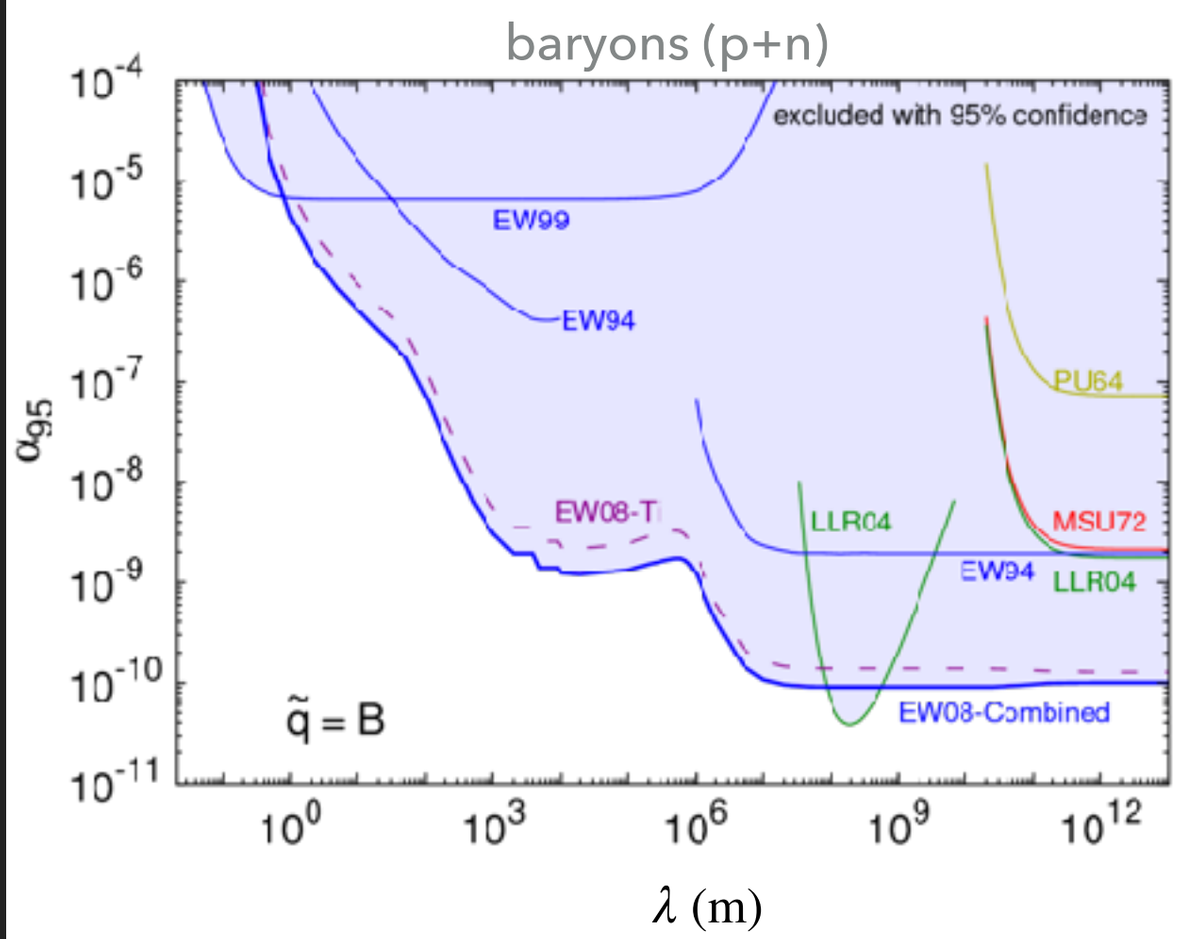
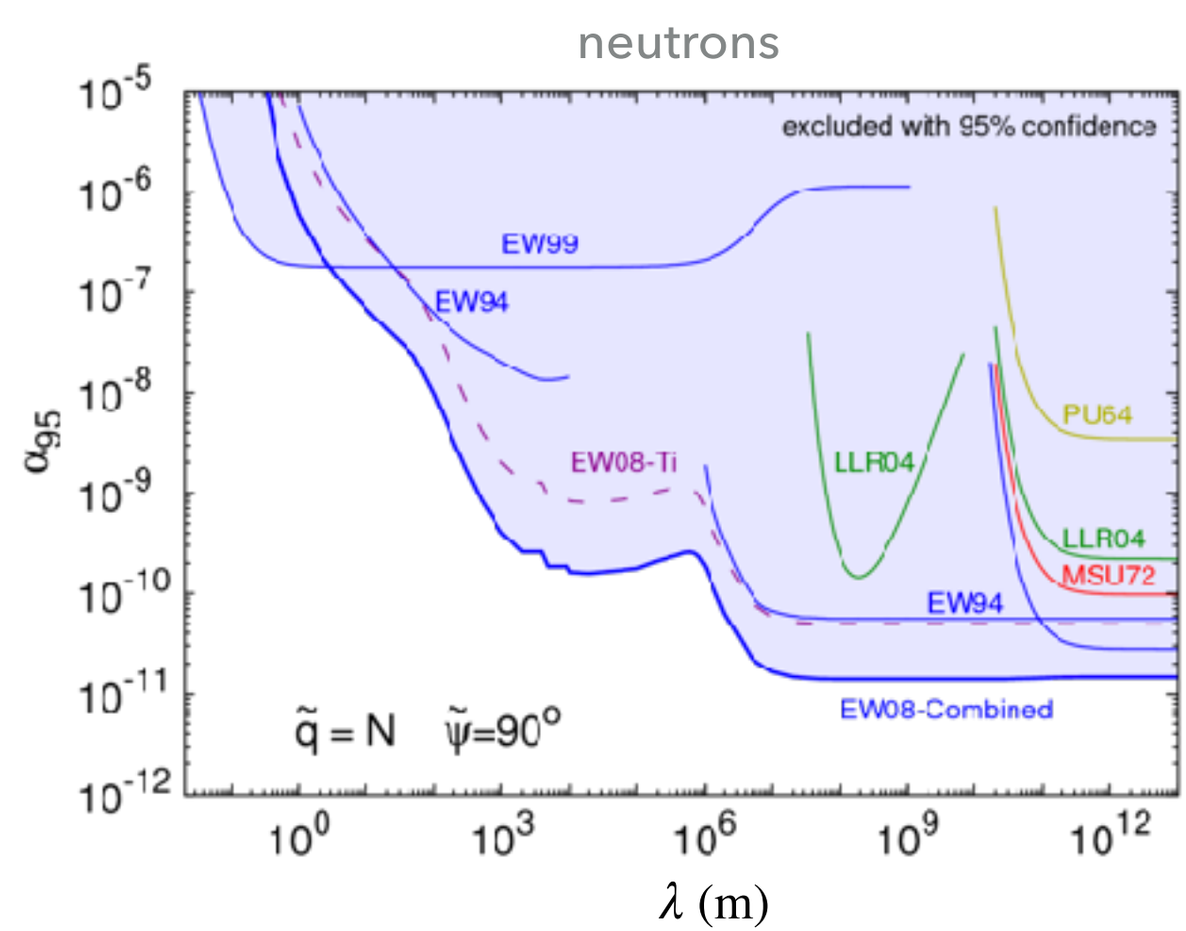
LENTES GRAVITACIONAIS

SÓ TESTAMOS A GRAVIDADE EM ESCALAS "HUMANAS":

- Schlamminger et al. 2008

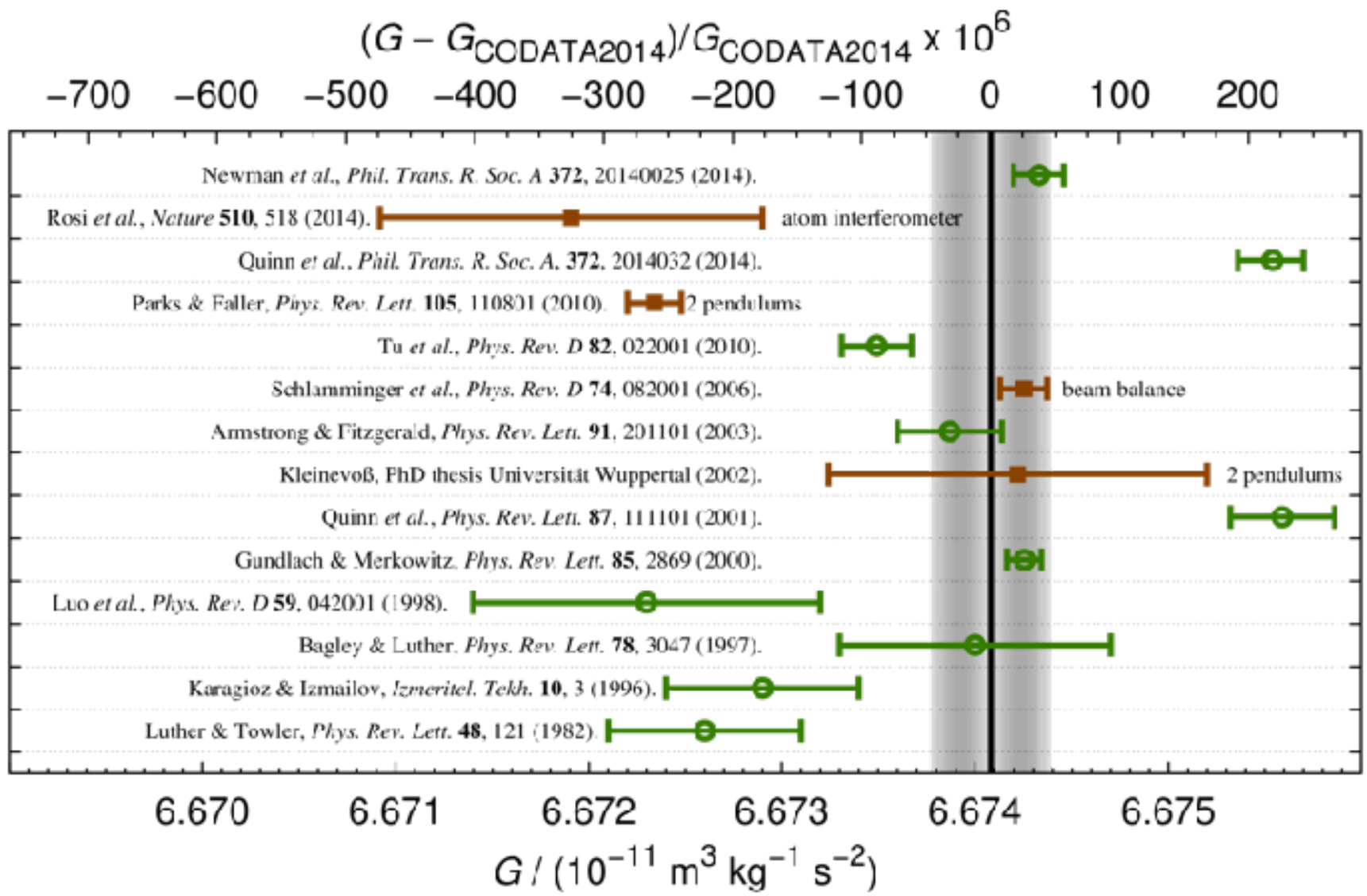
$$\tilde{V}_{12}(r) = -\tilde{\alpha}\frac{\tilde{q}_1}{\mu_1}\frac{\tilde{q}_2}{\mu_2}V_N(r)e^{-r/\lambda}$$





SÓ TESTAMOS A GRAVIDADE EM ESCALAS "HUMANAS":

- Schlamminger et al. 2008: testes de G



COMO PODEMOS ALTERAR A FORÇA DA GRAVIDADE?

- Potencial gravitacional generalizado

$$\Psi = -\frac{GM}{r}\left(1 + \beta e^{-mr}\right)$$

$$ds^2 = a^2\left[(1+2\Psi)d\eta^2 - (1+2\Phi)d\vec{x}^2\right]$$

- Rel. Geral + ausência de estresse anisotrópico: $\Psi \to -\Phi$
- m, β dependem do tempo, espaço, densidade, tipo de matéria...

COMO PODEMOS ALTERAR A FORÇA DA GRAVIDADE?

- Em geral, teorias covariantes + homog. e isotropia: potenciais Ψ e Φ.
- Fenomenologia dos modelos de gravidade modificada: lentes (eq. geodésica), Eq. Poisson
- Podemos descrever qualquer modelo de gravidade em termos de dois parâmetros fenomenológicos:

$$\eta_{MG} = -\frac{\Phi}{\Psi}$$

$$Y_{MG} = \frac{\nabla^2 \Psi_{MG}}{\nabla^2 \Psi_{GR}} \qquad \nabla^2 \Psi_{MG} = 4\pi G \, Y_{MG} \, \rho_m \delta_m$$

COMO PODEMOS ALTERAR A FORÇA DA GRAVIDADE?

- Modelos $f(R)$:

$$Y_f(k,a) = \alpha_{cham}\,\frac{1+4m\frac{k^2}{a^2R}}{1+3m\frac{k^2}{a^2R}}$$

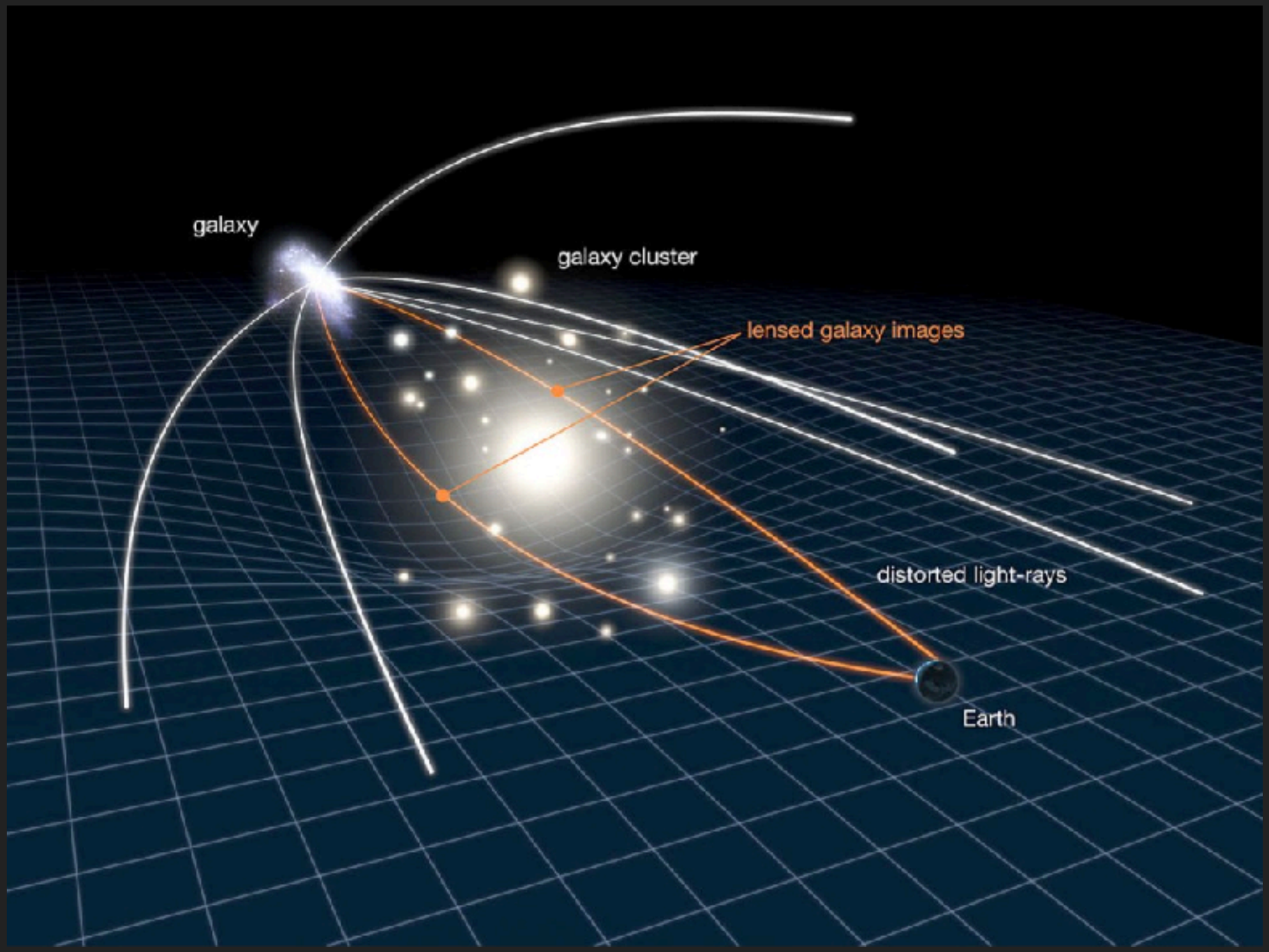
$$\eta_f(k,a) = 1 + \frac{m\frac{k^2}{a^2R}}{1+2m\frac{k^2}{a^2R}}$$

- Modelos tipo Horndeski:

$$Y_H(k,a) = h_1\frac{1+k^2h_5}{1+k^2h_3}$$

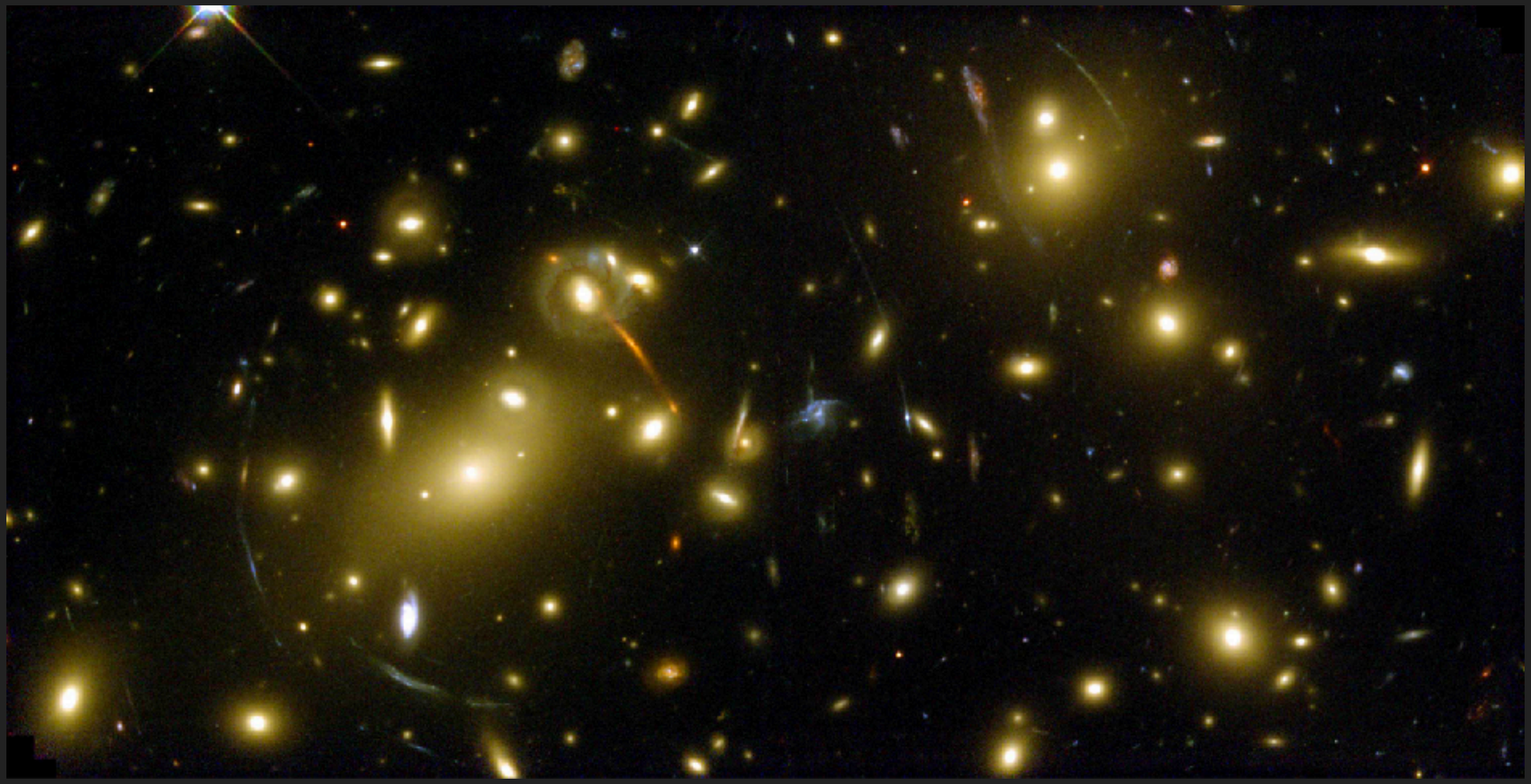
$$\eta_H(k,a) = h_2\frac{1+k^2h_4}{1+k^2h_5}$$

INTRODUÇÃO: LENTES GRAVITACIONAIS



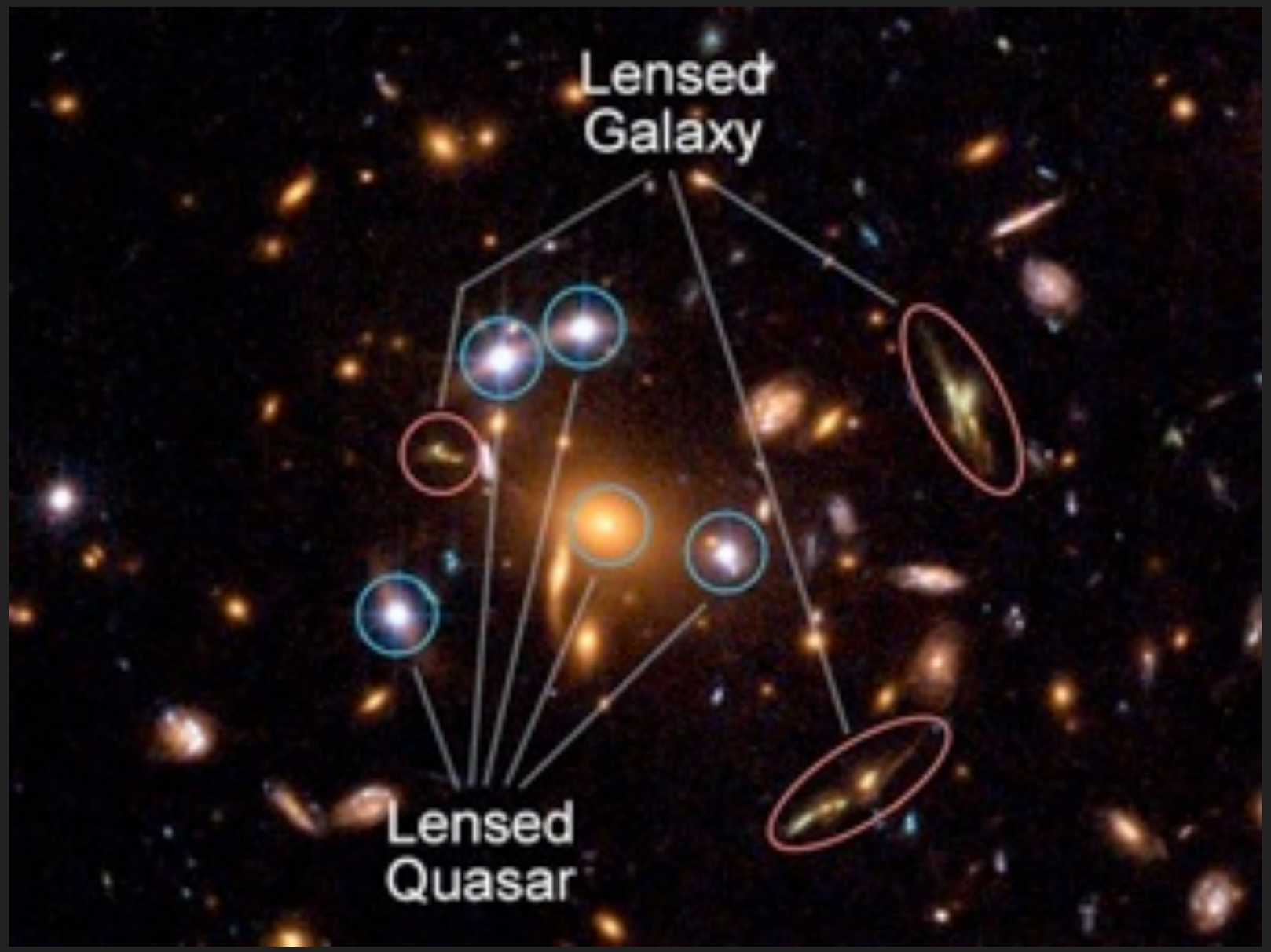
INTRODUÇÃO

- Na vida real: Abell 2218



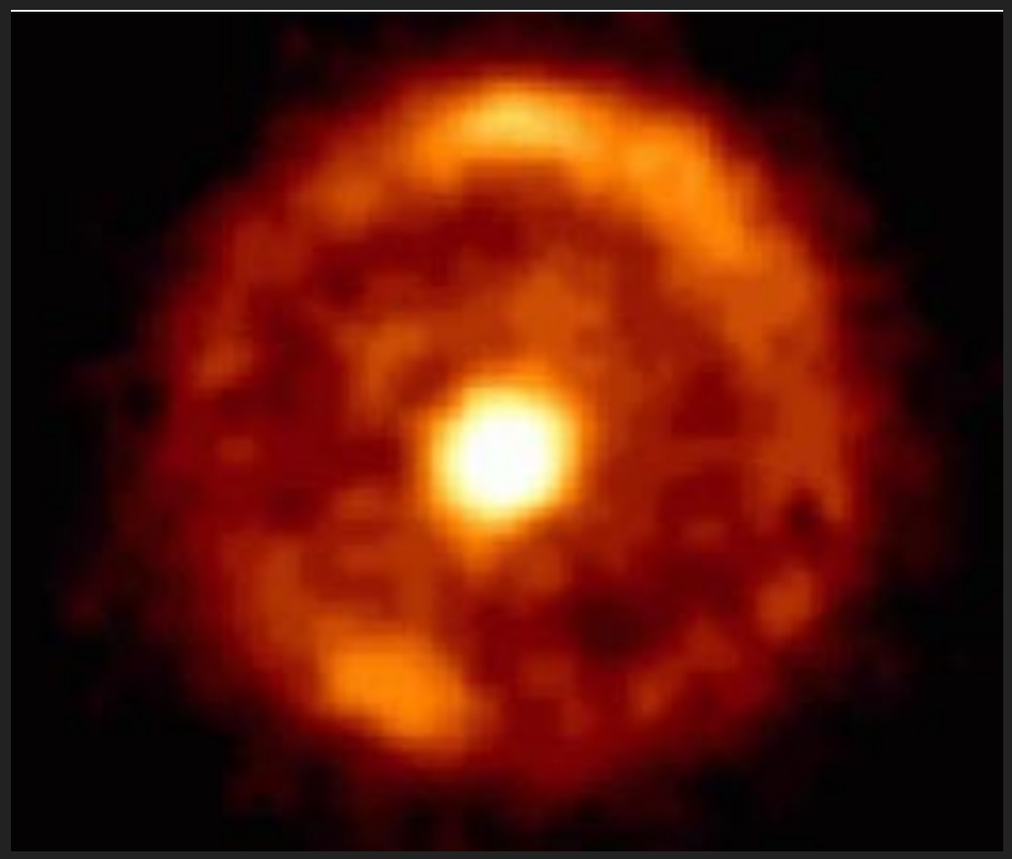
INTRODUÇÃO

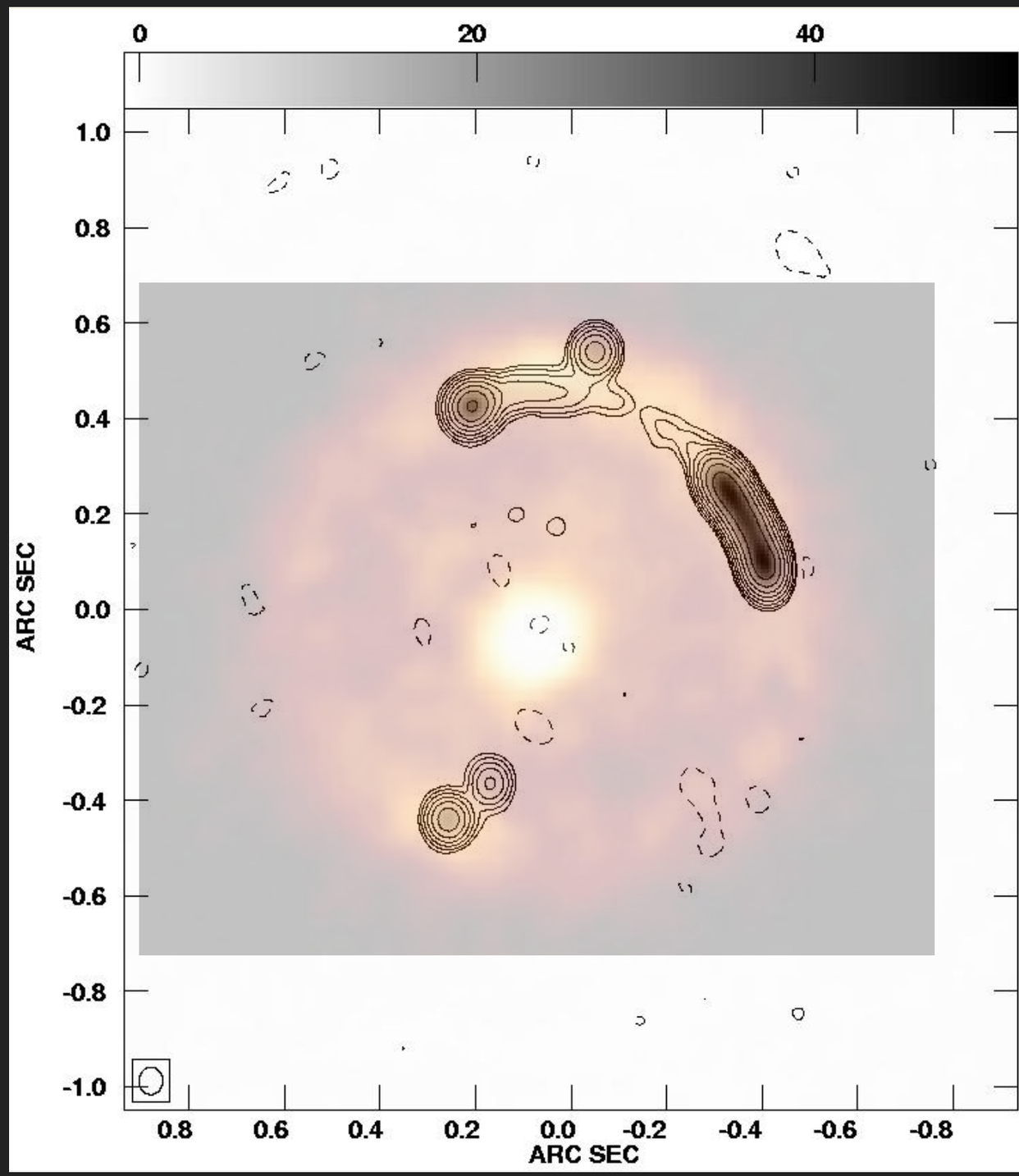
- Na vida real: Abell 2218



INTRODUÇÃO

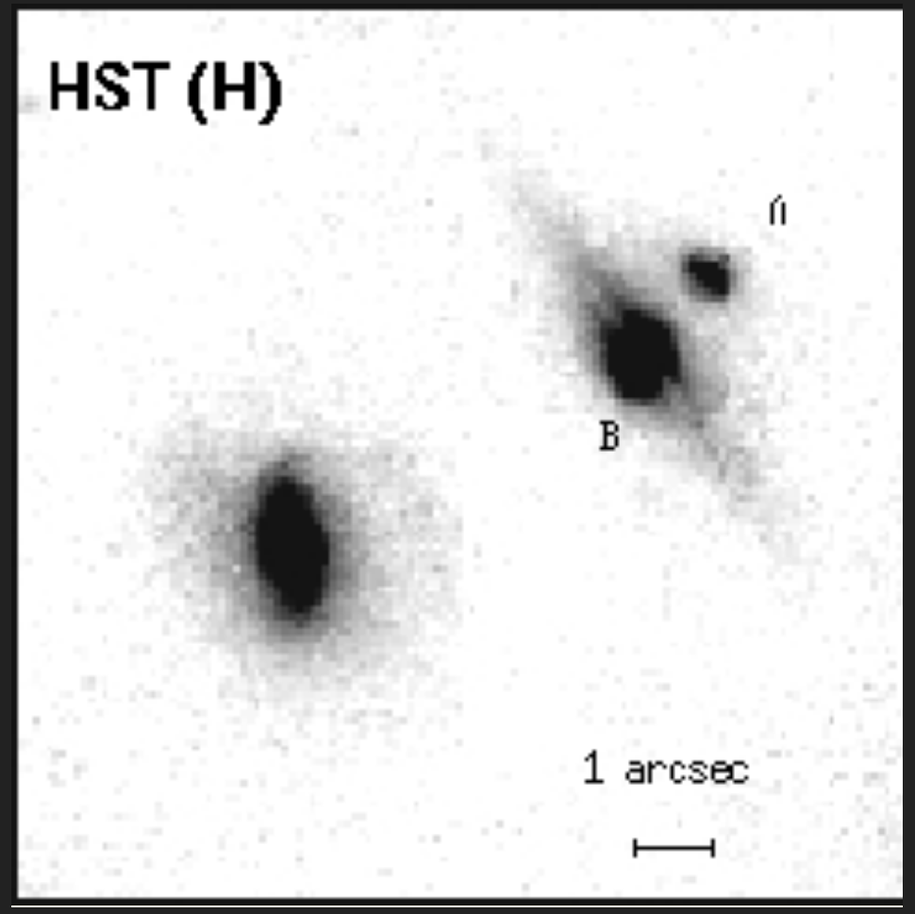
- Na vida real: B1938+666 (IR)

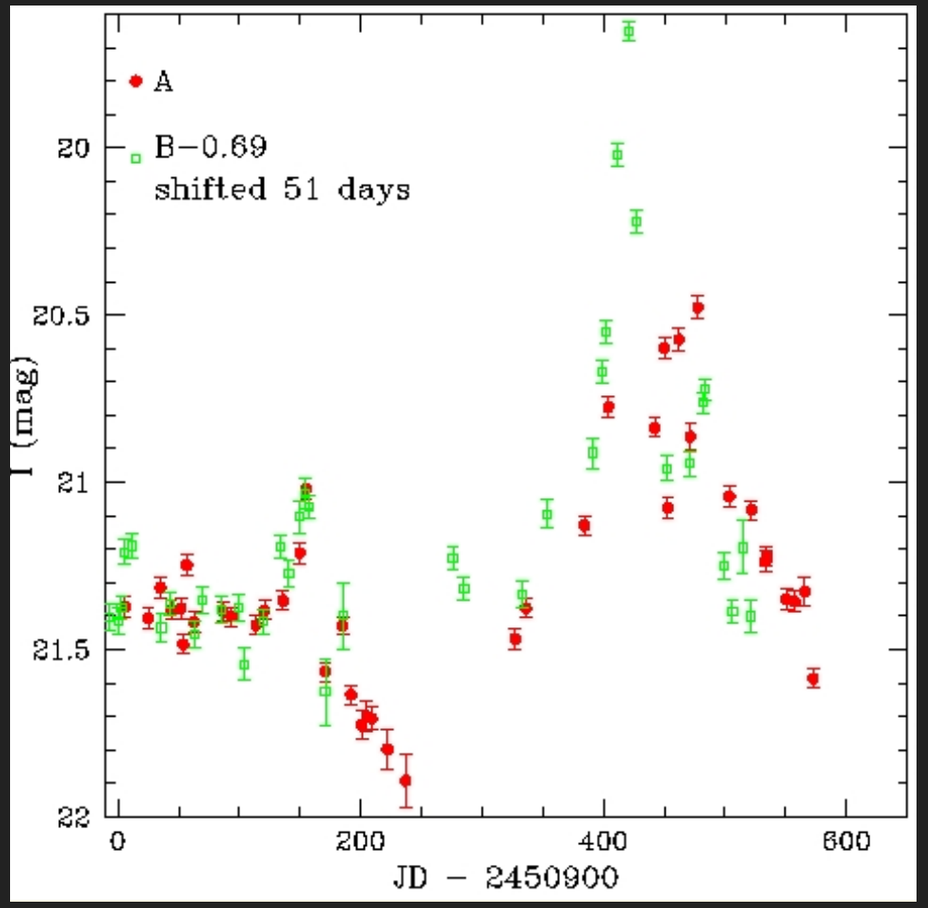




INTRODUÇÃO

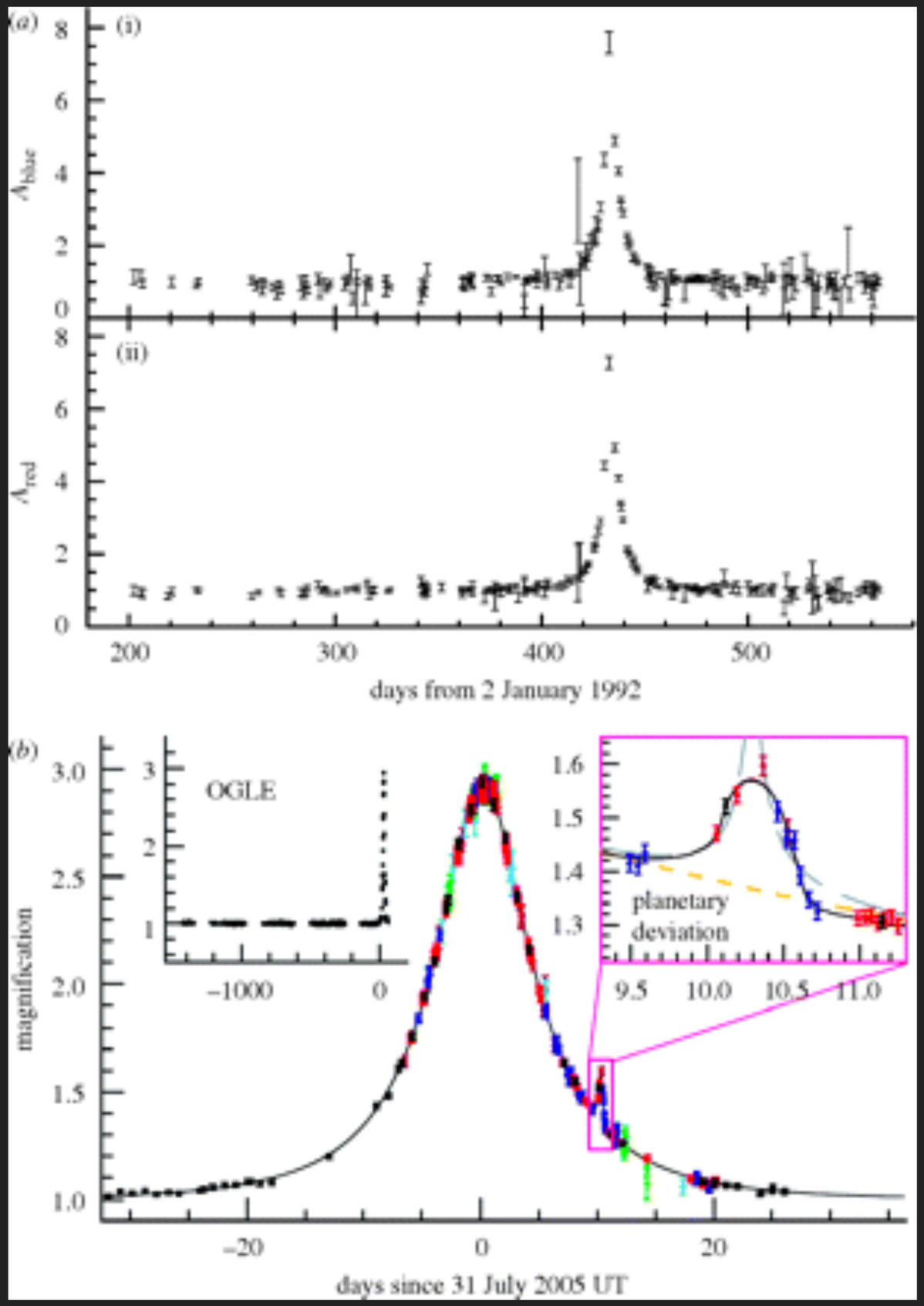
- Não é apenas o caminho da luz que muda: o tempo de "voo" também → *time delays* (B1600+434)





INTRODUÇÃO

- MACHO: Massive Compact Halo Objects; (b) exoplaneta OGLE 2005-BLG-390LB, Beaulieu et al. 2005



LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Luz: geodésicas *nulas*

$$ds^2_{null} = (1+2\Psi)c^2dt^2 - a^2(t)(1+2\Phi)d\vec{x}^2 = 0$$

- Podemos escrever, com licença poética:

$$c_{null} = \frac{|d\vec{x}|}{dt} = c\left[\frac{1+2\Psi}{1+2\Phi}\right]^{1/2} \simeq c\,(1+\Psi-\Phi)$$

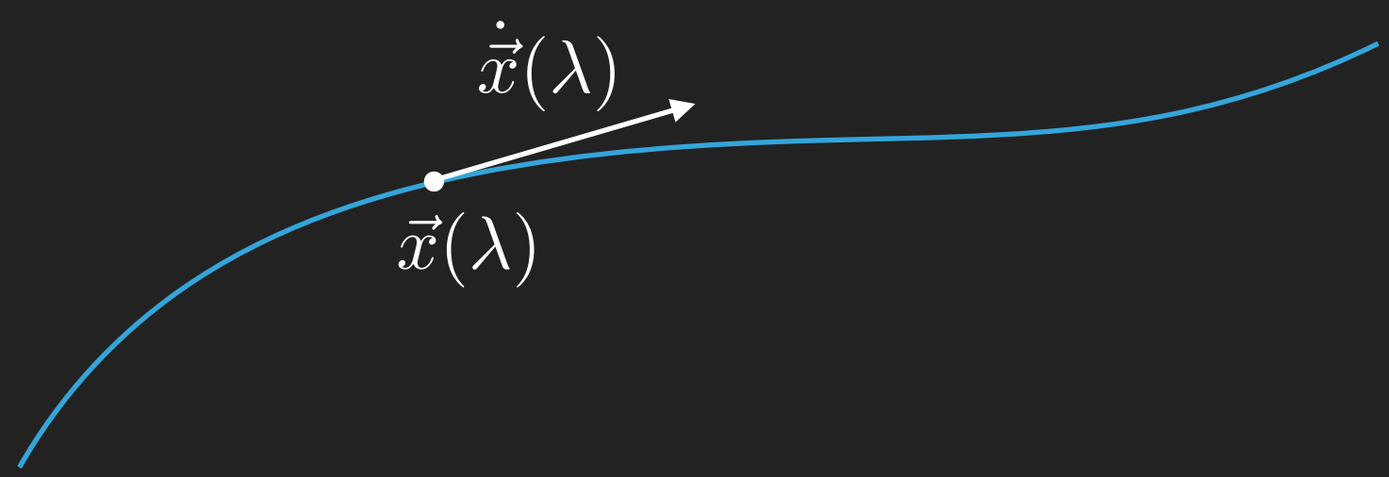
- Portanto, é como se os potenciais gravitacionais gerassem um "índice de refração":

$$n_G = \frac{c}{c_{null}} \simeq 1 - \Psi + \Phi$$

LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Princípio de Fermat: a luz percorre o caminho mais rápido

$$\Delta t \sim \int_A^B n_G[\vec{x}(l)]\, dl \qquad \Rightarrow \qquad \delta \left\{ \int_A^B n_G[\vec{x}(l)]\, dl \right\} = 0$$



- Caminho ao longo da geodésica: $dl = \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda$

LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Princípio variacional:

$$\delta \int d\lambda\, L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \lambda) = 0 \qquad\qquad L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \lambda) = n[\vec{x}(\lambda)] \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \frac{d(n\,\dot{\vec{x}})}{d\lambda} - \vec{\nabla} n = 0$$

- A direção de propagação do raio de luz é $\vec{e} \equiv \dot{\vec{x}}$

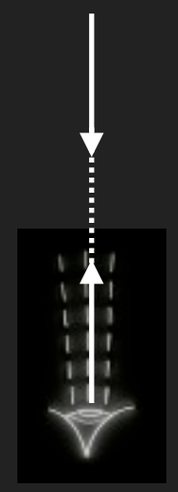
$$\Rightarrow \quad n\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla} n - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{\nabla} n)$$

- Mas o último termo do lado direito é a derivada de n na direção paralela ao caminho do raio de luz...

LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

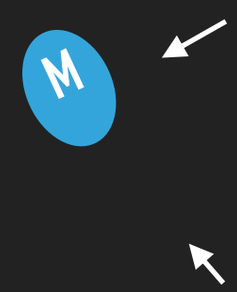
- Portanto, sobra apenas a derivada de n perpendicular ao caminho do raio de luz:

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{e}} = \frac{1}{n}\vec{\nabla}_\perp n$$



- Mas o índice de refração é: $n = 1 - \Psi + \Phi$
- Lembre-se também que a linha de visada é $\hat{r} = -\hat{e}$
- Deflexão integrada ao longo da linha de visada (aprox. Born:

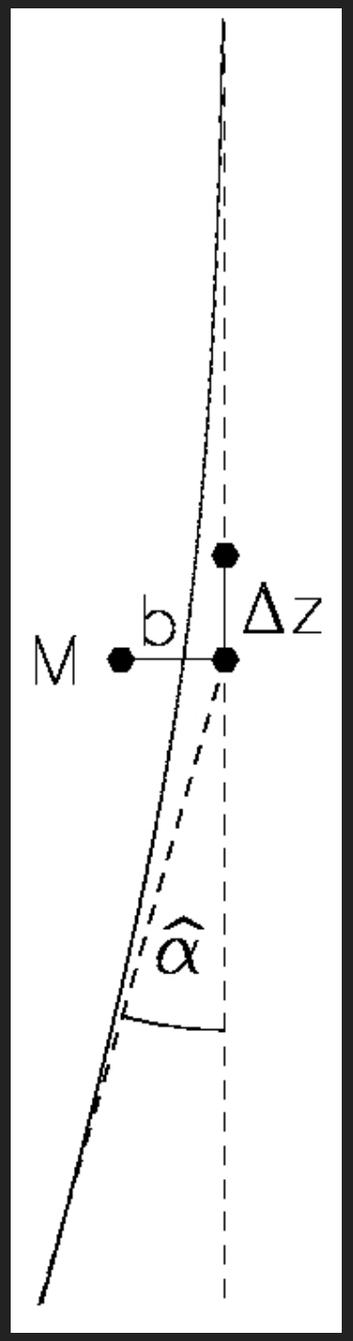
$$\vec{\alpha}_\perp = \frac{1}{c^2}\int d\lambda\, \vec{\nabla}_\perp(\Psi - \Phi)$$



LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Na prática, o efeito da lente gravitacional decai rapidamente com a distância à lente, portanto podemos fazer:

$$\vec{\alpha}_\perp = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \, \vec{\nabla}_\perp (\Psi - \Phi)$$



LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Exemplo: massa pontual $\Psi = -\Phi = -\dfrac{GM}{c^2 r}$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\vec{\nabla}_\perp \Psi = \begin{pmatrix} \partial_x \Psi \\ \partial_y \Psi \end{pmatrix} = \frac{GM}{c^2\, r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{GM\, \rho}{c^2\, r^3} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

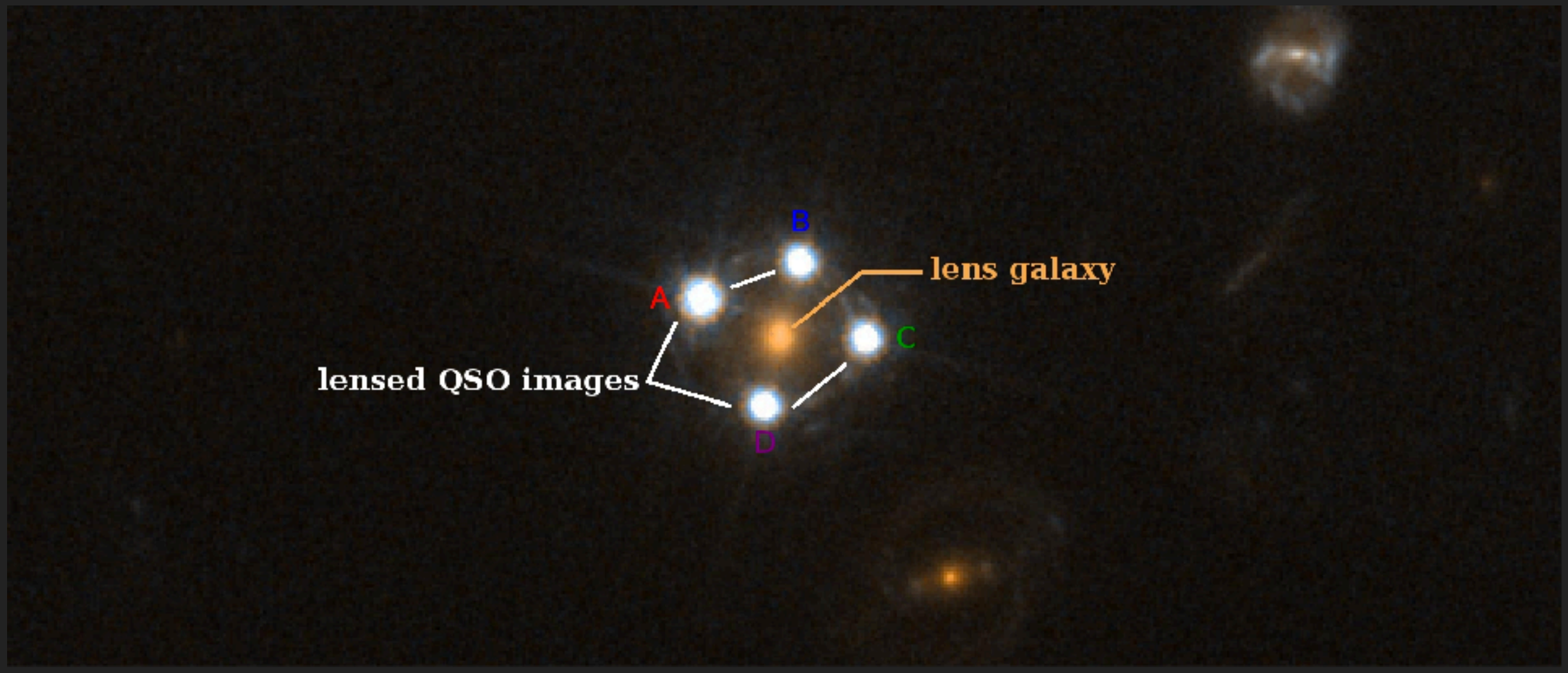
- Integrando em z, temos:

$$|\vec{\alpha}| = \frac{4GM}{c^2\, \rho} = \frac{2\, R_S(M)}{\rho}$$

[2x resultado Newtoniano]

LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Lentes: regime de “lente forte”

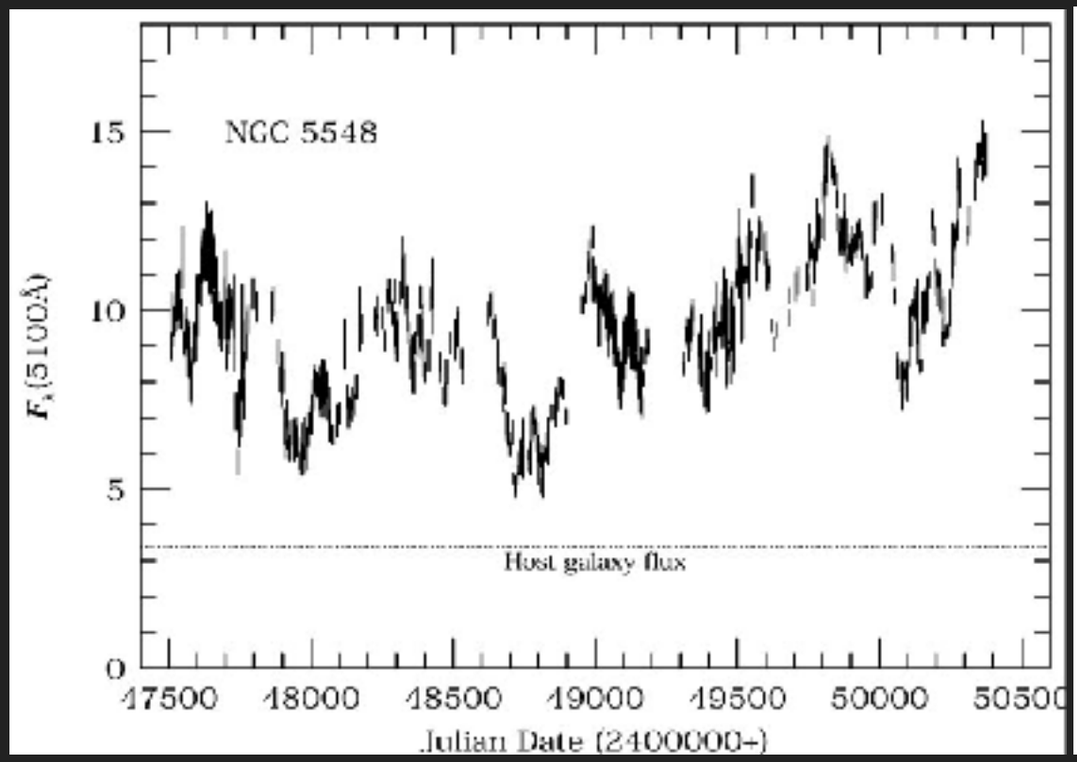


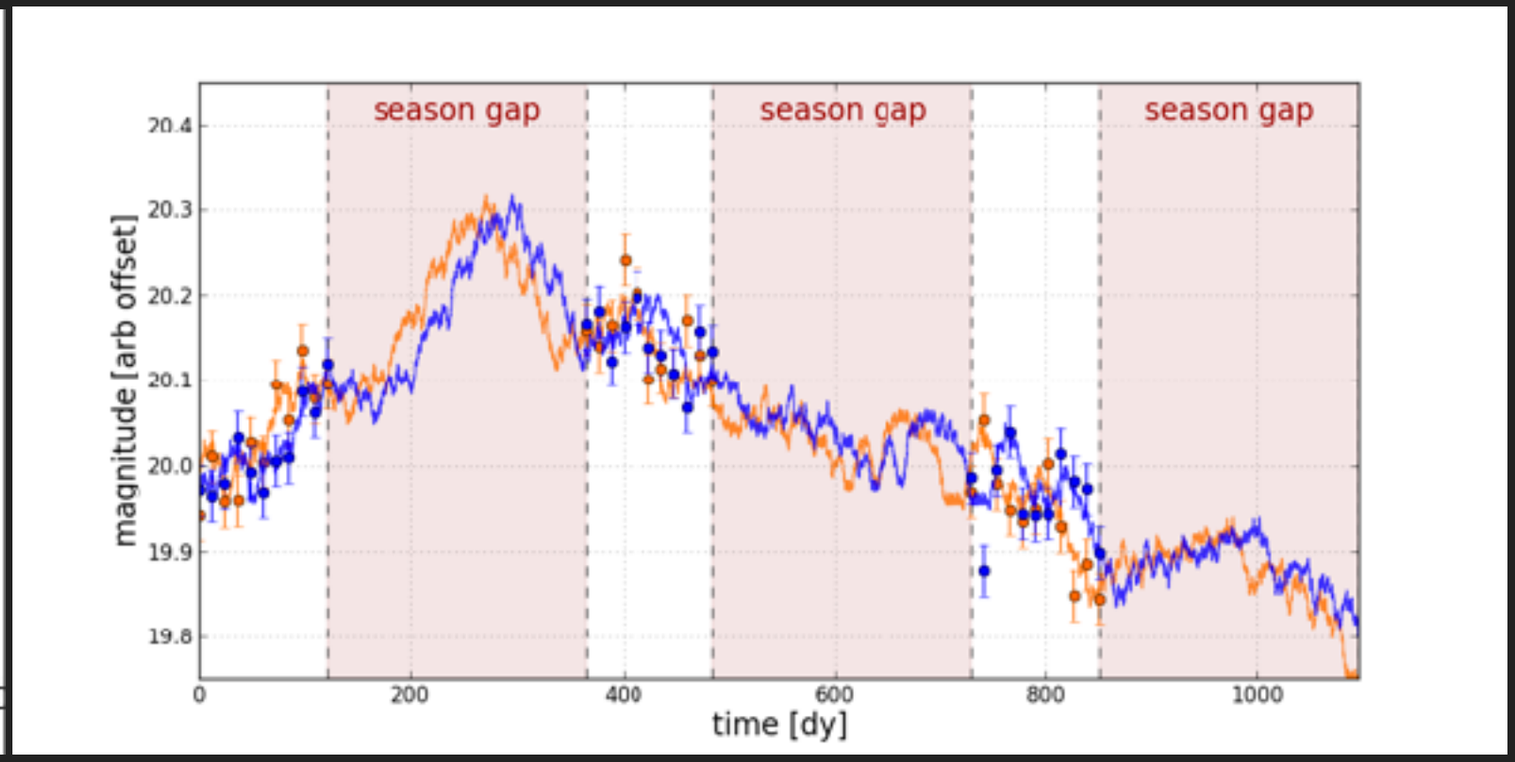
LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- "Shapiro time delays": o índice de refração já nos dá diretamente o "atraso" do raio de luz,

$$\Delta t = \int \frac{dz}{c/n} - \int \frac{dz}{c} = \int \frac{n-1}{c} dz$$

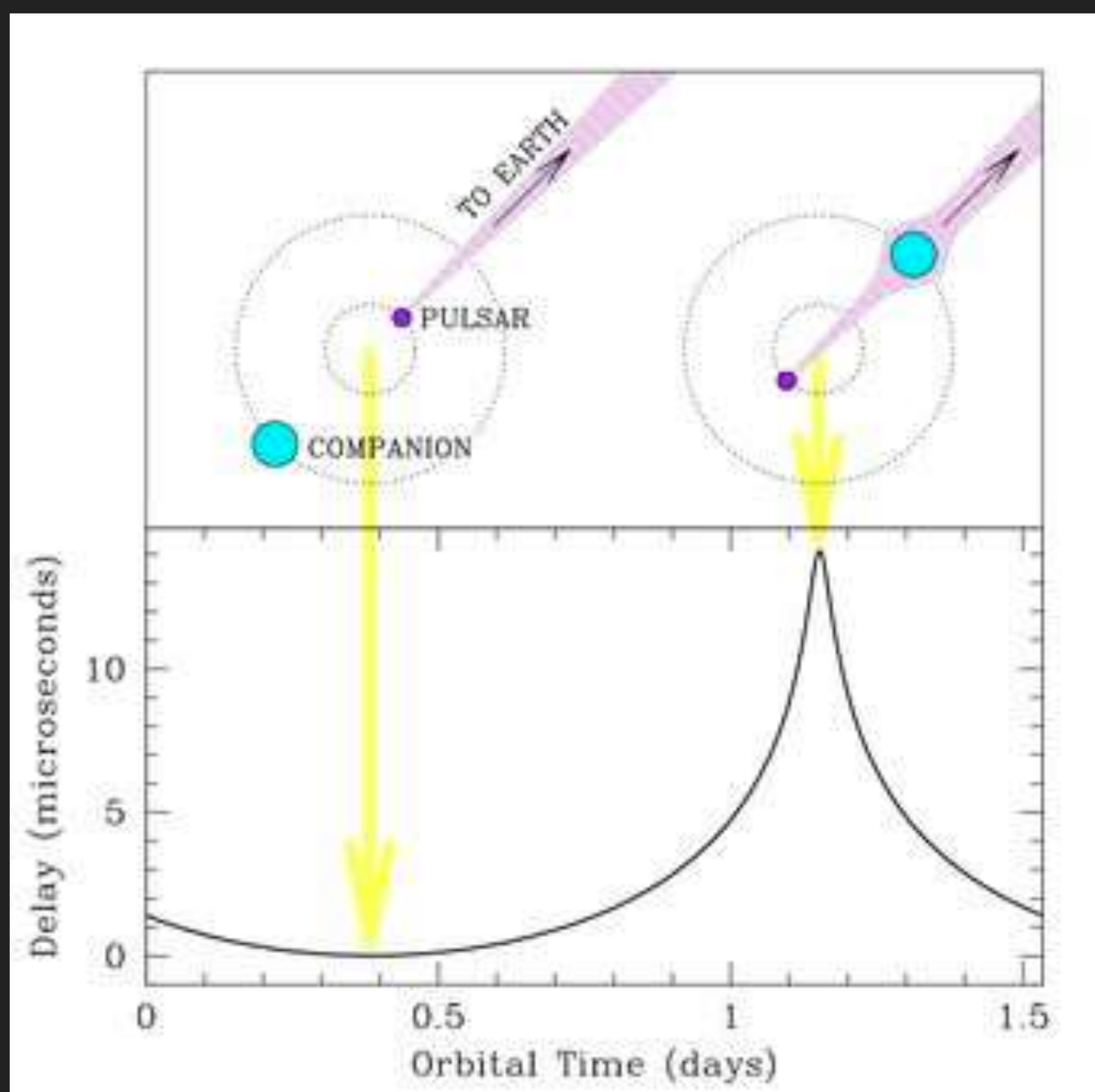
- Quasares com variabilidade e imagens múltiplas

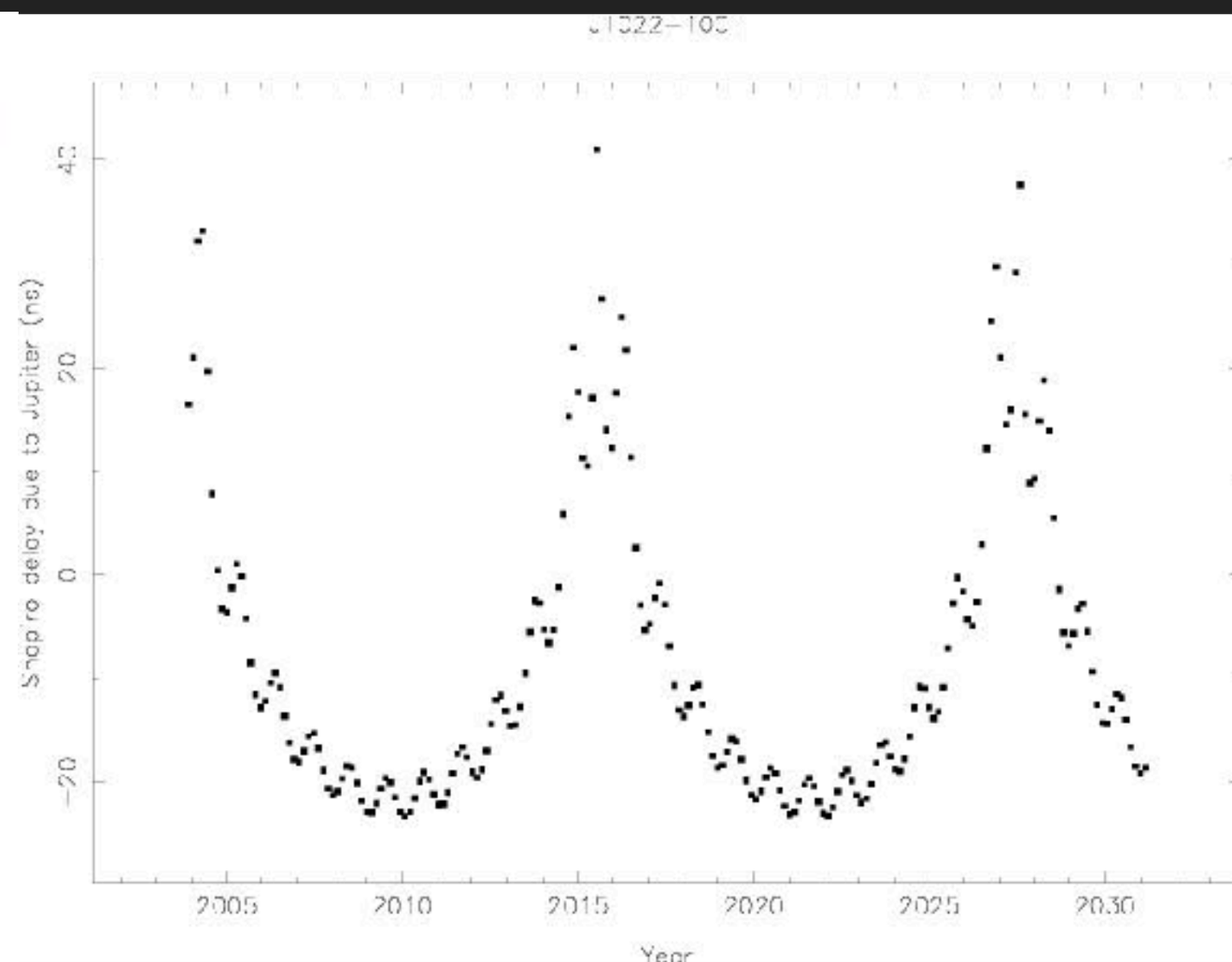




LENTES EM RELATIVIDADE GERAL (E ALÉM)

- Milisecond pulsars (J1022+1001)





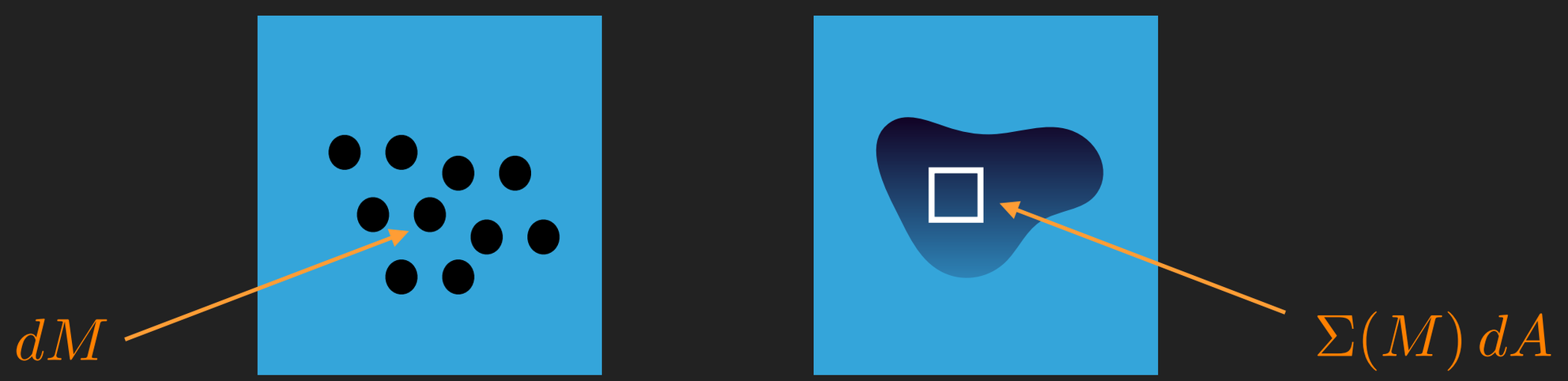
A EQUAÇÃO DE LENTES

- Note que a distorção (lente gravitacional) causada por uma massa pontual é *linear* com a massa.
- Portanto, podemos utilizar muitas massas pontuais (infinitas, no limite do contínuo) para representar qualquer distribuição de massas – desde que o Teorema de Birkhoff permaneça válido
- Massa pontual: $|\vec{\alpha}| = \dfrac{4GM}{c^2\,\rho} = \dfrac{2\,R_S(M)}{\rho}$
- N massas pontuais:

$$\vec{\alpha}(\vec{\rho}) = \frac{4G}{c^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i\,(\vec{\rho}-\vec{\rho}_i)}{|\vec{\rho}-\vec{\rho}_i|^2}$$

A EQUAÇÃO DE LENTES

- É claro que em geral precisamos lidar com distribuições *contínuas* de massa
- No caso das massas pontuais, elas seriam equivalentes à densidade superficial de massa multiplicada pela área na superfície:



A EQUAÇÃO DE LENTES

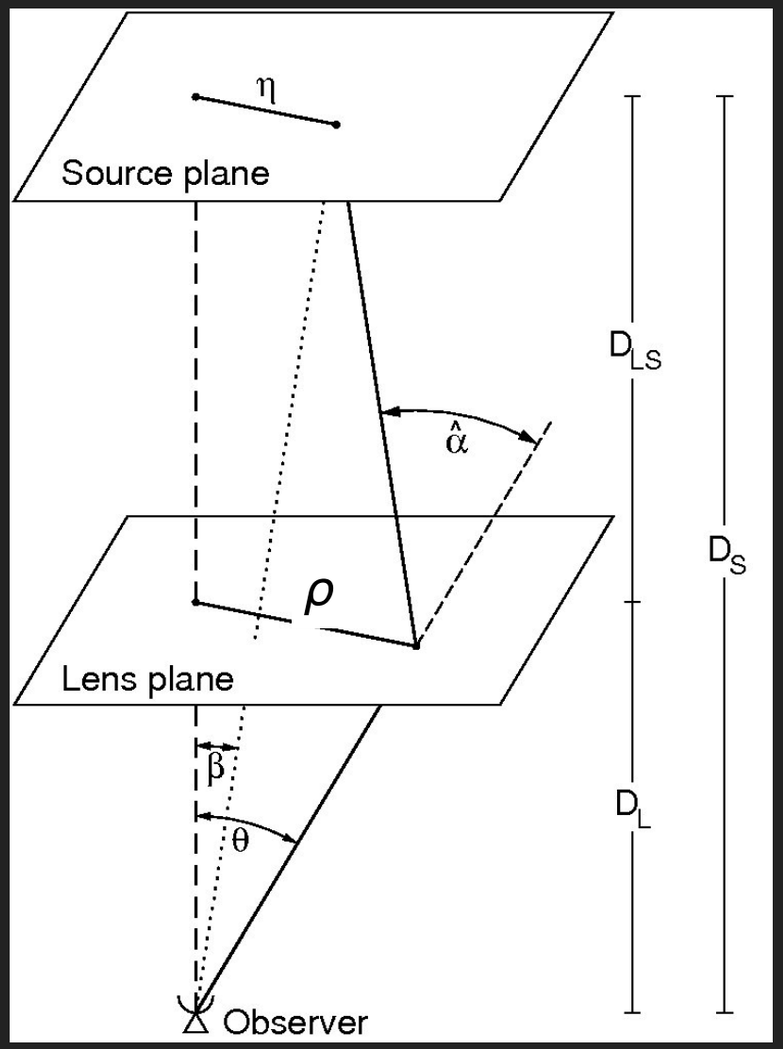
- Temos, portanto: $\vec{\alpha}(\vec{\rho}) = \frac{4G}{c^2} \int d^2\vec{\rho}' \, \Sigma(\vec{\rho}') \, \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2}$
- É evidente que essas "distâncias transversais" são descritas, em FRW, em termos da distância angular:

$$\text{Fonte} : \eta = \beta D_S$$

$$\text{Par. impacto} : \rho = \theta D_L$$

- Equação de lentes (plano da fonte):

$$\vec{\theta} D_S = \vec{\beta} D_S + \vec{\alpha} D_{LS}$$



A EQUAÇÃO DE LENTES

- Definindo a deflexão reduzida, $\alpha_r = \frac{D_{LS}}{D_S}\alpha$
- Obtemos a equação de lentes em sua forma mais simples:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}_r$$

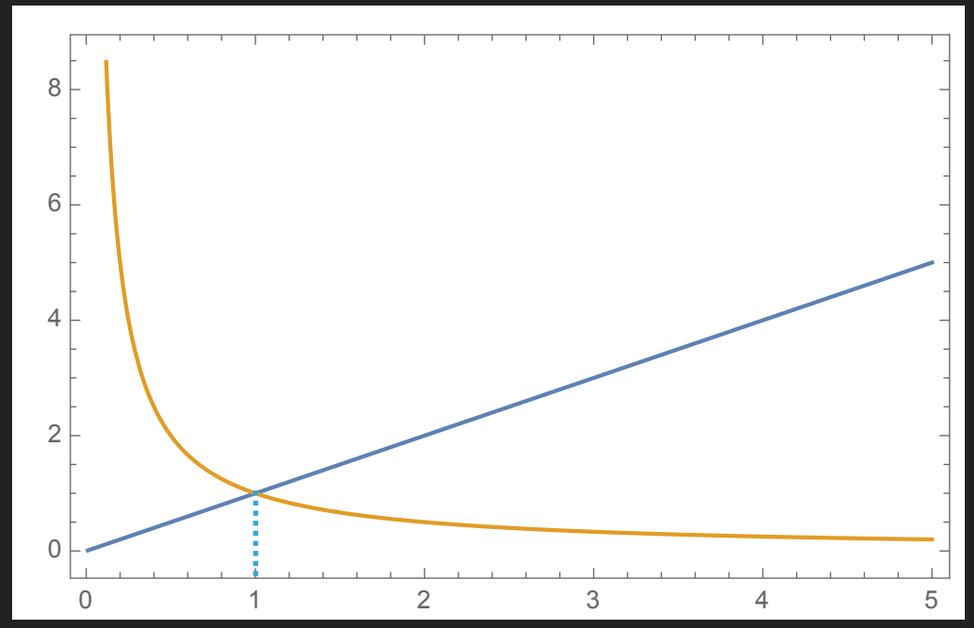
- Note que α depende de θ, e é isso que torna o efeito não-trivial.
- No caso de uma distribuição de massa com simetria axial (só dep. do módulo de ρ), obtemos:

$$\alpha = \frac{4\,G\,M(\rho)}{c^2\,\rho}$$

[Exercício!]

A EQUAÇÃO DE LENTES

- Exemplo simples: massa pontual $\alpha = \frac{4GM}{c^2}\frac{1}{\rho} = \frac{4GM}{c^2}\frac{1}{D_L\theta}$
- Eq. lentes: $\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S\,D_L}\frac{1}{\theta}$



$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S\,D_L}}$$

- Quando β=0 os raios de luz são focalizados e a magnificação é máxima: ***Einstein ring***

A EQUAÇÃO DE LENTES

- Einstein ring $$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S\,D_L}}$$

O POTENCIAL DE LENTES

- A distribuição de massa determina um potencial gravitacional; a densidade superficial de massa (projetada ao longo da linha de visada) determina um **potencial de lente**:

$$\psi = \frac{D_{LS}}{D_L\, D_S} \frac{2}{c^2} \int dz\, \Phi(\vec{\theta} D_L, z)$$

- O gradiente desse potencial dá o “deslocamento" da imagem no plano da lente:

$$D_L \vec{\nabla}_\perp \psi = \vec{\alpha}_r$$

O POTENCIAL DE LENTES

- A segunda derivada do potencial nos dá a **convergência**:

$$D_L^2 \, \nabla_\perp^2 \psi = 2 \, \kappa$$

- Também podemos escrever a convergência em termos da densidade superficial de massa e da **densidade crítica**:

$$\kappa(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma(\vec{\rho})}{\Sigma_{crit}} \qquad \Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L \, D_{LS}}$$

- Pode-se também mostrar que:

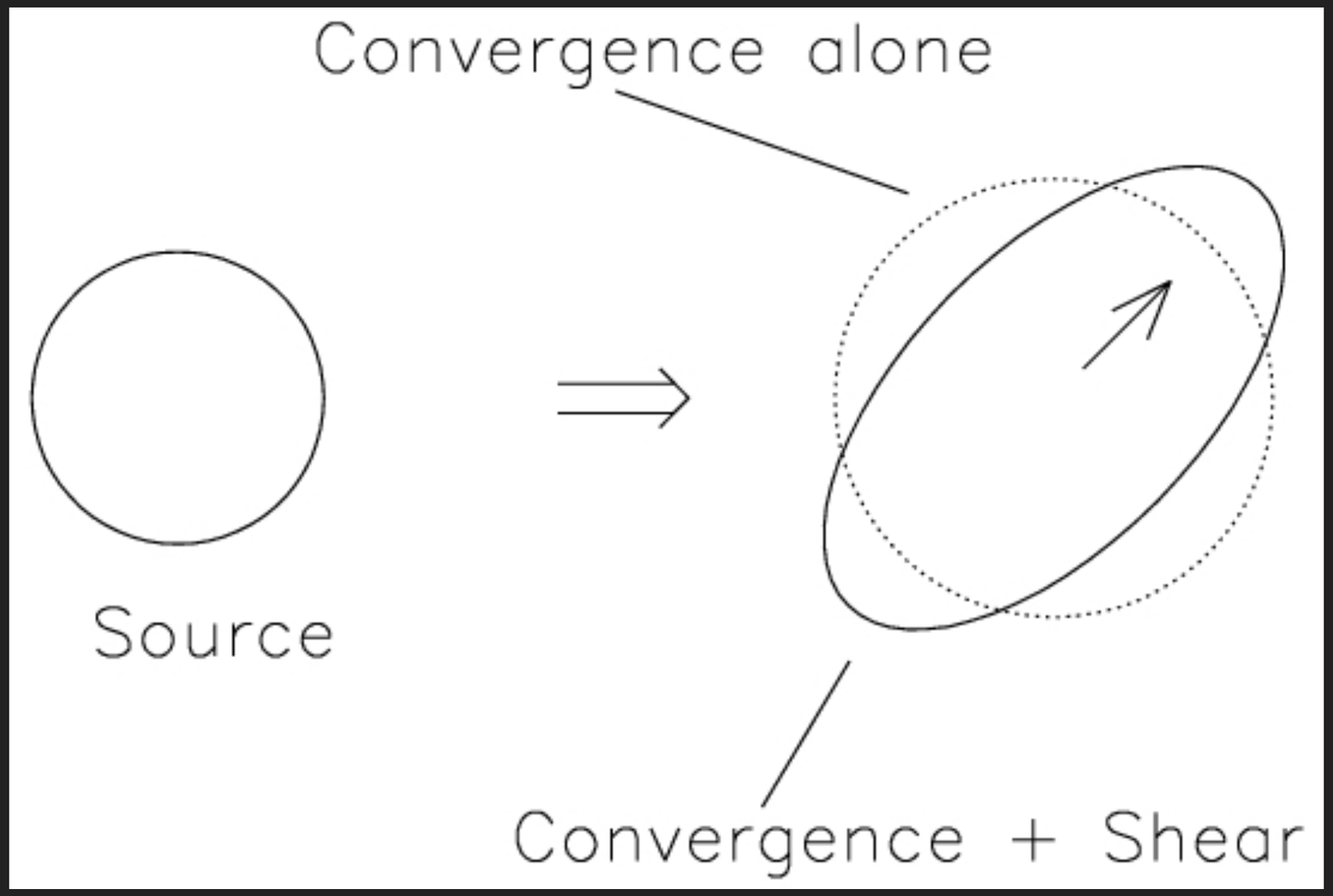
$$\vec{\alpha}_r(\vec{\rho}) = \frac{1}{\pi D_L} \int d^2\rho \, \kappa(\vec{\rho}\,') \, \frac{\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|}$$

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Um dos principais efeitos das lentes gravitacionais é a distorção da imagem original:
  - Lentes fracas: as imagens das galáxias de fundo (fontes) são “achatadas" na direção da lente
  - Lentes fortes: uma galáxia elíptica ou esférica se torna um arco
- A distorção ocorre porque há um campo de “maré”, que puxa os raios de luz mais numa direção do que na outra

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Há dois efeitos principais de distorção:



Narayan & Bartelmann 1995

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- No plano da lente: $\rho_i \to \rho^{(im)} = \rho_i^{(f)} - D_L \alpha_i$

- Jacobiano: $J_{i,j} = \dfrac{\partial \rho_i^{(im)}}{\partial \rho^j} = \delta_{ij} - D_L \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial \rho_j}$

- Da discussão anterior, podemos expressar esse Jacobiano em termos do potencial de lente:

$$J_{i,j} = \delta_{ij} - D_L^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho_i \partial \rho_j}$$

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Essa é uma matriz simétrica. Escrevendo: $\Psi_{ij} = D_L^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho_i \partial \rho_j}$
- Nesse momento pode-se notar que podemos expressar o Jacobiano da seguinte modo:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

- Onde: $\kappa = \frac{1}{2}(\Psi_{11} + \Psi_{22})$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \\ \gamma_2 &= \Psi_{12} = \Psi_{21} \end{aligned}\right\} \textit{Shear}$$

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- A convergência *aumenta* ou *diminui* o tamanho das imagens por um fator, sempre conservando o número de fótons (a "surface brightness")

- Já o *shear*, distorce as imagens. Sob rotações, ele se transforma como uma "direção sem sentido definido", um "campo de spin 2":

$$Shear = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \operatorname{sen} 2\phi \\ \operatorname{sen} 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

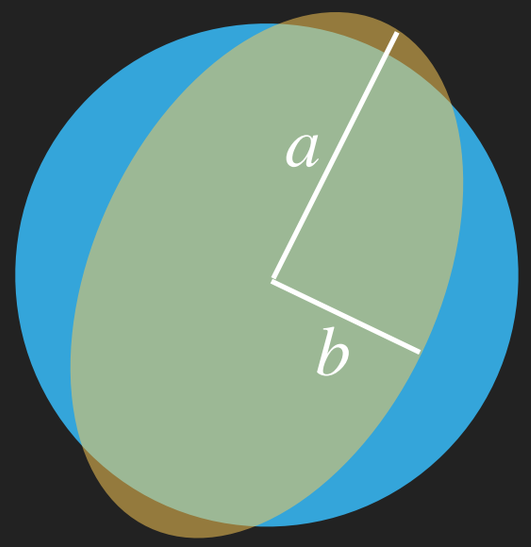
$$\gamma = \pm(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}$$

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Um círculo de raio r, sob a ação do shear e da convergência, se torna uma elipse de semi-eixos:

$$a = \frac{r}{1 - \kappa - \gamma}$$

$$b = \frac{r}{1 - \kappa + \gamma}$$



- A magnificação é dada pelo inverso do determinante do Jacobiano:

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- A magnificação é dada pelo inverso do determinante do Jacobiano:

$$\mu = \frac{1}{\det J} = \frac{1}{(1-\kappa)^2 - \gamma^2}$$

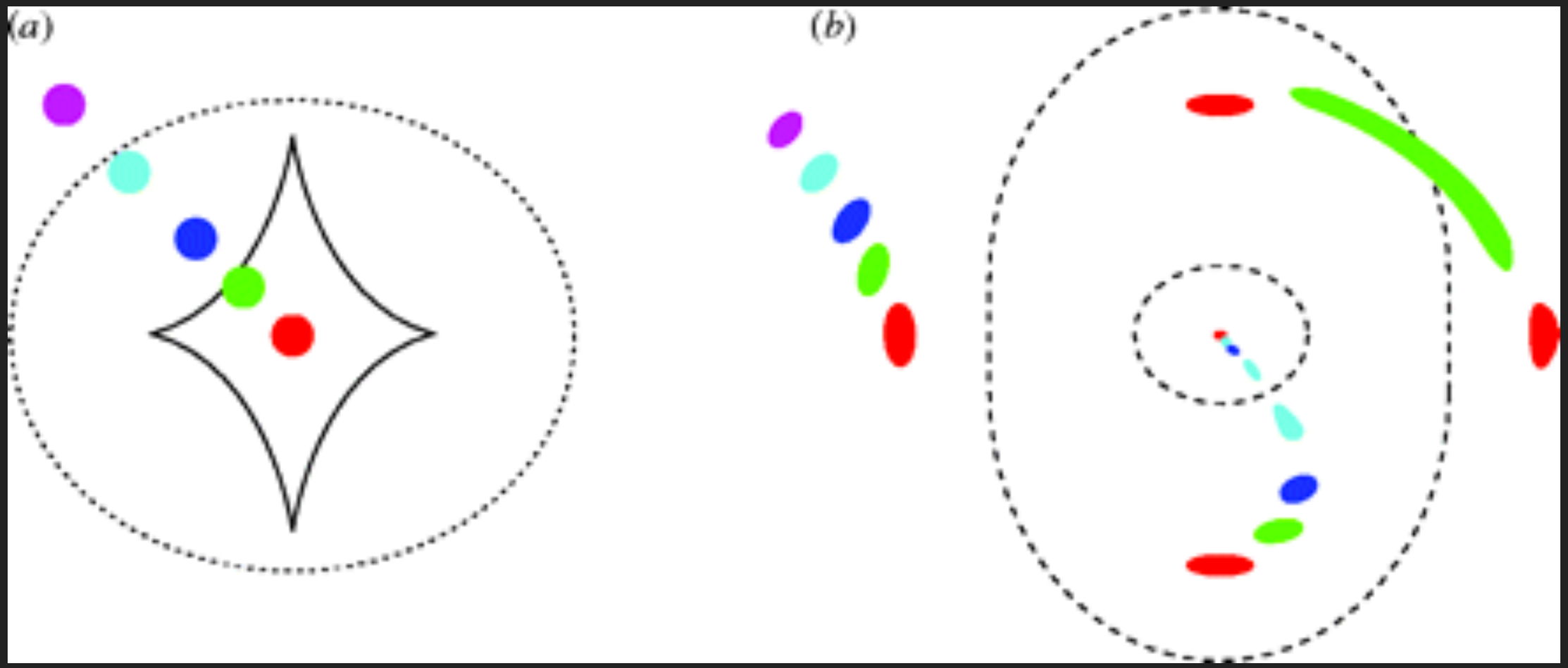
- Os auto-valores do tensor de magnificação $M = J^{-1}$, determinam as linhas críticas, tangenciais e radiais:

$$\mu_t = \frac{1}{1-\kappa-\gamma} \qquad \mu_r = \frac{1}{1-\kappa+\gamma}$$

- Idealmente, a magnificação é máxima quando as duas linhas críticas se cruzam

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Linhas críticas



Plano da fonte

Plano da imagem

MAGNIFICAÇÃO E DISTORÇÃO

- Limite de lentes fracas: cosmic shear