Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ
Disciplina: LCE0120 Cálculo I
Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

5^a lista de exercícios - Aplicações de Derivada e Diferencial

1. Use o conceito de diferencial para aproximar o crescimento da área da superfície esférica de um balão se seu diâmetro varia de 2 m para 2,02m, sabendo-se que a área de superfície é dada por $A = 4\pi r^2$.

2. Verifique se as funções abaixo satisfazem às condições do Teorema do Valor Médio e do Teorema de Rolle.

   a.
   $$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}, \quad \text{se } x \in [0,4]$$

   b.
   $$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \in [-3,2); \\ -x+7, & \text{se } x \in [2,7]. \end{cases}$$

3. (Apostol, 1983) Seja $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo $[-1,1]$. Como isso é possível, em face do Teorema de Rolle?

4. Obter a expansão de cada uma das funções a seguir, em polinômio de Taylor de grau n, ao redor do ponto x_0.

   a. $f(x) = \ln(x)$, considere $n = 2$ e $x_0 = 3$;

   b. $f(x) = \sqrt{x}$, considere $n = 3$ e $x_0 = 4$;

   c. $f(x) = \cos(x)$, considere $n = 4$ e $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. Use o método de *Newton* para encontrar ao menos uma raiz real das funções a seguir. Considere $\epsilon = 0,0001$.

   a. $f(x) = 2x - \sin(x) + 4$

   b. $f(x) = 10^x + x^3 + 2$.

6. Faça um estudo das funções abaixo, quanto à monotonicidade e extremos relativos.

   a. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

   b. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

   c. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$

   d. $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$

   e. $f(x) = x - \ln(1+x)$

   f. $f(x) = e^x \sin(x), x \in [0, 2\pi]$

7. Demonstre que se $y = \cos(x)$ então suas raízes são também seus pontos de inflexão.

8. Faça um estudo das funções abaixo, quanto à concavidade e pontos de inflexão.

   a. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$ b. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$

   c. $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ d. $f(x) = (1+x^2)e^x$

   e. $f(x) = x^2 \ln(x)$ f. $f(x) = e^{-x}\cos(x), x \in [0, 2\pi]$

9. Faça um estudo completo das funções a seguir.

   a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b. $f(x) = (x^2-4)(x^2-1)$

   c. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+3}$ d. $f(x) = \ln(1+x^2)$

   e. $f(x) = x^2e^x$ f. $f(x) = -x + \tan(x), x \in [0, 2\pi]$

10. Considere a função do 2^o grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Demonstre que o extremo relativo desta função é dado pelas coordenadas do vértice da parábola, $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\triangle}{4a}\right)$. Prove, também, que a função não tem pontos de inflexão.

11. O Custo variável médio de produção de um certo bem é de R$12,00 e o custo fixo é de R$60,00 para quantidades que variam entre 0 e 1000 unidades. Se o preço de venda na mesma faixa é de R$20,00. Estabeleça:

    a. A função Custo Total, função Receita e função Lucro;

    b. O custo marginal (interprertá-lo);

    c. A produção necessária para que o Lucro seja de R$3.940,00

12. Considere as funções Receita Total, $R = 8q - \frac{1}{5}q^2$ e Custo Total $C = 12 + 1,6q$ de um insumo agrícola (valores em 1000 reais). Considere também que a quantidade produzida (em toneladas) pertença ao intervalo $0 \leq q \leq 40$.

    a. Encontre a função Custo marginal e interprete-a;

    b. Encontre o nível de produção q que possibilita o maior lucro;

    c. Esboce no mesmo eixo os gráficos das funções: Receita Total, Custo Total e Lucro e estabeleça os intervalos de produção que geram prejuízos.

13. (Apostol, 1983) Um agricultor dispõe de L metros de rede para cercar uma pastagem de forma retangular, adjacente a uma longa parede de pedra. Que dimensões darão a área máxima da pastagem?

14. (Apostol, 1983) Um agricultor deseja cercar uma pastagem retangular de área A, adjacente a uma longa parede de pedra. Quais as dimensões convenientes de modo a gastar o menos possível de rede?

15. A função Custo total de um monopolista é $C = 3q+65$, para $0 \leq q \leq 100$. A função demanda de mercado é dada por $Qd = 100 - 5P$. Admita, nesse caso, que a função receita é de preço variável. Estabeleça:

    a. O menor valor de q para um lucro total de R$265,00 e o respectivo preço de venda;

    b. O nível de produção que maximiza o lucro e seu respectivo preço de venda.

16. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais. Prove que a função $d = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ é mínima somente quando a corresponde a média aritmética dos n números reais.

17. (Flemming e Gonçalves, 2007) Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja L o alcance do canhão, dado por $L = \dfrac{2v^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, em que v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

18. (Flemming e Gonçalves, 2007) O gráfico da função $C(q) = kq^{\frac{1}{\alpha}} + F$, com $q \in [q_0, q_1]$, sendo k, α e F constantes positivas é denominado curva de custos a curto prazo de Cobb-Douglas. Essa curva é bastante utilizada para representar os custos de uma empresa com a produção de um produto.

    a. Dê o significado da constante F;

    b. Verificar que, quando $\alpha > 1$, a curva é côncava para baixo e interpretar esse resultado do ponto de vista da Economia;

    c. Supor $k = 2$, $\alpha = 3$, $F = 8$ e determinar, se existir, o valor de q que fornece o custo médio mínimo;

    d. Usando os mesmos valores do item c, determinar o nível de produção que minimiza o custo marginal, no intervalo $125 \leq q \leq 125.000$.

19. Demonstre o limite fundamental exponencial, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, usando o Regra de L'Hospital.

20. Encontrar os limites das funções:

    a. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

    b. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$

    c. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x$

    d. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x)$

    e. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

    f. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)\tan(2x)$

    g. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

    h. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(3x+9)^{\frac{1}{x}}$