Cálculo IV, Prova 2, Prof. Juan López Linares, 23/11/2017

Para ser entregue no dia *30/11/2017* às *20h* na sala cinza.

1) Resolva detalhadamente o problema de valores de contorno:
$x^2y'' + 5xy' + (4 + \pi^2)y = ln(x)$, *y(1)=0, y(e)=0.*

2) Encontre os autovalores reais e autofunções do problema de valores de contorno:
y´´- λ y=0, y(0)=0, y´(L)=0. Note que a segunda restrição é na derivada.

3) Encontre a série de Fourier da função:
$$f(x) = \begin{cases} x, & se -\pi \le x < 0 \\ 0, & se\ 0 \le x < \pi \end{cases} \text{ e } f(x + 2\pi) = f(x)$$
Faça os gráficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $f(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$.

4) Faça uma extensão periódica **par** da função:
$$f(x) = x^2 - 2x\ se\ 0 < x < 4$$
Encontre a série de Fourier da extensão anterior. Esboce os gráficos de $f(x)$ e das três primeiras aproximações para $f(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-4 \le x \le 4$.

5) Faça uma extensão periódica **ímpar** da função:
$$f(x) = 5 - x \text{ se } 0 < x < 5$$
Encontre a série de Fourier da extensão anterior. Esboce os gráficos de *f(x)* e das três primeiras aproximações para *f(x)* seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-5 \le x \le 5$.

6) Considere a condução do calor em uma barra com *40 cm* de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de *0°C* para todo *t > 0*. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for:
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \le x < 10 \\ 50, & se\ 10 \le x \le 30 \\ 0, & se\ 30 < x < 40 \end{cases}$$
Considere $\alpha = 1$ e faça os gráficos "*u* vs. *t*" e "*u* vs. *x*" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de *x* e *t*, respectivamente.

7) Considere a condução do calor em uma barra com *50 cm* de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de *10°C* em *x=0* e *40°C* em *x=50* para todo *t > 0*. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for $u(x,0) = x,\ se\ 0 \le x \le 50$. Considere $\alpha = 1$ e faça os gráficos "*u* vs. *t*" e "*u* vs. *x*" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de *x* e *t*, respectivamente.

8) Considere uma corda elástica com *1 m* de comprimento cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento, **sem** velocidade inicial, de uma posição inicial:

$$u(x,0) = \begin{cases} 4x & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & se\ \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & se\ \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. Considere a velocidade de propagação horizontal da onda *v=1 m/s* e faça os gráficos "*u* vs. *t*" e "*u* vs. *x*" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de *x* e *t*, respectivamente.

9) Considere uma corda elástica com *1 m* de comprimento cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio, **com** velocidade inicial:

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 4x & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1 & se\ \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 4(1-x) & se\ \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. Considere a velocidade de propagação horizontal da onda *v=1 m/s* e faça os gráficos "*u* vs. *t*" e "*u* vs. *x*" usando os primeiros somandos da solução para diferentes valores de *x* e *t*, respectivamente.

10) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação diferencial em derivadas parciais de Laplace no retângulo, $0 < x < a$ e $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno:

$$u(0,y) = 0;\ u(a,y) = 0 \text{ com } 0 < y < b$$
$$u(x,0) = h(x);\ u(x,b) = 0 \text{ com } 0 \leq x \leq a$$