Tarefa 1

Instruções Gerais:

- **Todos os modelos matemáticos devem ser implementados usando Cplex considerando bibliotecas (IBM Ilog Cplex) em C, C++, Java ou Phyton.**
- **Ferramentas como Lindo, AMPL, GAMS, Excel NÃO PODEM SER UTILIZADAS.**
- **Eu irei criar instâncais a partir do formato utilizlado nas suas instâcias. Por isso, siga um formato padrão para criar instâncias. Essa instâncias sempre serão lidas a partir de um arquivo, exceto no Exercício 1.**
- **Os códigos devem ser submetidos ZIPADO via Stoa seguindo as instruções de cada exercício.**
- **Os exercícos são adaptações de exemplos disponíveis no livro Pesquisa Operacional, Arenales et. al, 2007, Elsevier, páginas: 17-18, 26-27,179-180,**

Exercício 1 (Problema da mistura): Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário ($/kg). Na tabela abaixo, os dados do problema são apresentados.

Dados para o problema da ração.

	Ingredientes			
Nutrientes	*Osso*	*Soja*	*Peixe*	*Ração*
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($/kg)	0,56	0,81	0,46	

Por exemplo, a farinha de osso é constituída de 20% de proteína e 60% de cálcio; a ração deve ser composta de pelo menos 30% de proteína e 50% de cálcio; 1kg da farinha de osso custa $0,56 (os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão). Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo. Defina a variável de decisão xj como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser utilizada em uma unidade (1kg) da ração, j = osso, soja, peixe.

O modelo matemático do problema será:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\, x_{osso} + 0{,}81\, x_{soja} + 0{,}46\, x_{peixe} \\
& 0{,}2\, x_{osso} + 0{,}5\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} \geq 0{,}3 \\
& 0{,}6\, x_{osso} + 0{,}4\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} \geq 0{,}5 \\
& x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1 \\
& x_{osso} \geq 0, \quad x_{soja} \geq 0, \quad x_{peixe} \geq 0.
\end{aligned}
$$

1. **Entenda como o modelo foi formulado.**

2. **Implemente o modelo usando a ferramenta Ilog Cplex (C, C++, Phyton ou Java).**
3. **Submeta no stoa um arquivo zipado contendo o código da sua implementação.**

Exercício 2 (Problema da mistura): Seja n o número de ingredientes que podem ser utilizados na produção da mistura e m o número de componentes relevantes para a mistura. Um dos passos fundamentais para se escrever um modelo matemático é identificar as incógnitas (variáveis do problema), ou seja, o que se deseja determinar. No problema da mistura, as variáveis são as quantidades dos ingredientes. Assim, definimos a variável:
x_j: a quantidade do ingrediente j que deve ser utilizada em uma unidade de mistura, j=1, 2,..., n.
Uma unidade de mistura pode ser, por exemplo, 1kg. Essas variáveis devem ser não-negativas, pois um valor negativo para x_j não tem significado, isto é: $x_j \geq 0$, j = 1, 2, ..., n são restrições do modelo. Para escrever as demais restrições, relativas à composição da mistura e seu custo, usamos a seguinte notação:
a_{ij} a fração do componente i no ingrediente j, i = 1, ..., m e j = 1, ..., n,
b_i a fração do componente i na mistura, i = 1, ..., m,
c_j o custo de uma unidade do ingrediente j, j = 1, ..., n.

Temos o modelo geral:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

1. **Implemente o modelo geral usando a ferramenta Ilog Cplex (C, C++, Phyton ou Java).**
2. **Crie pelo menos 2 instâncias para o problema.**
3. **Submeta seu código e as instâncias no Stoa.**

Exercício 3 (Problema de planejamento da produção): Considere o seguinte modelo geral para o problema de planejamento da produção.

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & f(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& d_j \leq x_j \leq v_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Esse modelo se aplica ao caso da fabricação de geladeiras descrito a seguir: um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada. O departamento de marketing e vendas realizou uma pesquisa de mercado que indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo de luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa já contratou um certo número de empregados e, com isso, dispõe de uma força de trabalho de 25.000 homens-hora por mês. Cada modelo de luxo requer dez homens-hora e cada modelo básico requer oito homens-hora para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos e considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4.500 geladeiras por mês. O lucro unitário do modelo de luxo é de $100,00, e do modelo básico é de $50,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

1. **Implemente o model matemático geral deste problema de planejamento da produção.**
2. **Crie um instância para o caso da fabricação de geladeira.**
3. **Solucione a instância criada para o caso da fabricação de geladeira.**
4. **Submeta no Stoa o código da sua implementação e a instância gerada.**

Exercício 4 (Problema de Designação):

Neste problema, tem-se m agentes e n tarefas, com $m < n$; cada tarefa deve ser executada por um único agente, e um agente pode executar mais de uma tarefa. A execução da tarefa j pelo agente i requer uma quantidade a_{ij} de recurso do agente i, com custo c_{ij}. O agente i tem capacidade de recurso b_i. Ao se utilizarem as variáveis binárias do problema anterior, obtém-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{D5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n \tag{D6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{D7}$$

$$\mathbf{x} \in B^{mn} \tag{D8}$$

A função objetivo (D5) minimiza o custo total de designação de tarefas a agentes. As restrições (D6) garantem que cada tarefa j é executada por um único agente, e as restrições (D7) impõem que a capacidade b_i de cada agente i não é excedida. A restrição (D8) indica o tipo das variáveis. Ao se associarem agentes com mochilas e itens com tarefas, nota-se a semelhança do problema de designação generalizada com o problema de empacotamento em mochilas. No primeiro problema, o número de mochilas é dado, enquanto no segundo este número deve ser minimizado.

Considere $m = 3$ agentes, $n = 8$ tarefas e os seguintes parâmetros:

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 15 & 61 & 3 & 94 & 86 & 68 & 69 & 51 \\ 21 & 28 & 76 & 48 & 54 & 85 & 39 & 72 \\ 21 & 21 & 46 & 43 & 21 & 3 & 84 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 31 & 69 & 14 & 87 & 51 & 65 & 35 & 54 \\ 23 & 20 & 71 & 86 & 91 & 57 & 30 & 74 \\ 20 & 55 & 39 & 60 & 83 & 67 & 35 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [b_i] = [100 \quad 100 \quad 100]$$

1. **Implemente o model matemático geral deste problema de planejamento da produção.**

2. **Crie um instância para o exemplo dado.**
3. **Solucione a instância criada para o exemplo.**
4. **Submeta no Stoa o código da sua implementação.**

Exercício 5 (Problema de Designação com múltiplos níveis):

Neste problema, cada tarefa j é executada por um único agente em um nível de eficiência $k = 1, ..., l$. Seja a_{ijk} a quantidade do recurso usada pelo agente i no nível k para executar a tarefa j, e b_i a quantidade do recurso disponível para o agente i. O custo de designar a tarefa j ao agente i no nível k é c_{ijk}. Em problemas reais, a relação entre custo e utilização de recursos é tal que, se $a_{ijk'} < a_{ijk''}$, então $c_{ijk'} > c_{ijk''}$.

Defina as variáveis

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } j \text{ é designada ao agente } i \text{ no nível } k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema é, então, formulado como

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} c_{ijk} x_{ijk} \qquad \text{(D10)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} = 1, \quad j = 1, \; ..., \; n \qquad \text{(D11)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} a_{ijk} x_{ijk} \leq b_i, \quad i = 1, \; ..., \; m \qquad \text{(D12)}$$

$$\mathbf{x} \in B^{mnl} \qquad \text{(D13)}$$

A função objetivo (D10) expressa a minimização do custo total de designação de tarefas a agentes nos níveis. As restrições (D11) garantem que cada tarefa j é executada por um único agente i em um nível k, e as restrições (D12) impõem que a capacidade b_i de cada agente i não é excedida. A restrição (D13) indica o tipo das variáveis.

1. **Implemente o model matemático geral deste problema de planejamento da produção.**
2. **Crie um instância para o problema. Dica: Você pode adaptar o exemplo do exercício 4.**
3. **Solucione a instância criada usando a formulação geral..**
4. **Submeta no Stoa o código da sua implementação e a instância criada.**