TEOREMAS DE OTIMIZAÇÃO CONDICIONADA
(Com Restrições de Igualdade)

Considere o seguinte problema (**P1**) de otimização condicionada:

$$\text{Maximize ou Minimize } F(x) \quad \text{onde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in R^N$$
$$\text{Sujeito a } \quad h(x) = c$$

As condições de **1ª ordem** (ou condições necessárias) e as de **2ª ordem** (condições suficientes) são estabelecidas nos Teoremas 1 e 2, respectivamente, apresentados a seguir:

Teorema 1: Sejam F(x) e h(x) funções contínuas e diferenciáveis, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$. Suponha que $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ é uma solução do problema **P1** acima. Suponha também que x^* não é ponto crítico da função h(x), ou seja, que $\frac{\partial h(x^*)}{\partial x_i} \neq 0$, para todo i = 1, 2, ..., N.

Então existe um número real μ^*, tal que (x^*, μ^*) constitui-se num ponto crítico da função de Lagrange $L(x, \mu) = F(x) - \mu[h(x) - c]$. Ou seja, no ponto (x^*, μ^*), tem-se que:

$$\frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_N} = 0, \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial \mu} = 0$$

Teorema 2: Sejam F(x) e h(x), onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$, funções contínuas e diferenciáveis. Considere em relação a essas funções o problema de otimização **P1** acima especificado.

Defina a função Lagrangeana $L(x, \mu) = F(x) - \mu[h(x) - c]$ e suponha que:

a) $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$ satisfaz a restrição, ou seja, $h(x^*) = c$;

b) existe μ^*, tal que junto com x^*, as seguintes condições são atendidas:

$$\frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_2} = 0, \cdots \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial x_N} = 0, \quad \frac{\partial L(x^*, \mu^*)}{\partial \mu} = 0$$

c) a Matriz Hessiana Orlada $$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_N} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

calculada no ponto $\left(x^*, \mu^*\right)$, é tal que:

c.1) os seus k-ésimos menores principais alternam de valor da seguinte forma: $\left|\bar{H}_2\right| < 0$, $\left|\bar{H}_3\right| > 0$, $\left|\bar{H}_4\right| < 0$, etc

ou

c.2) os seus k-ésimos menores principais são todos negativos: $\left|\bar{H}_2\right| < 0$, $\left|\bar{H}_3\right| < 0$, $\left|\bar{H}_4\right| < 0$, ..., $\left|\bar{H}_N\right| < 0$

Então $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$ é um ponto de <u>**Máximo Local Estrito**</u> do problema **P1** (se a condição **c.1** é a verdadeira), ou é um ponto de <u>**Mínimo Local Estrito**</u> do problema **P1** (se é a condição **c.2** a verdadeira).

Exemplo 1: Resolver o seguinte problema:

$$\text{Maximize} \quad F(x_1, x_2) = x_1 x_2$$
$$\text{sujeito a} \quad h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Verificação Prévia: solução (x_1^*, x_2^*) pode ser ponto crítico de $h(x_1, x_2)$?

Não, dado que $\frac{\partial h}{\partial x_i} = 2x_i = 0$ apenas no caso em que $x_i = 0$. Mas $x_1 = x_2 = 0$ não podem ser candidatos à solução do problema, dado que esses valores não atendem à restrição de que $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Condições de 1ª Ordem: definindo a função Lagrangeana $L(x_1, x_2, \mu) = x_1 x_2 - \mu\left[x_1^2 + x_2^2 - 1\right]$ a solução (x_1^*, x_2^*), junto com um multiplicador de Lagrange μ^*, devem atender:

(1) $$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \mu^*)}{\partial x_1} = x_2^* - 2\mu^* x_1^* = 0$$

(2) $$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \mu^*)}{\partial x_2} = x_1^* - 2\mu^* x_2^* = 0$$

(3) $$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \mu^*)}{\partial \mu} = -\left(x_1^*\right)^2 - \left(x_2^*\right)^2 + 1 = 0$$

(1) $x_2^* - 2\mu^* x_1^* = 0$ implica que $x_2^* = 2\mu^* x_1^*$ ou $\mu = \dfrac{x_2^*}{2x_1^*}$ se $x_1^* \neq 0$

(2) $x_1^* - 2\mu^* x_2^* = 0$ implica que $x_1^* = 2\mu^* x_2^*$ ou $\mu = \dfrac{x_1^*}{2x_2^*}$ se $x_2^* \neq 0$

Portanto,

$$\mu^* = \frac{x_2^*}{2x_1^*} = \frac{x_1^*}{2x_2^*} \qquad \text{ou que} \qquad \left(x_1^*\right)^2 = \left(x_2^*\right)^2$$

Essa condição, em (3)

$$(3) \quad -\left(x_1^*\right)^2 - \left(x_2^*\right)^2 + 1 = 0 \qquad \text{implica que}$$

$$-2\left(x_1^*\right)^2 + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad -2\left(x_1^*\right)^2 + 1 = 0$$

ou

$$x_1^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad x_2^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dado que $\mu^* = \frac{x_2^*}{2x_1^*} = \frac{x_1^*}{2x_2^*}$, temos os seguintes vetores de valores (x_1^*, x_2^*, μ^*) candidatos à solução do nosso problema:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

Condições de 2ª Ordem - a Matriz Hessiana Orlada do problema é:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2\mu & 1 \\ 2x_2 & 1 & -2\mu \end{bmatrix}$$

onde os segundo e terceiro menores principais são dados por:

$$|\bar{H}_2| = -(2x_1)^2 < 0$$

$$|\bar{H}_3| = 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 8\mu x_2^2 + 8\mu x_1^2 = 8\left[x_1x_2 + \mu\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]$$

Para os vetores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, temos que $\left|\overline{H}_3\right| > 0$.

Portanto, esses valores de $\left(x_1^*, x_2^*, \mu^*\right)$ resolvem o nosso problema.

Por outro lado, podemos verificar que para $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$, temos que $\left|\overline{H}_3\right| < 0$. Ou seja, esses valores seriam solução se o problema tivesse sido especificado na forma de minimização daquela função.

<u>CASO 2</u>: OTIMIZAÇÃO COM VÁRIAS EQUAÇÕES DE RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Considere o seguinte problema (**P2**) de otimização condicionada:

Maximize ou Minimize $F(x)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in R^N$

Sujeito a

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= c_1 \\
h_2(x) &= c_2 \\
&\vdots \\
h_M(x) &= c_M
\end{aligned}
$$

As condições de **<u>Primeira Ordem</u>** (ou as condições necessárias):

Teorema 3: Sejam F(x) , $h_1(x)$, $h_2(x)$, , $h_M(x)$ funções contínuas e diferenciáveis, onde $x=\left(x_1,x_2,...,x_N\right)\in R^N$. Suponha que $x^*=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_N^*\right)$ é uma solução do problema **P2** acima. Suponha também que no ponto x^*, as funções $h_1(x)$, $h_2(x)$, …, $h_M(x)$ satisfazem a Qualificação de Restrições Não Degeneradas (QRND).

Então existem os multiplicadores $\mu^*=\left(\mu_1^*,\mu_2^*,...,\mu_M^*\right)$, tal que $\left(x^*,\mu^*\right)=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_N^*,\mu_1^*,\mu_2^*,...,\mu_M^*\right)$ constitui-se num ponto crítico da função Lagrangeana:

$$L\left(x,\mu\right)=F\left(x\right)-\mu_1\left[h_1\left(x\right)-c_1\right]-\mu_2\left[h_2\left(x\right)-c_2\right]-....-\mu_M\left[h_M\left(x\right)-c_M\right]$$

ou

$$L\left(x,\mu\right)=F\left(x\right)-\sum_{i=1}^{M}\mu_i\left[h_i\left(x\right)-c_i\right]$$

Ou seja, no ponto $\left(x^*,\mu^*\right)$, tem-se que:

$$\frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial x_2}=0,\quad \cdots \quad \frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial x_N}=0$$

e

$$\frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial \mu_1}=0,\quad \frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial \mu_2}=0,\quad \cdots \quad \frac{\partial L\left(x^*,\mu^*\right)}{\partial \mu_M}=0$$

Observação: Diz-se que um conjunto de funções $h_1(x)$, $h_2(x)$, …, $h_M(x)$ atendem a chamada Qualificação de Restrições Não Degeneradas, (*Nondegenerate Constraint Qualification*), num ponto $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$, se a matriz jacobiana $Dh\left(x^*\right)$ dessas funções tem posto ou *rank* igual a M:

$$Dh\left(x^*\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1\left(x^*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1\left(x^*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1\left(x^*\right)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h_2\left(x^*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2\left(x^*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2\left(x^*\right)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_M\left(x^*\right)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_M\left(x^*\right)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_M\left(x^*\right)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Condições de <u>**Segunda Ordem**</u> (as condições suficientes)::

Teorema 4: Sejam $F(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, …, $h_M(x)$ funções contínuas e diferenciáveis, onde $x = \left(x_1, x_2, ..., x_N\right) \in R^N$. Considere em relação a essas funções o problema de otimização **P2** acima especificado.

Defina a função Lagrangeana $L\left(x, \mu\right) = F\left(x\right) - \sum_{i=1}^{M} \mu_i \left[h_i\left(x\right) - c_i\right]$ e suponha que:

a) $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$ satisfazem as M equações de restrições, ou seja, $h_1\left(x^*\right) = c_1$, $h_2\left(x^*\right) = c_2$, ..., $h_M\left(x^*\right) = c_M$;

b) existe $\mu^* = \left(\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_M^*\right)$, tal que junto com $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*\right)$, as seguintes condições são atendidas:

$$\frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial x_N} = 0$$

$$\frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial \mu_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial L\left(x^*, \mu^*\right)}{\partial \mu_M} = 0$$

b) a Matriz Hessiana Orlada

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial x_N} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial h_M}{\partial x_N} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_N} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

calculada no ponto $\left(x^*, \mu^*\right)$, é tal que:

c.1) os valores dos seus últimos (N–M) k-ésimos menores principais alternam em sinal, sendo que o sinal do último $\left(\left|\overline{H}_{N+M}\right|\right)$ é igual ao sinal de $\left(-1\right)^{N}$;

ou

c.2) os valores dos seus últimos (N–M) k-ésimos menores principais apresentam o mesmo sinal, sinal esse definido por $\left(-1\right)^{M}$;

Então $x^{*} = \left(x_1^{*}, x_2^{*}, ..., x_N^{*}\right)$ é um ponto de **<u>Máximo Local Estrito</u>** do problema **P2** (se a condição **c.1** é a verdadeira), ou é um ponto de **<u>Mínimo Local Estrito</u>** do problema **P2** (se é a condição **c.2** a verdadeira).

<u>Exemplo 2</u>: Resolver o seguinte problema:

$$\text{Maximize } F\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_1 + x_2\right)x_3$$

$$\text{Sujeito a } \quad x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$x_1 x_3 = 3$$

<u>Verificação da condição QRND:</u>. dada a sua matriz jacobiana

$$Dh = \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_3 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz terá posto menor do que 2 apenas se os determinantes das seguintes matrizes forem iguais a zero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x_2 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2x_3 \\ x_3 & x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

ou seja, apenas se $x_2 = x_3 = 0$. Mas esses valores não podem ser candidatos à solução do problema, dado que os mesmos não atendem às duas equações de restrições. Portanto, a condição QRND é válida nesse caso.

<u>Condições de 1ª Ordem</u>: definindo a função lagrangeana

$$L(x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2) = (x_1 + x_2)x_3 - \mu_1(x_2^2 + x_3^2 - 1) - \mu_2(x_1 x_3 - 3)$$

os valores (x_1^*, x_2^*, x_3^*) que resolvem o problema de maximização acima, junto com os valores dos multiplicadores (μ_1^*, μ_2^*), devem atender as seguintes condições:

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = L'_{x_1} = x_3^* - \mu_2^* x_3^* = 0$$

(2) $$L'_{x_2} = x_3^* - 2\mu_1^* x_2^* = 0$$

(3) $$L'_{x_3} = x_1^* + x_2^* - 2\mu_1^* x_3^* - \mu_2^* x_1^* = 0$$

(4) $$L'_{\mu_1} = -\left(x_2^*\right)^2 - \left(x_3^*\right)^2 + 1 = 0$$

(5) $$L'_{\mu_2} = -x_1^* x_3^* + 3 = 0$$

Resolução:

Em (1), se $x_3^* \neq 0$, então $\mu_2^* = 1$.

Em (2), se $x_2^* \neq 0$, então $\mu_1^* = \dfrac{x_3^*}{2x_2^*}$.

Em (3), se $x_2^* \neq 0$ e $x_3^* \neq 0$, então $x_2^* = \dfrac{2x_3^* x_3^*}{2x_2^*}$ ou $\left(x_2^*\right)^2 = \left(x_3^*\right)^2$

Esse último resultado em (4), implica que $2x_2^* = 1$ ou $x_2^* = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Logo $x_3^* = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\mu_1^* = \dfrac{1}{2}$ se x_2^* e x_3^* apresentam o mesmo sinal

e $\mu_1^* = -\dfrac{1}{2}$ se x_2^* e x_3^* apresentam sinais contrários.

Finalmente, em (5), temos que

$$x_1^* = \frac{3}{x_3^*} \qquad \text{ou} \qquad x_1^* = \pm 3\sqrt{2} \qquad \text{para} \qquad x_3^* = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, temos os seguintes pontos críticos $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \mu_1^*, \mu_2^*\right)$ da função lagrangeana:

$$p_1 = \left(3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1\right)$$
$$p_2 = \left(3\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$p_3 = \left(-3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$p_4 = \left(-3\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

<u>**Condições de 2ª Ordem**</u>: Seja a Matriz Hessiana Orlada do problema:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & (1-\mu_2) \\ 2x_2 & 0 & 0 & -2\mu_1 & 1 \\ 2x_3 & x_1 & (1-\mu_2) & 1 & -2\mu_1 \end{bmatrix}$$

Dado que N = 3 e M = 2, temos que verificar apenas o sinal do quinto menor principal dessa matriz.

Se esse sinal for o mesmo que o de $(-1)^N = (-1)^3 = -1$, então o ponto crítico estará associado à solução do nosso problema.

Assim sendo, para o ponto crítico $p_1 = \left(3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1\right)$, temos que:

$$|\overline{H}_5(p_1)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 3\sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Analogamente, temos que:

$$|\overline{H}_5(p_2)| = 4$$

$$|\overline{H}_5(p_3)| = 4$$

$$|\overline{H}_5(p_4)| = -4$$

Portanto, a solução do nosso problema está associado aos pontos p_1 e p_4, ou seja, a solução é dada por $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \pm\left(3\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Observação: Note que nos pontos p_2 e p_3, tem-se que o quinto menor principal tem sinal positivo, ou seja, o mesmo sinal de $(-1)^M = (-1)^2 = 1$, indicando que esses pontos seriam as soluções do problema, se o mesmo tivesse sido especificado como o da minimização da função objetivo.