possui. O produtor pode ter valoração c_0 ou c_1 com probabilidades iguais ($c_1 > c_0 > 0$). Quando o produtor tiver valor c_i, o comprador terá valor v_i para o bem ($v_i > c_i$). O produtor sabe o seu tipo, e logo também sabe o tipo do comprador, e então tem informação privada. O comprador não sabe seu tipo (ou apenas o sabe após a definição do mecanismo). Ambos são neutros ao risco com relação a valores monetários e ao bem em questão. Então, se o comprador ficar com o bem e fizer uma transferência t, as utilidades de um comprador e um vendedor de tipo específico serão respectivamente:

$$v_i - t$$

$$t - c_i$$

Considere que $\frac{v_1+v_0}{2} < c_1$. Mostre que compatibilidade de incentivos e racionalidade individual (como são as restrições de racionalidade individual?) não são compatíveis com eficiência *ex-post* do mecanismo. (Uma interpretação desse modelo seria a situação de um vendedor que tem informação privada sobre a qualidade do bem que possui, e a valoração dele e do comprador variam com a qualidade).

Questão 10 Considere um leilão usual com $I > 1$ possíveis compradores e um vendedor (agente 0). Cada agente tem função utilidade Bernoulli dada por

$$\theta_i yi + t_i$$

onde y_i é a probabilidade do agente i adquirir o bem e t_i é a transferência recebida pelo mesmo. A valoração do bem é $\theta_0 = 0$ para o vendedor, e θ_i para cada comprador i. Assuma que cada θ_i é oriundo, de forma independente, do intervalo $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \subset \mathbb{R}_+$ de acordo com distribuição $\Phi_i(.)$ e densidade associada $\phi_i(.) > 0$ em $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$.

a) Defina uma função de escolha social.

b) Caracterize as funções de escolha social implementadas por mecanismos ex-post eficientes.

c) Encontre a receita esperada do vendedor no *first-best*, ou seja, quando ele observa os tipos dos agentes.

d) Suponha que, para todo i,

$$J_i(\theta_i) = \theta_i - \frac{1 - \Phi_i(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}$$

é não-decrescente em θ_i. Caracterize o mecanismo ótimo, ou seja, que maximiza a receita esperada do vendedor.

e) Mostre, usando os resultados acima encontrados, que a receita do problema *first-best* domina a receita do leilão ótimo.

f) Mostre que, caso cada θ_i seja oriundo de forma independente do intervalo $[\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] = [2, 3]$ de acordo com a distribuição uniforme, o mecanismo ótimo é *ex-post* eficiente. Calcule a receita esperada e verifique que ela é igual à do leilão selado de primeiro preço. Você poderia ter obtido esse resultado checando se as hipóteses do teorema de equivalência de receitas são satisfeitas. Verifique que elas de fato são satisfeitas.

Questão 11 Considere o seguinte problema. Um vendedor deseja vender um bem indivisível. A própria valoração do vendedor é $v_0 = 100$. Existem três potenciais compradores neutros ao risco. Assume-se que as valorações dos potenciais compradores, $v_i, i = 1, 2, 3$ são independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 1000]$.

a) Derive as estratégias de oferta (*bidding strategies*) dos compradores e a receita esperada do vendedor em um leilão simples de primeiro preço (*first-price sealed-bid (FPSB) auction*.

b) Agora, o vendedor tenta melhorar em comparação com (a). Ele considera adicionar ou um preço de reserva, b_0, ou uma taxa de entrada a ser paga para os que submeterem uma oferta (*bid*), c. Como o preço de reserva e a taxa de entrada devem ser para maximizar os *payoffs* esperados do vendedor? Mostre que os leilões resultantes são, de fato, ótimos do ponto de vista do vendedor.

Questão 12 Considere o mesmo problema anterior, mas agora com n potenciais compradores neutros ao risco. Além disso, assuma que as valorações dos potenciais compradores, $v_i, i = 1, 2, ..., n$, são independentemente e uniformemente distribuídas em $[0, 1]$. Desta vez o vendedor considera usar um leilão do tipo *all-pay*: Cada comprador que faz uma oferta (*bid*) deve pagar o *bid*, independente se vence ou não. A maior oferta ganha o bem.

a) Derive as *bidding strategies* e a receita esperada do vendedor nesse leilão.

b) O vendedor tenta melhorar em comparação com (a), mas ele permanece no formato *all-pay*. A fim de aumentar seus *payoffs* esperados, ele considera introduzir um preço de reserva, b_0, ou uma taxa de entrada a ser paga por todos aqueles que submeterem uma oferta, c.

c) Estes formatos de leilão são ótimos?

Questão 13 (Maskin and Riley, Asymmetric Auctions, Review of Economic Studies, 1999) Agora considere um exemplo bem simples com *bidders* assimétricos. Um vendedor deseja vender um bem indivisível. Existem dois potenciais compradores (*bidders*) neutros ao risco com valoração privada independentemente distribuídas.

A valoração do *bidder* mais fraco, v_w, é uniformemente distribuída em $[0,1]$, enquanto a valoração do *bidder* mais forte, v_s, é uniformemente distribuída em $[2,3]$. Nós queremos comparar os *payoffs* esperados para o vendedor em um leilão de primeiro preço (*first-price sealed-bid (FPSB) auction* e um leilão de segundo preço (*second-price sealed-bid (SPSB) auction*.

a) Derive as *bidding strategies* dos dois *bidders* nos dois leilões (FPSB e SPSB). [dica: para o leilão de primeiro preço você deve começar supondo que o *bidder* mais forte supõe que o *bidder* mais fraco ofertará a sua própria valoração do bem (i.e., $b_s = v_s$). Assim, resolva o problema de maximização do *bidder* mais forte e cheque se essa suposição é consistente com o equilíbrio].

b) Mostre que o "Teorema de Receita Equivalente"não se sustenta nesse caso.

Questão 14 Considere um leiloeiro neutro ao risco vendendo um bem unitário indivisível para dois potenciais compradores, indexados por $i \in \{1,2\}$, também neutros ao risco. O comprador i valora o bem em θ_i, que é informação privada. O outro comprador e o leioloeiro acreditam que θ_i assuma apenas dois valores, $\theta_i = 0$ ou $\theta_i = 1$, com mesma probabilidade. Finalmente, assuma que o bem indivisível, se deixado nas mãos do leiloeiro, tem valor 0.

a) Qual é o mecanismo de revelação direta ótimo para esse leilão?

b) Escreva as *truth-telling constraints* para ambos compradores.

c) Escreva o *payoff* esperado do leiloeiro associado com qualquer mecanismo de revelação direta.

d) Derive o mecanismo direto ótimo que o leiloeiro pode usar neste caso para vender o bem indivisível.

e) O mecanismo derivado acima é eficiente?

Questão 15 Considere um leilão com $I > 1$ compradores. O tipo θ_i de cada comprador é oriundo, de forma independente, do intervalo $[0, \bar{\theta}]$ de acordo com uma distribução $F(.)$. A distribuição $F(.)$ tem uma densidade associada $f(.)$ tal que $f(\theta_i) > 0 \forall \theta_i \in [0, \bar{\theta}]$. A utilidade de cada agente é

$$u_i(y_i, t_i, \theta_i) = \theta_i y_i + t_i$$

onde $y_i = 1$ caso o agente i fique com o bem, ou $y_i = 0$ caso não fique. Já t_i é a transferência recebida pelo agente i.

Considere a função contínua $b(.)$ tal que $b(0) = 0$ e, para $\theta_i \in (0, \bar{\theta}]$,

$$b(\theta_i) = \frac{(I-1)\int_0^{\theta_i} u f(u) F(u)^{I-2} du}{F(\theta_i)^{I-1}} \tag{1}$$

a) Mostre que, para $\theta_i \in (0, \bar{\theta}], b(.)$ pode ser escrita como

$$b(\theta_i) = \theta_i - \frac{\int_0^{\theta_i} F(u)^{I-1} du}{F(\theta_i)^{I-1}} \tag{2}$$

b) Mostre que b(.) é estritamente crescente e é um equilíbrio simétrico do leilão selado de primeiro preço.

c) Qual o impacto do número de compradores, I, nos lances dados pelos mesmos?

d) Encontre o equilíbrio simétrico do leilão selado de segundo preço.

e) Mostre, sem usar o "Teorema de Equivalência de Receita esperada", que o vendedor obtém a mesma receita esperada nos dois tipos de leilões. (Dica: use (1) e o fato que para uma função $f(.)$ estritamente crescente vale $max\{f(x_1), ..., f(x_n)\} = f(max\{x_1, ..., x_n\}))$.

f) Como essa receita esperada varia com o número de compradores?

Questão 16 Considere uma sociedade formada por apenas duas pessoas. O sócio A possui m ações enquanto que o sócio B possui n ações (todas as ações são idênticas). O sócio i atribui valor v_i a cada ação, onde v_i é oriundo, de forma independente, do intervalo $[0, 1]$ de acordo com uma distribuição uniforme. Suponha que v_i é de informação privada do indivíduo i.

a) Como é a alocação *ex-post* eficiente das ações (desconsidere o caso em que $v_A = v_B$)?

b) Seja o seguinte mecanismo: cada sócio faz uma oferta selada para uma ação. O indivíduo que fizer a oferta mais alta, compra as ações do outro pelo preço ofertado. Deste modo, o *payoff ex-post* de cada sócio será:

$$u_A(b_A, b_B, v_A) = \{ (\ m + n)v_A - nb_A \quad \text{se } b_A > b_B mb_B \qquad\qquad \text{se } b_A \leq b_B$$

$$u_B(b_B, b_A, v_B) = \{ (\ m + n)v_B - mb_b \quad \text{se } b_B > b_A nb_A \qquad\qquad \text{se } b_B \leq b_A$$

onde b_i é a oferta do sócio i. Considerando apenas ofertas lineares $[b_i(v_i) = \alpha_i + \theta_i v_i]$, derive o equilíbrio de Nash Bayesiano deste mecanismo.

c) Considere o caso em que $m = n > 0$. Qual é a função de escolha social que é implementada pelo mecanismo descrito no item anterior? Esta função é *ex-post* eficiente? Verifique se esta função é verdadeiramente implementável em equilíbrio de Nash Bayesiano. [Dica: Para facilitar as contas, suponha, sem perda de generalidade, $m = n = 1$.]