Gabarito - Lista de Exercícios Microeconomia II

Outubro 2017

Moral Hazard

Resposta 1. Assuma que e é observável.

a) Tanto principal quanto a agente são neutros ao risco. Isso implica que não é possível resolver para as transferências contingentes w_8 e w_0 apenas para a transferência esperada

$$\bar{w}_e = Pr\{y = 8|e\}w_8 + Pr\{y = 0|e\}w_0.$$

Assuma agora que o principal deseja que o agente escolha o nível de esforço $e = e_1 = 3$ e $\bar{w}_{e_1} = (3/4)w_8 + (1/4)w_0$. A restrição de racionalidade individual do agente é:

$$\bar{w}_{e_1} - e_1 = \bar{w}_{e_1} - 3 \geq 0$$

Isso implica que

$$\bar{w}_{e_1} = 3, \quad \Pi_{e_1} = \frac{3}{4}8 - 3 = 3.$$

Assuma agora que o principal deseja que o agente escolha o nível de esforço $e = e_0 = 0$ e que $\bar{w}_{e_0} = (1/40)w_8 + (3/4)w_0$. A restrição de racionalidade individual do agente é:

$$\bar{w}_{e_0} = 0, \quad \Pi_{e_0} = \frac{1}{4}8 = 2.$$

Concluimos, então, que o contrato de first-best é:

$$\bar{w}^F = 3, \quad \Pi^F = 3.$$

Assuma agora que e *não* é observável e que $w_y \in [-100, 100]$.

b) O problema de second-best do principal é agora:

$$\begin{aligned} \max_{w_8, w_0} \quad & \frac{3}{4}(8 - w_8) - \frac{1}{4}w_0 = 6 - \frac{3}{4}w_8 - \frac{1}{4}w_0 \\ s.a. \quad & w_8 - w_0 \geq 6 \\ & 3w_8 + w_0 \geq 12 \end{aligned} \tag{1}$$

onde as duas restrições são, respectivamente, a restrição de compatibilidade de incentivos e a restrição de racionalidade individual. Graficamente esse problema de otimização linear pode ser representado por

figura1.PNG

O conjunto de contratos ótimos de second-best são:

$$w_0^S \in \left[-100, -\frac{3}{2}\right], \quad w_8^S = 4 - \frac{1}{3}w_0^S$$

Esse conjunto corresponde ao segmento $\bar{AB}$ na figura.
Note que o lucro esperado do principal associado com qualquer contrato de second-beest é $\Pi^S = 3 = \Pi^F$ em outras palavras não há perda associado com ao problema de risco moral e o resultado de first-best pode ser implementado.

Isto, obviamente, significa que o o agente exerça o nível alto de esforço.

Assuma agora que e não é observável e que o principal se depare com a restrição de responsabilidade limitada: $w_8 \geq 0$ e $w_0 \geq 0$.

c) O problema do principal é:

$$
\begin{aligned}
\max_{w_8, w_0} \quad & 6 - \frac{3}{4} w_8 - \frac{1}{4} w_0 \\
s.a. \quad & w_8 - w_0 \geq 6 \\
& 3w_8 + w_0 \geq 12 w_8 \geq 0, \quad w_0 \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

A solução para esse problema de otimização linear é, novamente, num ponto onde a restrição de responsabilidade limitada é ativa $w_0 = 0$. Esse é o ponto E na figura acima.

O contrato ótimo que resolve o Problema (2) é:

$$w_0 = 0, \quad w_8 = 6.$$

Note que nesse caso a restrição de racionalidade individual do agente não é ativa:

$$\frac{3}{4} w_8 + \frac{1}{4} w_0 - 3 = \frac{3}{2} > 0$$

O lucro esperado do principal então será $\Pi = 3/2 < \Pi^F$.

Relembre agora que quando o principal deseja induzir que o agente exerça o nível de esforço baixo $e_0 = 0$ o principal espera que o lucro seja $\Pi_{e_0} = 2$. Em outras palavras, o contrato ótimo de second-best que satisfaz a responsabilidade limitada é:

$$w_8^L = w_0^L = 0, \quad \Pi^L = 2$$

Assuma agora que $w(y) \in [-100, 100]$ e que as preferências do agente sejam representadas por $-e^{-r(w-e)}$ onde $r \to +\infty$.

d) Dado que o agente possui um coeficiente de aversão ao risco que tende ao infinito, será infinitamente custos induzir que o agente aceite um salário arriscado e satisfaça a restrição de responsabilidade limitada.

O resultado é, então, que o agente irá receber um salário constante $w_8 = w_0 = \hat{w}$ que, claramente, induz um nível de esforço baixo $e_0 = 0$. O salário $\hat{w}$ é tal que:

$$1 - e^{-r\hat{w}} = 0.$$

Essa restrição é ativa para qualquer nível de r se, e somente se, $\hat{w} = 0$.

Resposta 2. a) Veja que as distribuições são

$$F(\pi|0) = \begin{cases} 0 & , \text{se } \pi < 0, \\ \pi & , \text{se } \pi \in [0,1], \\ 1 & , \text{se } \pi > 1. \end{cases}$$

$$F(\pi|1) = \begin{cases} 0 & , \text{se } \pi < 0, \\ \pi\left(\frac{\pi+1}{2}\right) & , \text{se } \pi \in [0,1], \\ 1 & \text{se } \pi > 1. \end{cases}$$

Sempre que $\pi \in (0,1)$ sabemos que $\pi\left(\frac{\pi+1}{2}\right) < \pi\left(\frac{1+1}{2}\right) = \pi$. Então temos que

$$F(\pi|1) \leq F(\pi|0), \quad \forall \pi \in \mathbb{R}$$

sendo a desigualdade estrita para $\pi \in (0,1)$. Então a distribuição com $e = 1$ domina estocasticamente de primeira ordem (estritamente) a distribuição com $e = 0$.

b) O salário $w = 0$ implemente esforço zero.

c) Se o esforço é observável apenas é necessário remunerar o esforço para que essa opção fique tão boa quanto o custo de oportunidade[1]

$$w - k = 0 \Rightarrow w = k$$

d) Se o agente é neutro ao risco, a firma pode passar todo o risco de sucesso para o trabalhador, ou seja, o salário será tal que $w(\pi) = \pi - z$ tal que

$$E[w(\pi) - k | e = 1] = 0 \Rightarrow = E[\pi | e = 1] - k.$$

Resposta 3. a) $u(w) = w, v(e) = e^2, \bar{U} = 81.$

O agente é neutro ao risco

O retorno esperado de P se A trabalha duro é

$$0,1 \times 0 + 0,3 \times 100 \times 0,6 \times 400 = 270$$

Para trabalhar duro o agente deve receber, ao menos, um salário que resolve $w - 25 = 81$ i.e. $w = 106$.

Assim, o lucro máximo potencial de P é $270 - 106 = 164$.

Vamos tentar fazer com que o principal tenha essa expectativa:

Esquema:

Se $x_1 (= 0)$ então $w_1 = -164$

Se $x_2 (= 100)$ então $w_2 = -64$

Se $x_3 (= 400)$ então $w_3 = 236$

É aceitável para A?

---

[1] Na verdade, qualquer salário (mesmo que estocástico) que tenha o valor esperado igual ao custo de esforço é válido (qualquer salário com valor esperado zero valeria).

Outside option $\rightarrow \bar{U} = 81$

$$\begin{aligned} e^L :& u(w_i) = 0,6(-164) + 0,3(-64) + 0,1(236) = -94 \\ & v(e^L) = 0 \rightarrow U(w_i, e^L) = -94 \\ e^H :& u(w_i) = 0,1(-164) + 0,3(-64) + 0,6(236) = 106 \\ & v(e^L) = 25 \rightarrow U(w_i, e^H) = 81 \end{aligned}$$

Então, A aceita trabalhar e trabalhar duro (se melhorarmos o contrato marginalmente ao estabelecer $w_3 = 236 + \varepsilon$. O principal fica muito feliz pois recebe 164 independentemente.

b) e é verificável e observável.

Aqui podemos implementar o salário de first best de P:

$$w(e^H) = 106(+\varepsilon)$$

$$w(e^L) = 0$$

$\rightarrow$ o ótimo para A é trabalhar e trabalhar duro.

c) $u(w) = w^{\frac{1}{2}}, v(e) = e, \bar{U} = 9$

Primeiramente: e é observável.

Para trabalhar duro A precisa que

$$U(w, e^H) \geq \bar{U} \rightarrow \left(w\left(e^H\right)\right)^{\frac{1}{2}} - 5 \geq 9 \rightarrow w\left(e^H\right) \geq 196$$

Para exercer o nível baixo de esforço A precisa que

$$U(w, e^L) \geq \bar{U} \rightarrow \left(w\left(e^L\right)\right)^{\frac{1}{2}} - 5 \geq 9 \rightarrow w\left(e^L\right) \geq 81$$

Se A trabalha duro P recebe (esperança)

$$270 - w\left(e^H\right) = 74 > 0$$

Se A exerce o nível baixo de esforço P recebe

$$70 - w\left(e^L\right) = 11 < 0$$

$\rightarrow P$ deseja que A trabalhe duro, e ele implementa o trabalho duro ao, e.g.

$$w\left(e^H\right) = 196(+\varepsilon)$$

$$w\left(e^L\right) = 0$$

Segundo: e não é observável

P tem de elaborar contratos contingentes em $x_i \rightarrow w(x_i) = w_i$

Agente

Não trabalhar $\rightarrow \bar{U} = 9$

$$\begin{aligned}
\text{Esforço baixo } \rightarrow U\left(w_i, e^L\right) &= 0,6(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,1(w_3)^{\frac{1}{2}} - v\left(e^L\right) \\
&= 0,6(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,1(w_3)^{\frac{1}{2}} \\
\text{Trabalhar duro } \rightarrow U\left(w_i, e^H\right) &= 0,1(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,6(w_3)^{\frac{1}{2}} - v\left(e^H\right) \\
&= 0,1(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,6(w_3)^{\frac{1}{2}} - 5
\end{aligned}$$

Principal

Procedimento em dois passos

Para implementar $e = e^L$ ao menor custo possível, P pode escolher $w = w_1 = w_2 = w_3 = 81$, que resulta para o agente $(w)^{\frac{1}{2}} = 9 = \bar{U}$. Mas, isso gera um payoff esperado negativo para $P \Rightarrow P$ não deseja implementar $e = e^L$.

Para implementar $e = e^H$ a o menor custo possível, P deve resolver

$$\min_{w_1,w_2,w_3} 0,1w_1 + 0,3w_2 + 0,6w_3$$
$$s.a. IR : 0,1(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,6(w_3)^{\frac{1}{2}} - 5 \geq 9$$
$$IC : 0,1(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,6(w_3)^{\frac{1}{2}} - 5 \geq 0,6(w_1)^{\frac{1}{2}} + 0,3(w_2)^{\frac{1}{2}} + 0,1(w_3)^{\frac{1}{2}}$$

Note, adicionalmente, que $w_i \geq 0 \forall i$ (essa informação será relevante mais pra frente).

Vamos reformular o problema de P

Definindo: $\omega = \sqrt{w} \rightarrow \omega_i = \sqrt{w_i}$, se $x = x_i \rightarrow u(\omega) = \omega$

Para implementar e^H:

$$\begin{aligned} \min_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \quad & 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2 \\ s.a. \quad & 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 \geq 14 \qquad \text{(IR)} \\ & 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 - 5 \geq 0,6\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,1\omega_3 \qquad \text{(IC)} \end{aligned}$$

IC pode ser escrita da seguinte maneira

$$0,5(\omega_3 - \omega_1) \geq 5$$

$$\omega_3 - \omega_1 \geq 10$$

$$\omega_3 \geq \omega_1 + 10$$

Agora, é claro que ambas restrições serão ativas. Então o problema de P se reduz a

$$\begin{aligned} \min_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \quad & 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2 \\ s.a. \quad & 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 = 14 \\ & \omega_3 = \omega_1 + 10 \end{aligned}$$

Assim, o objetivo de P é minimizar

$$\mathcal{L} = 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2 + \lambda_1(0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 - 14) + \lambda_2(\omega_3 - \omega_1 - 10)$$

$$\omega_1 : 0,2\omega_1 + 0,1\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$\omega_2 : 0,6\omega_2 + 0,3\lambda_1 = 0 \tag{2}$$

$$\omega_3 : 1,2\omega_3 + 0,6\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_1 : 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 - 14 = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_2 : \omega_3 - \omega_1 - 10 = 0 \tag{5}$$

$$\text{de (2) } \lambda_1 = -2\omega_2 \tag{6}$$

$$\text{(6) em (1) } \rightarrow 0,2\omega_1 - 0,2\omega_2 = \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = 0,2(\omega_1 - \omega_2) \tag{7}$$

$$\text{(6) em (3) } \rightarrow 1,2\omega_3 - 1,2\omega_2 = -\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 = 1,2(\omega_2 - \omega_3) \tag{8}$$

$$\text{de (5) } \omega_3 = \omega_1 + 10 \tag{9}$$

$$\text{(9) em (8) } \rightarrow \lambda_2 = 1,2(\omega_2 - \omega_1 - 10) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \text{(7)=(10) } &\rightarrow 0,2(\omega_1 - \omega_2) = 1,2(\omega_2 - \omega_1) - 12 \\ &\rightarrow 12 = 1,4(\omega_2 - \omega_1) \qquad (11) \\ &\rightarrow \omega_2 = \omega_1 + \frac{60}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(9)+(11) em (4)} \rightarrow 0,1\omega_1 + 0,3\left(\omega_1 + \frac{60}{7}\right) + 0,6(\omega_1 + 10) &= 14 \\ \omega_1 + \frac{18}{7} + 6 &= 14 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \tfrac{38}{7} = 5\tfrac{3}{7} \\ \omega_2 &= \tfrac{98}{7} = 14 \\ \omega_3 &= \tfrac{108}{7} = 15\tfrac{3}{7} \end{aligned}\right\} \text{contrato que implementa } e^H \text{ ao menor custo para } P$$

$$\begin{aligned} & w_1 &= \tfrac{1444}{49} = 29\tfrac{23}{49} \\ \rightarrow\ & w_2 &= 196 \\ & w_3 &= \tfrac{11664}{49} = 238\tfrac{2}{49} \end{aligned}$$

O salário esperado do trabalhador é

$$0,1\left(\frac{1444}{49}\right) + 0,3(196) + 0,3\left(\frac{11664}{49}\right) \approx 204,5 > 196$$

Lucro esperado do principal

$$\approx 270 - 204,5 = 65,5$$

Assim, P perde $\approx 8,5$ comparando com o caso onde o esforço é observável.

d) Restrições de domínio: salários devem ser não negativos já que $u(w) = (w)^{\frac{1}{2}}$, mas isso não foi um problema acima.

Mas, não poderíamos utilizar um contrato como o descrito em (a) acima

e) Salário mínimo $w_i \geq 81 \forall i (\omega_i \geq 9)$. Essa restrição é ativa no caso descrito em (c), então, esse contrato não seria admissível.

Para implementar e^H, P deve resolver

$$\begin{aligned} & \min 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2 \\ & s.a. 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 - 14 \geq 0 && \text{(IR)} \\ & \quad \omega_3 - \omega_1 - 10 \geq 0 && \text{(IC)} \\ & \quad \omega_i \geq 9 \forall i && \text{(restrição de sal. min)} \end{aligned}$$

Olhando diretamente para as restrições

- $\omega_1 \geq 9 \Rightarrow \omega_3 \geq 9 + 10 = 19 \Rightarrow \omega_3 \geq 9$ não será ativa
- $\omega_1 \geq 9, \omega_2 \geq 9$ e $\omega_3 \geq 9$

  $\Rightarrow 0,1\omega_1 + 0,3\omega_2 + 0,6\omega_3 - 14$

$$\geq 0,1 \times 9 + 0,3 \times 9 + 0,6 \times 9 - 14$$
$$= 9 + 0,6 \times 10 - 14$$
$$= 15 - 14 = 1 > 1 \Rightarrow \text{ IR não será ativa}$$

Assim, P resolve

$$\min_{\omega_i} \quad 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2$$
$$s.a. \omega_3 \geq \omega_1 + 10$$
$$\omega_1 \geq 9, \omega_2 \geq 9$$

$\rightarrow \mathcal{L} = 0,1\omega_1^2 + 0,3\omega_2^2 + 0,6\omega_3^2 + \lambda_2(\omega_3 - \omega_1 - 10) + \mu_1(\omega_1 - 9) + \mu_2(\omega_2 - 9)$

$$\omega_1 : 0,2\omega_1 - \lambda_2 + \mu_1 = 0 \tag{1}$$
$$\omega_2 : 0,6\omega_2 + \mu_2 = 0 \tag{2}$$
$$\omega_3 : 1,2\omega_3 + \lambda_2 = 0 \tag{3}$$
$$\lambda_2 : \omega_3 \geq \omega_1 + 10 \tag{4}$$
$$\mu_1 : \omega_1 \geq 9 \tag{5}$$
$$\mu_2 : \omega_2 \geq 9 \tag{6}$$
$$(3) \rightarrow \lambda_2 = -1,2\omega_3 \neq 0 \rightarrow \lambda_2 = -1,2\omega_3 \tag{7}$$
$$(8) \rightarrow \omega_3 \geq \omega_1 + 10 \text{ é ativa} \Rightarrow \omega_3 = \omega_1 + 10 \tag{8}$$
$$(2) \rightarrow \mu_2 = -0,6\omega_2 \neq 0 \rightarrow \omega_2 \neq 9 \text{ é ativa} \Rightarrow \omega_2 = 9 \tag{9}$$
$$(8) \text{ em } (1) \rightarrow 0,2\omega_1 + 1,2\omega_2 + \mu_1 = 0 \tag{10}$$

(7) em (10) $\rightarrow 1,4\omega_1 + 12 \neq 0 \rightarrow \omega_1 \geq 9$ é ativa $\Rightarrow \omega_1 = 9 \Rightarrow \omega_3 = 9 + 10 = 19$

O esquema ótimo dado $\omega_i \geq 9, \forall i$, é

$$\omega_1 = \omega_2 = 9, \omega_3 = 19$$

ou $w_1 = w_2 = 81, w_3 = 361$

Note como o a restrição de salário mínimo é ativa. Ainda vale a pena para P implementar e^H: Retorno esperado = 270

Salário esperado $= 0,4 \times 81 + 0,6 \times 361 = 249$

Lucro/excedente=21

Suponha, alternativamente, que o salário mínimo fosse 100. Então o esquema ótimo para implementar e^H seria $w_1 = w_2 = 100, w_3 = 400$ o que resultaria em uma perda líquida de 10 para P, assim nenhum emprego seria o ótimo.

Resposta 4. Assuma inicialmente que o esforço do agente e é observável. Tanto principal quanto agente são neutros ao risco o que implica que só é possível resolver esse problema para a transferência esperada $\bar{w}$ para o agente. De fato, qualquer par (w_0, w_1) tal que $w_0 \geq 0, w_1 \geq 0$ e $\bar{w} = p_e w_1 + (1 - p_e) w_0$ é solução para o nosso problema.

A restrição (IR) para o agente é:

$$\bar{w} - e \geq 0$$

enquanto o lucro esperado do principal é

$$p_e - \bar{w}, \quad e \in \{0, \phi\}$$

onde $p_1 = p_\phi$

Assuma agora que o principal deseja induzir que o agente exerça o nível de esforço $e = \phi$ o contrato ótimo então é

$$\bar{w}_\phi = \phi, \quad \Pi_\phi = p_1 = \phi.$$

Assuma, alternativamente, que o principal deseja induzir que o agente exerça o nível de esforço $e = 0$ o contrato ótimo então é:

$$\bar{w}_0 = 0, \quad \Pi_0 = p_0.$$

Isso implica que o contrato de *first best* é:

$$e = \phi, \quad \bar{w}^F = \phi, \quad \Pi^F = p_1 - \phi$$

se

$$\phi \leq (p_1 - p_0).$$

E alternativamente:

$$e = 0, \quad \bar{w}^F = 0, \quad \Pi^F = p_0$$

se

$$\phi \geq (p_1 - p_0).$$

Assuma agora que e não é observável. E assuma que o principal deseja induzir que o agente escolha o nível de esforço $e = \phi$. O problema do principal toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\max_{w_1, w_0} \quad & p_1(1 - w_1) - (1 - p_1)w_0 \\
s.a. \quad & p_1 w_1 + (1 - p_1)w_0 - \phi \geq 0 \\
& p_1 2_1 + (1 - p_1)w_0 - \phi \geq p_0 w_1 + (1 - p_0)w_0 \\
& w_0 \geq 0, \quad w_1 \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

A solução para o problema (1), (w_0^*, w_1^*), é fácil de ser caracterizado. De fato, é claro que $w_0^* = 0$ enquanto que o nível de salário associado com $y = 1$ pode ser obtida a partir da restrição (IC): $w_1^* = \phi/(p_1 - p_0)$.
Note que quando o principal deseja induzir o nível alto de esforço, nem todas as três restrições são ativas. Em particular no equilíbrio, para qualquer valor de ϕ, a

restrição (IR) *não* é ativa.

Os payoffs de equilíbrio associado ao contrato (w_1^*, w_0^*) são:

$$\frac{p_0\phi}{p_1 - p_0} > 0 \tag{2}$$

para o agente, e

$$\Pi_\phi^* = p_1\left[1 - \frac{\phi}{p_1 - p_0}\right] \tag{3}$$

para o principal. Considere agora o caso em que o principal decida induzir o nível baixo de esforço $e = 0$. O problema do principal passa a ser agora

$$\begin{aligned} \max_{w_1, w_0} \quad & p_0(1 - w_1) - (1 - p_0)w_0 \\ s.a. \quad & p_0 w_1 + (1 - p_0)w_0 \geq 0 \\ & w_0 \geq 0, \quad w_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

É direto perceber que a solução (w_0^{**}, w_1^{**}), para o problema satisfaz $w_1^{**} = w_0^{**} = 0$. O payoff das partes nesse caso são $\bar{w} = 0$ e $\Pi_0^{**} = p_0$. O contrato de equilíbrio é obtido a partir da comparação entre Π_ϕ^* e Π_0^{**} - o payoff do principal quando o contrato oferecido induz o nível alto de esforço, (w_0^*, w_1^*), e seu payoff quando o contrato oferecido induz o nível baixo de esforço (w_0^{**}, w_1^{**}), respectivamente.

Note que nossa análise de contratos first best implica que é socialmente ótimo induzir que o agente exerça o nível alto de esforço sempre que

$$\phi \leq p_1 - p_0 \tag{5}$$

Além disso, o principal prefere estritamente induzir o nível de esforço alto sempre que $\Pi_\phi^* \geq \Pi_0^{**}$. Isso ocorre se, e somente se, a condição a seguir for satisfeita

$$\phi \leq \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_1} \tag{6}$$

Comparando as condições (5) e (6) fica claro que há valores de ϕ tal que

$$\frac{(p_1 - p_0)^2}{p_1} < \phi < p_1 - p_0$$

de maneira que o principal escolha um contrato ineficiente.

Resposta 5. Assuma inicialmente que o esforço do agente e é observável. Um contrato de first best é um vetor (e^*, w_0^*, w_1^*) onde w_1^* é a transferência contingente a $q = 1$ e w_1^* é a transferência contingente a $q = 0$.
A restrição (IR) do agente é então:

$$\Pi_a = ew_1 + (1-e)w_0 - \frac{e^2}{2} \geq 0$$

enquanto o lucro esperado do principal é dado por

$$\Pi_p = e(1 - w_1) - (1-e)w_0.$$

O problema de first best do principal é

$$\begin{aligned} \max_{e,w_1,w_0} \quad & e(1-w_1) - (1-e)w_0 \\ s.a. \quad & ew_1 + (1-e)w_0 - \frac{e^2}{2} \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Desse problema temos que o contrato de first best é tal que

$$e^* = 1, \quad w_1^* = 1/2, \quad \Pi_a^* = 0, \quad \Pi_p^* = 1 - w_1^* = \frac{1}{2}$$

sendo w_0^* é indeterminado.
O contrato de second best é o par (w_1^{**}, w_2^{**}), enquanto o problema de second best

do principal é:

$$\begin{aligned}
\max_{\hat{e},w_1,w_0} \quad & \hat{e}(1-w_1)-(1-\hat{e})w_0 \\
s.a. \quad & \hat{e}w_1+(1-\hat{e})w_0-\frac{\hat{e}^2}{2}\geq 0 \\
& \hat{e}=\arg\max_e ew_1+(1-e)w_0-\frac{e^2}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

A condição de primeira ordem da maximização da restrição (IC) é:

$$w_1 - w_0 = \hat{e}$$

Nesse caso podemos implementar o outcome de first best. Tome

$$w_1^{**} - w_0^{**} = 1$$

da restrição (IC) temos que o nível de esforço eficiente é:

$$e^{**} = 1.$$

A restrição (IR) é ativa e resulta em $w_1^{**} = 1/2$ então $w_0^{**} = -1/2$. Os payoffs do principal e do agente são:

$$\Pi_a^{**} = \Pi_a^* = 0, \quad \Pi_p^{**} = \Pi_p^* = \frac{1}{2}.$$

Considere agora o modelo onde o agente é *wealth constraint*. Pode parece que como no contrato de second best $e^{**} = 1$ não exista estado da natureza com probabilidade positiva onde o agente efetue uma transferência positiva para o principal então as soluções obtidas anteriormente também se aplicam para o caso onde o agente é *wealth constraint*. Infelizmente, esse argumento se apoia em uma ameaça não crível.

Em outras palavras, perfeição em subjogos impõe que estratégias fora do caminho de equilíbrio (*equilibrium path*) satisfaça a *wealth constrain*. Assim, nesse caso a *wealth constraint* será ativa para w_0:

$$w_0 = 0$$

A implicação imediata é que então a restrição (IR) não será ativa. Então o problema do principal se torna:

$$\begin{aligned} \max_{\hat{e},w_1} \quad & \hat{e}(1-w_1) \\ s.a. \quad & \hat{e} = w_1 \end{aligned} \tag{9}$$

onde a restrição é obtida a partir da condição de primeira ordem da restrição (IC). O contrato ótimo é, então:

$$\tilde{w}_1 = 1/2, \tilde{w}_0 = 0, \quad \tilde{\Pi}_p = 1/4, \tilde{\Pi}_a - 1/8$$

Resposta 6. O problema de first best do principal é:

$$\begin{aligned} \max_{e,w_1,w_0} \quad & eV(1-w_1) + (1-e)V(-w_0) \\ s.a. \quad & ew_1 + (1-e)w_0 - \phi(e) \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

A condição de primeira ordem implica em:

$$V'(1-w_1^*) = \lambda, \quad V'(-w_0^*) = \lambda$$

onde λ é o multiplicador de lagrange associado a restrição (IR) do agente. Como por hipótese $V'(.) > 0$ concluímos que $\lambda > 0$: a restrição (IR) é ativa. Além disso, das condições de primeira ordem obtemos também:

$$\phi'(e^*) = 1, \quad e^*w_1^* + (1-e^*)w_0^* - \phi(e^*) = 0$$

A partir disso obtemos que o contrato de first best implica em seguro completo para o principal:

$$1 - w_1^* = -w_0^*$$

e o esforço eficiente:

$$\phi'(e^*) = 1$$

onde

$$w_0^* = \phi(e^*) - e^*$$

O problema de second best do principal é

$$\begin{aligned} \max_{\hat{e}, w_1, w_0} \quad & \hat{e}V(1 - w_1) + (1 - \hat{e})V(-w_0) \\ s.a. \quad & \hat{e}w_1 + (1 - \hat{e})w_0 - \phi(\hat{e}) \geq 0 \\ & \hat{e} = \arg\max_e ew_1 + (1 - e)w_0 - \phi(e) \end{aligned} \tag{11}$$

A condição de primeira ordem da maximização da restrição (IC) é:

$$w_1 - w_0 = \phi'(\hat{e})$$

Note que nesse caso podemos implementar o resultado de first best. Tome

$$w_1^{**} - w_0^{**} = 1$$

obtemos que o esforço eficiente é:

$$\phi'(e^{**}) = 1$$

e o principal recebe o seguro completo:

$$1 - w_1^{**} = -w_0^{**}$$

então concluímos ao escolhermos:

$$w_0^{**} = \phi(e^{**}) - e^{**}$$

como no contrato de first best.

Resposta 7. a) O problema do principal é implementar $e = 1$ ao menor custo sujeito as restrições de racionalidade individual (IR), compatibilidade de incentivos (IC) e responsabilidade limitada (LL). É fácil notar que (LL) e (IC) implicam em (IR), então temos que

$$\begin{aligned}
\min_{w(i), i\in\{1,2,3\}} \quad & \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i) & \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i) - v(1) - \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=0)w(i) \geq 0 & \quad (IC) \\
& s(i) \geq 0 \text{ para } i \in \{1,2,3\} & \quad (LL)
\end{aligned}$$

e o Lagrangeano é:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i) - \lambda \left[\sum_{i=1}^{3} [\pi(i|e=1) - \pi(i|e=0)]w(i) - v(1) \right] - \sum_{i=1}^{3} \mu_i w(i)$$

onde λ é o multiplicador de (IC) e μ_i é o multiplicador de (LL) para o pagamento $w(i)$. As CPO's em relação ao pagamento são,

$$\pi(i|e=1)w(i) - \lambda[\pi(i|e=1) - \pi(i|e=0)] - \mu_i = 0, \quad i \in \{1,2,3\} \qquad \text{(CPO)}$$

e as condições de folga complementar para os μ_i's são,

$$w(i)\mu_i = 0, i \in \{1,2,3\} \qquad \text{(CS)}$$

Note que $w(i) > 0$ para algum i^* pois, caso contrário, (IC) seria violada, por sua vez (CS) implica que $\mu_{i^*} = 0$. Então, das (CPO's) em relação ao pagamento i^* temos que

$$\lambda \frac{1}{1 - \frac{\pi(i^*|e=0)}{\pi(i^*|e=0)}} > 1$$

e assim para qualquer i a (CPO) gera

$$\frac{\mu_i}{\pi(i|e=0)} = \lambda - (\lambda - 1)\frac{\pi(i|e=1)}{\pi(i|e=0)} \tag{1}$$

Como $\frac{\pi(i|e=1)}{\pi(i|e=0)}$ crescente em i (MLRP), e que $\lambda > 1$ juntamente com (1) temos que,

$$\frac{\mu_1}{\pi(1|e=0)} > \frac{\mu_2}{\pi(2|e=0)} > \frac{\mu_3}{\pi(3|e=0)} \geq 0.$$

Como já foi concluído que $\mu_{i^*} = 0$ para algum i^*, essas desigualdades implicam que isso só pode ocorrer para $i^* = 3$, implicando então que $\mu_1 > \mu_2 > 0$. De (CS) essas condições implicam que $w(1) = w(2) = 0$ e $w(3) > 0$.

Obs.: Essa conclusão pode ser obtida a partir de uma contradição. Se $w = (w(1), w(2), w(3))$ é uma solução com $w(\tilde{i}) > 0$ para algum $i < 3$ então considere um contrato alternativo w' onde $w'(\tilde{i}) = w(\tilde{i}) - \varepsilon$ e que $w'(3) = w(3) - \varepsilon \frac{\pi(\tilde{i}|e=1) - \pi(\tilde{i}|e=0)}{\pi(3|e=1) - \pi(3|e=0)} > w(3)$. Por construção, (IC) e (LL) são satisfeitas e de MLRP os custos esperados do principal são menores com o contrato w', uma contradição.

b) Isso pode ser mostrado a partir de uma argumentação por contradição. As restrições sobre os pagamentos $\frac{w(2)-w(1)}{2-1} \in [0,1]$ e $\frac{w(3)-w(2)}{3-2} \in [0,1]$ implicam que o problema do principal é o problema descrito acima com mais uma restrição:

$$w(2) - w(1) \in [0,1] \text{ e } w(3) - w(2) \in [0,1] \tag{M}$$

Os argumentos acima irão implicar na contradição.

Resposta 8. a) Esforço zero pode ser implementado ao pagar salários iguais a zero, independente do resultado da eleição. O payoff esperado do agente é zero. Como a eleição é perdida com probabilidade 1, o payoff do candidato é Π_D.

b) Para implementar $e = 1$, o contrato deve satisfazer a restrição de participação

$$pu(w_V) + (1 - p)u(w_D) - \bar{c} \geq 0$$

e a restrição de compatibilidade de incentivos

$$pu(w_V) + (1 - p)u(w_D) - \bar{c} \geq 0u(w_V) + 1u(w_D) - 0$$

Como $p > 0$, definimos $u_V := u(w_V)$ e $u_D := u(w_D)$, podemos reescrever as restrições no espaço de utilidade como:

$$pu_V + (1 - p)u_D \geq \bar{c}$$

$$u_V \geq u_D + \bar{c}/p.$$

O contrato ótimo deve defini $w_D = 0$ e $w_V = u^{-1}(\bar{c}/p)$, de modo que $u_D = 0$ e $u_V = \bar{c}/p$. Uma forma de ver é desenhar uma figura e observar que o candidato deseja minimizar

$$\mathbb{E}\{W(1)\} = pw_V + (1 - p)w_D = pu^{-1}(u_V) + (1 - p)u^{-1}(u_D)$$

sobre o conjunto factível

$$\{(u_D, u_V) \in \mathbb{R}^2 | u_V \geq u_D + \bar{c}/p, u_D \geq 0\}.$$

O conjunto factível é um "triângulo infinito" (não limitado na direção $u_V \to \infty$) e a fronteira relevante possui inclinação 1. A inclinação da curva de isocusto do candidato que atravessa o minimizador proposto $(u_V, u_D) = (\bar{c}/p, 0)$ é

$$\left.\frac{du_V}{du_D}\right|_{\mathbb{E}\{W(1)\}=const.} = -\frac{\frac{\partial \mathbb{E}\{W(1)\}}{\partial u_D}}{\frac{\partial \mathbb{E}\{W(1)\}}{\partial u_V}} = -\frac{\frac{1-p}{u'(w_D)}}{\frac{p}{u'(w_V)}} = -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{u'(w_V)}{u'(w_D)}\right).$$

Assim,

$$\left.\frac{du_V}{du_D}\right|_{\mathbb{E}\{W(1)\}=const.} \leq 0 < 1$$

O que significa que $(u_D, u_V) = (0, \bar{c}/p)$ é um mínimo global.

c) Os lucros por se implementar o esforço alto são

$$p(\Pi_V - u^{-1}(\bar{c}/p)) + (1-p)(\Pi_D - 0).$$

Assim, implementar o esforço alto é ótimo se, e somente se,

$$\Pi_V \geq u^{-1}(\bar{c}/p) - \left(\frac{1-p}{p}\right)\Pi_D.$$

d) Como o candidato está pagando um salário positivo, sabemos que o esforço alto está sendo implementado. Assim, $w_V = u^{-1}(\bar{c}/p)$. Isso significa que $\bar{c} = pu(w_V) = (1/2)\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$.

Havia um erro de digitação que afetam os dois últimos itens ("$\Pi_V + \Pi_D$" devia estar no lugar de "$\Pi_V - \Pi_D$").

Resposta 9. a) O nível first-best de esforço soluciona $\max E(ey) - g(e)$. Esse é um problema de concavidade e a condição de primeira ordem resulta no nível ótimo de esforço $e^* = Ey = 1$. Se o projeto é realizado, o excedente total é

$$E(e^*y) - g(e^*) - K = \frac{1}{2} - K$$

O projeto vale a pena quando esse valor é não-negativo, i.e., $K \leq \frac{1}{2}$. $\square$

b) E resolve o seguinte problema de contrato ótimo:

$$\begin{aligned}
\max_{e,w(.)} \quad & E2(ey) - g(e) \\
s.a. \quad & E(ey) - Ew(ey) \geq K && \text{(IR de I)} \\
& e \in \arg\max_{e} Ew(ey) - g(e) && \text{(IC de E)} \\
& w(x) \geq 0 \forall x && \text{(LL)}
\end{aligned}$$

Considere um contrato da forma $w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \bar{w} & \text{se } x \geq a \end{cases}$ para algum $a > 0$ e $\bar{w} > 0$. Para esse contrato temos

$$Ew(ey) = \int_{\frac{a}{e}}^{2} \bar{w} f(y) dy = \int_{\frac{a}{e}}^{2} \bar{w} \frac{1}{2} dy = \bar{w} \left(1 - \frac{a}{2e}\right)$$

Olhando primeiro para a restrição de incentivos de E. Seu problema passa a ser

$$\max_{e} \bar{w} \left(1 - \frac{a}{2e}\right) - \frac{1}{2} e^2$$

É fácil checar que a segunda derivada do maximizador é negativo e que a função é côncava. A condição de primeira ordem resulta em

$$\bar{w} \frac{a}{2e^2} - e = 0.$$

Desejamos que E escolha o esforço de first-best $e^* = 1$. Substituindo, obtemos $\bar{w} = \frac{2}{a}$. Agora, olhando para a restrição de racionalidade de I; Para maximizar o payoff de E desejamos fazer com que essa restrição seja ativa:

$$e - \bar{w} \left(1 - \frac{a}{2e}\right) = K$$

Substituindo o esforço de first-best $e^* = 1$, e $\bar{w}$ da expressão anterior, obtemos

$$1 - \frac{2}{a}\left(1 - \frac{a}{2}\right) = K \leq \frac{1}{2}$$

Isto implica que $a \leq \frac{4}{3}$ e $\bar{w} \geq \frac{3}{2}$. Assim, da restrição (IR) de I obtemos $\bar{w} \geq 2-k$, e de tudo acima obtemos:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{2}{2-k} \\ 2-k & \text{se } x \geq \frac{2}{2-k} \end{cases} \qquad \square$$

c) Se E pode, sem custo, destruir e emprestar produtos antes de ser observados por outsiders, a regra de divisão $w(x)$ é efetivamente restrita para satisfazer $0 \leq w'(x) \leq 1$ para todo x. O problema de E se torna

$$\begin{aligned} \max_{e,w(.)} \quad & E2(ey) - g(e) & \\ \text{s.a.} \quad & E(ey) - Ew(ey) \geq K & \text{(IR de I)} \\ & e \in \arg\max_e Ew(ey) - g(e) & \text{(IC de E)} \\ & w(0) \geq 0 & \text{(LL)} \\ & 0 \leq w'(x) \leq 1 \forall x & \end{aligned}$$

Iremos substituir a restrição de incentivos de E com a condição de primeira ordem correspondente, resolver o problema que decorre disso e então mostrar que uma solução para o esforço de E é de fato globalmente ótimo para ele. A condição de primeira ordem para a IC de E é $E(ew'(ey)) - g'(e) = 0$.

Expressamos a função objetivo e a IR de I em termos de $w(0)$ e $w'(.)$, usando integração por partes:

$$
\begin{aligned}
Ew(ey) &= \int_0^2 w(ey)f(y)dy = w(ey)\ F(y)|_0^2 - \int_0^2 ew'(ey)F9y)dy = \\
&= w(2e) - \int_0^2 ew'(ey)\frac{y^2}{4}dy = \\
&= w(0) + \int_0^2 ew'(ey)dy - \int_0^2 ew'(ey)\frac{y^2}{4}dy.
\end{aligned}
$$

Agora podemos reescrever o problema de E da forma

$$
\begin{aligned}
&\max_{e,w(0),w'(.)} w(0) + \int_0^2 ew'(ey)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy - \frac{1}{2}e^2 \\
&\quad \text{s.a.} e - w(0) - \int_0^2 ew'(ey)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy \geq K \qquad\qquad (\text{IR de I})\mu \geq 0 \\
&\qquad \int_0^2 ew'(ey)\frac{1}{2}dy - e = 0 \qquad\qquad (\text{CPO de E})\nu \\
&\qquad w(0) \geq 0 \qquad\qquad (\text{LL})\lambda \geq 0 \\
&\qquad 0 \leq w'(x) \leq 1 \forall x
\end{aligned}
$$

A última coluna contem os multiplicadores de Lagrange correspondentes. O Lagrangeano resultante é

$$
L = (1-\mu+\lambda)w(0) + \int_0^2 ew'(ey)\left[(1-\mu)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\nu\right]dy + (\mu-\nu)e - \frac{1}{2}e^2
$$

Diferenciando o Lagrangeano em relação a $w(0)$, obtemos $1-\mu+\lambda = 0$, o que implica que $\mu = 1+\lambda \geq 1$. Assim, a expressão entre colchetes dentro da integral é monotonamente crescente em y. Maximizando a integral em relação a $w'(.)$ ponto a ponto sujeito à restrição $0 \leq w'(x) \leq 1$, obtemos

$$
w'(ey) = \begin{cases} 1 & \text{se } \left[(1-\mu)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\nu\right] \geq 0, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}
$$

Como a expressão dentro dos colchetes é crescente em y, devemos ter que para algum a:

$$w'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \geq a, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assumindo que (LL) é ativa, obtemos ao integrar

$$w(x) = \begin{cases} x - a & \text{se } x \geq a, \\ 0 & \text{c.c..} \end{cases}$$

Agora falta apenas checa que dado o contrato nessa forma, a condição de primeira ordem de E irá de fato resultar em um nível de esforço ótimo globalmente. Dado tal contrato, o problema de maximização de E se torna

$$\max_e Ew(ey) - g(e) = \int_{\frac{a}{e}}^{2} (ey - a)\frac{1}{2}dy - \frac{1}{2}e^2 = e\left(4 - \frac{a^2}{e^2}\right) - \frac{a}{2}\left(2 - \frac{a}{e}\right) - \frac{1}{2}e^2$$

Se a função objetivo é expressa em termos de $t = \frac{1}{e}$, será côncava. Assim, a função objetivo possui um único máximo loca, que é obtido através das condições de primeira ordem. $\square$

d) O contrato obtido em (c) é um contrato de dívida.

Resposta 10. a) O conjunto de possíveis *outputs* é

$$\mathcal{H} := \{L, H, LL, LH, HL, HH\},$$

onde, por exemplo, HL se refere a $X_1 = x^H$ seguido por $X_2 = x^L$. Um contrato é então uma função $W : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ que especifica salários a serem pagos de acordo com cada *output*. Equivalentemente, um contrato pode ser definido como um vetor

$$(w^L, w^H, w^{LL}, w^{LH}, w^{HL}, w^{HH}) \in \mathbb{R}^6_+$$

que especifica todos os salários contingentes possíveis.

b) i) Para implementar o esforço alto, o principal deve estabelecer os salários de forma apropriada a satisfazer as restrições de IC sempre que o agente possa escolher o esforço, tanto depois de observar a realização do *output* no período $t = 1$ e quando assinando o contrato antes de X_1 ser realizado. No período $t = 2$, após observar $X_1 = x^L$ mas logo antes de escolher o esforços, a IC é:

$$pu\left(w^{LH}\right) + (1-p)u\left(w^{LL}\right) - c(q) \geq 0u\left(w^{LH}\right) + 1u\left(w^{LL}\right) - c(0).$$

Ou, mais sucintamente,

$$u\left(w^{LH}\right) - u\left(w^{LL}\right) \geq \frac{\bar{c}}{p}.$$

Similarmente, após observar $X_1 = x^H$, a IC é:

$$u\left(w^{HH}\right) - u\left(w^{HL}\right) \geq \frac{\bar{c}}{p}.$$

No momento de assinar o contrato (i.e. antes de escolher o esforço em $t = 1$), a IC é:

$$p\left\{u\left(w^{H}\right) + \beta\left[pu\left(w^{HH}\right) + (1-p)u\left(w^{HL}\right) - c(1)\right]\right\}$$

$$+(1-p)\left\{u\left(w^{L}\right) + \beta\left[pu\left(w^{LH}\right) + (1-p)w\left(w^{LL}\right) - c(1)\right]\right\} - c(1)$$

$$\geq$$

$$0\left\{u\left(w^{H}\right) + \beta\left[pu\left(w^{HH}\right) + (1-p)u\left(w^{HL}\right) - c(1)\right]\right\}$$

$$+1\left\{u\left(w^{L}\right) + \beta\left[pu\left(w^{LH}\right) + (1-p)u\left(w^{LL}\right) - c(1)\right]\right\} - c(0).$$

Essa inequação pode ser simplificada para

$$u\left(w^{H}\right) - u\left(w^{L}\right) + \beta\left\{p\left[u\left(w^{HH}\right) - u\left(w^{LH}\right)\right] + (1-p)\left[u\left(w^{HL}\right) - u\left(w^{LL}\right)\right]\right\} \geq \frac{\bar{c}}{p}.$$

ii) A restrição de participação em $t = 0$ é:

$$p\left\{u\left(w^{H}\right)+\beta\left[pu\left(w^{HH}\right)+(1-p)u\left(w^{HL}\right)\right]\right\}$$

$$+(1-p)\left\{u\left(w^{L}\right)+\beta\left[pu\left(w^{LH}\right)+(1-p)w\left(w^{LL}\right)\right]\right\}\geq(1+\beta)\bar{c}$$

iii) As restrições, agora, são dadas por:

$$u\left(w^{LH}\right)-u\left(w^{LL}\right)\geq 4.$$

$$u\left(w^{HH}\right)-u\left(w^{HL}\right)\geq 4.$$

$$u\left(w^{H}\right)-u\left(w^{L}\right)+\frac{1}{2}\left[u\left(w^{HH}\right)-u\left(w^{LH}\right)+u\left(w^{HL}\right)-u\left(u^{LL}\right)\right]\geq 4.$$

$$u\left(w^{H}\right)+u\left(w^{L}\right)+\frac{1}{2}\left[u\left(w^{HH}\right)+u\left(w^{HL}\right)+u\left(w^{LH}\right)+u\left(u^{LL}\right)\right]\geq 8.$$

O contrato ótimo que implementa o esforço alto em todos os nodos de decisões deve minimizar os salários esperados. Note que não há desconto do futuro, esforço é constante (sempre alto) e as realizações de *outputs* são i.i.d. (como esforço não muda). Assim, a solução é estacionária e depende apenas da realização corrente de *output*. Para minimizar o salário esperado, atribuímos o salário de *output* baixo igual a zero:

$$w_L = w_{LL} = w_{HL} = 0.$$

Para o *output* alto, o principal paga o mínimo que satifaça a restrição IC e a restrição de participação.

$$w_H = w_{LH} = w_{HH} = u^{-1}\left(\frac{\bar{c}}{p}\right) = 4^2 = 16.$$

iv) Se o agente pode sair em $t = 2$, precisamos adicionar duas restrições:

$$pu\left(w^{HH}\right) + (1-p)u\left(w^{HL}\right) - \bar{c} \geq 0.$$

$$pu\left(w^{LH}\right) + (1-p)u\left(w^{LL}\right) - \bar{c} \geq 0.$$

Entretanto, é fácil checar que o tipo de contrato encontrado acima

$$w_L = w_{LL} = w_{HL} = 0.$$

$$w_H = w_{LH} = w_{HH} = u^{-1}\left(\frac{\bar{c}}{p}\right).$$

Satisfaz essas restrições. Isso significa que nada mudaria.

Resposta 11. a) Caso a firma observe o esforço do agente, ela pode induzi-li a qualquer nível de esforço desde que a utilidade desse esforço (ao salário pago) seja superior ao custo de oportunidade. Nesse caso não há a restrição de incentivá-lo a se esforçar o previsto. Note que, dada a concavidade da função utilidade do trabalhador, a firma nunca usará um salário estocástico para remunerá-lo pois isso só piora a situação de ambos. O problema da firma é

$$\max_{e,w\geq 0} G(e) - w$$

$$s.a. \quad -e^{-\alpha(w-C(e))} \geq \bar{u}$$

Podemos reescrever a restrição de participação como

$$w \geq \frac{-\log(-\bar{u})}{\alpha} + C(e)$$

Sabemos que essa restrição sempre valerá na igualdade, então o problema pode ser reescrito como

$$\max_{e\geq 0} G(e) - C(e) + \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha}$$

Então e^{FB} ótimo está definido por[2][3]

$$G'\left(e^{FB}\right) = C'\left(e^{FB}\right).$$

O salário será

$$w^{FB} = \frac{-\log(-\bar{u})}{\alpha} + C\left(e^{FB}\right).$$

b) O nível de utilidade esperado de um trabalhador que aceita um salário (a, b) e exerce esforço e é dado por

$$v(a, b, e) \equiv E\left[e^{-\alpha[a+be+b\varepsilon-C(e)]}\right] = -e^{-\alpha[a+be-C(e)]}E\left[e^{-\alpha b\varepsilon}\right]$$

Usando o fato descrito na lista, sabemos então que

$$v(a, b, e) = -e^{\alpha[a+be-C(e)]}e^{\alpha^2\frac{b^2}{2}\sigma^2} = -e^{-\alpha\left[a+be-C(e)-\alpha\frac{b^2}{2}\sigma^2\right]}.$$

Então, dado um salário (a, b) qualquer, o nível de esforço escolhido pelo indivíduo é dado por

$$e^*(a, b) = \arg\max_{e\geq 0} v(a, b, e)$$

que tem condição de primeira ordem (a função é côncava em e então a condição de primeira ordem é necessária e suficiente)[4]

$$b - C'(e) = 0.$$

[2]Considerando $G'(0) > C'(0)$ sabemos que $e^{FB} > 0$.

[3]Caso $G(e^{FB}) - w^{FB} < 0$ então a firma não irá contratar o agente. Isso ocorrerá se seu custo de oportunidade for suficientemente alto i.e.,

$$\begin{aligned} G\left(e^{FB}\right) - \left[\frac{-\log(-\bar{u})}{\alpha} + C\left(e^{FB}\right)\right] &< 0 \\ -\alpha\left[G\left(e^{FB}\right) - C\left(e^{FB}\right)\right] &> \log(-\bar{u}) \\ -e^{-\alpha\left[G\left(e^{FB}\right)-C\left(e^{FB}\right)\right]} &< \bar{u} \end{aligned}$$

[4]A escolha do esforço será $e^*(a, b)$ caso $b < C'(0)$.

Então para que um indivíduo escolha o nível de esforço $\bar{e}$ o contrato (a, b) tem que satisfazer

$$b = C'(e);$$

$$-e^{-\alpha\left[a+bC'^{-1}(b)-C(C'^{-1}(b))-\alpha\frac{b^2}{2}\sigma^2\right]} \geq \bar{u}.$$

c) Do item acima, já sabemos qual a condição para que um contrato implemente um nível de esforço qualquer. Podemos deduzir que em qualquer contrato ótimo o agente ficará indiferente entre aceitar o contrato e não aceitá-lo (senão o empregador poderia reduzir a pagando menos). Isso significa que em qualquer contrato ótimo que implemente e, a é dado por

$$-e^{-\alpha\left[a+bC'^{-1}(b)-C(C'^{-1}(b))-\alpha\frac{b^2}{2}\sigma^2\right]} = \bar{u}$$

$$a + bC'^{-1}(b) - C(C'^{-1}(b)) - \alpha\frac{b^2}{2}\sigma^2 = \frac{-\log(-\bar{u})}{\alpha}$$
$$a = -bC'^{-1}(b) + C(C'^{-1}(b)) + \alpha\frac{b^2}{2}\sigma^2 - \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha}$$

Então o ganho esperado de um firma em implementar um esforço e é dado por[5]

$$\begin{aligned} E\{G(e) - a - bx\} &= G(e) - \left[-C'(e)e + C(e) + \alpha\frac{C'(e)^2}{2}\sigma^2 - \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha}\right] - C'(e)e \\ &= G(e) - C(e) - \alpha\frac{C'(e)^2}{2}\sigma^2 + \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha} \end{aligned}$$

Então o problema da firma de escolher o melhor nível de esforço a ser imple-

[5]Caso a firma decida implementar um nível de esforço $e > 0$. Caso p nível de esforço implementado seja $e = 0$, então o contrato ótimo terá $b = 0$ (não há porque gerar risco no payoff do trabalhador) e a definido por

$$-e^{\alpha[a-C(0)]} = \bar{u},$$

ou seja,

$$a = C(0) - \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha}.$$

mentado é dad por

$$\max_{e \geq 0} G(e) - C(e) - \alpha \frac{C'(e)^2}{2} \sigma^2$$

Uma condição necessária para um ótimo interior é a condição de primeira ordem

$$G'(e^*) - C'(e^*) - \alpha C'(e^*) C''(e^*) \sigma^2 = 0$$

(uma condição suficiente para a função objetivo ser côncava é $C''' < 0$, ou seja, concavidade da função C'). O contrato ótimo com esforço positivo deverá satisfazer (usando $C''(e) = b$)[6]

$$b^* = G''(e^*)[1 + \alpha C''(e^*) \sigma^2]^{-1},$$

e o valor de a será tal que o trabalhador fica indiferente entre trabalhar ou não.

d) Caso o agente seja neutro ao risco, o ganho esperado de um trabalhador que aceita o contrato (a, b) e faz esforço e é dado por

$$E[a + bx] = a + be.$$

Então para implementar esforço $\bar{e}$ mais uma vez basta que

$$b = C'(e);$$
$$a + be - C(e) \geq \bar{u}$$

O contrato ótimo para implementar e é dado por $(a, b) = (\bar{u} + C(e) - C'(e)e, C'(e))$

[6]Todos os cálculos presumem um valor de esforço positivo, mas o problema da firma poderia ser resolvido dessa forma e no final o ótimo com e positivo poderia ser comparado com o ganho implementando esforço zero, dado por

$$G(0) - C(0) + \frac{\log(-\bar{u})}{\alpha}.$$

e o ganho da firma em implementar o esforço e é dado por

$$G(e) - C(e) - \bar{u}$$

Então o esforço ótimo nesse caso será e^{FB}, e o contrato será $(a, b) = (C(e^{FB}) - C'(e^{FB})e^{FB}, C'(e^{FB}))$. Note que a firma terá ganho igual ao first-best, ou seja, o excedente gerado pelo esforço eficiente menos o custo de oportunidade do agente.

Por que isso ocorre? O problema é que a geração de incentivos necessariamente passa por atrelar o salário do agente a um risco externo (a produção final ou o sinal observado com ruído) o que gera uma espécie de "peso morto"caso o agente seja avesso ao risco, já que nesse caso o trabalhador exige mais remuneração para efetuar o mesmo esforço. Esse é um dos principais conflitos nas situações de informação privada, a necessidade de se gerar incentivos para trabalho eficiente entra em contradição com a provisão de seguro para os agentes (o que é eficiente com aversão ao risco).

Resposta 12. a) O problema de maximização é dado por:

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha,\beta} \quad & a_1^{\frac{1}{4}} a_2^{\frac{1}{2}} - \alpha a_1 - \beta \\
s.a. \quad & (a_1, a_2) = \arg\max \left(\alpha a_1 + \beta - C(a_1, a_2) - \frac{1}{4}\alpha^2\sigma^2 \right) \\
& \alpha a_1 + beta - \frac{1}{4}\alpha^2 - C(a_1, a_2) \geq 0
\end{aligned}$$

A primeira equação é a restrição de compatibilidade de incentivos. Vamos reduzi-la ao fatorar o termo de de ruído da função de utilidade. (Outra forma de dizer isto é que estamos computando o equivalente certeza.) A segunda é a restrição de participação. Podemos utilizar a abordagem de primeira ordem já que as condições são satisfeitas (MLRP e as funções de distribuição são convexas). Assim, podemos solucionar para o ótimo do agente e tomar a restrição de participação como ativa. O problema do agente é otimizar:

$$\alpha a_1 + \beta - (a_1 + a_2)^2 + 4(a_1 + a_2) - \frac{1}{4}\alpha^2$$

Como as condição de primeira ordem resultam (obviamente) que

$$(a_1 + a_2) \leq 4$$

e

$$(a_1 + a_2) \leq 4 + \alpha$$

Assim se $\alpha > 0$, $(a_1, a_2) = (4 + \alpha, 0)$. Se $\alpha = 0$ o agente ira escolher qualquer combinção de esforço que a soma seja 4. Se $\alpha < 0$ então[7] $(a_1, a_2) = (0, 4 + \alpha)$. Então β é dado por d.

Então se o principal escolhe $\alpha \neq 0$ a firma não produz nada. Assim a firma escolherá $\alpha = 0$. Nesse caso a restrição de participação resultará no β que é igual a

$$\beta^* = \frac{1}{4}\alpha^2 - 8$$

b) Novamente, o problema de maximização é dado por

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha,\beta} \quad & 18\ln(a_1) + 6\ln(a_2) - \alpha a_1 + \beta \\
s.a. \quad & (a_1, a_2) = \arg\max \left(\alpha a_1 + \beta - C(a_1, a_2) - \frac{1}{4}\alpha^2\sigma^2 \right) \\
& \alpha a_1 + \beta - \frac{1}{4}\alpha^2 - C(a_1, a_2) \geq 0
\end{aligned}$$

O problema do agente não mudou, assim ele ainda decidirá a mesma ação baseada em α. Como $\ln(a_1)$ tende ao infinito quando $a_1 \to 0$, segue que $\alpha \geq 0$.

[7] É razoável considerar esse caso. Nesse problema o agente possui particularmente prazer ao trabalhar para a firma. Assim o principal pode "cobrar" dele para tanto.

Assuma $\alpha > 0$. Vamos deixar tudo em função de α no problema de maximização e resolve-lo. Estamos ignorando a restrição de participação por hora, podemos fazer com que ela valha ex post ao utilizarmos β. O problema de maximização vira:

$$18\ln(4+\alpha) + 6\ln(1) - \frac{(\alpha+4)^2}{2} + 4(\alpha+4) - \frac{1}{4}\alpha^2$$

Tomando a derivada em relação a alpha temos:

$$\frac{18}{\alpha+4} = \frac{\alpha}{2}$$

Podemos resolver essa equação para obtermos (uma das duas soluções da equação é negativa):

$$\alpha^* = 2$$

com

$$a_1^* = 6$$

Por fim, o lucro é:

$$18\ln(6) + 5$$

O caso onde $\alpha = 0$ é simples pois o agente escolhe a ação tal que $a_1 + a_2 = 4$. Assim podemos resolver para o ótimo dividido desse problema para o principal que obtem payoff

$$18\ln(a_1) + 6\ln(1+a_2) + C$$

onde C é uma constante independente de a_i. Arranjando o Lagrangeano e o resolvendo obtemos

$$(a_1^*, a_2^*) = \left(\frac{18,5}{24}, \frac{6,5}{24}\right)$$

Assim obtemos o payoff de

$$18\ln\left(\frac{18,5}{24}\right) + 6\ln\left(\frac{30,5}{24}\right) + 8$$

Ao calcularmos esses lucros temos que com $\alpha = 2$ é maior, assim temos que $\alpha = 2$.

c) O que é estranho aqui é que temos $\alpha > 1$ o que é contra-intuitivo. Isso viola a restrição intuitiva que temos de que o esquema de incentivos deve ter derivada menor que 1. Mais surpreendente é que esse esquema possui inclinação maior que 1 em todos os pontos. Em um problema tradicional de agente-principal isso corresponderia vender para a firma muitas vezes mais.

Resposta 13.

$$P(e_1, e_2) = p_1e_1 + p_2e_2 \rightarrow \begin{aligned} C_i(e_i) &= k_ie_i^2 \\ C_i'(e_i) &= 2k_ie_i \\ C_i''(e_i) &= 2k_i \end{aligned}$$

$$u_i(w_i) = \bar{w}_i - \frac{1}{2}r_i\sigma^2 w_i$$

$$x_i = e_i + \varepsilon_i + \varepsilon_C \qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon_i &\sim N(0, \sigma^2) \\ \varepsilon_C &\sim N(0, \sigma_C^2) \end{aligned}\right\} \text{todos independentes}$$

$$\begin{aligned} w_i(x_i, x_j) &= \alpha_i + \beta_i(x_i - \lambda_i x_j) \\ \rightarrow \sigma_{w_i}^2 &= \beta_i^2 \underbrace{Var(x_i - \lambda_i x_j)}_{Var(s_i)} \\ &= \beta_i^2[Var(x_i) + \lambda_i^2 Var(x_j) - 2\lambda_i cov(x_i, x_j)] \\ &= \beta_i^2[\sigma^2 + \sigma_C^2 + \lambda_i^2(\sigma^2 + \sigma_C^2) - 2\lambda_i\sigma_C^2] \end{aligned}$$

Minimizando a variância

$$\rightarrow 2\lambda_i(\sigma^2 + \sigma_C^2) - 2\sigma_C^2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = \frac{\sigma_C^2}{\sigma^2 + \sigma_C^2}$$

$$\sigma_{w_i}^2 = Var(s_i) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2\sigma_C^2}{\sigma^2 + \sigma_C^2}$$

$$\text{Note: } Var(s_i) \to 0 \qquad \text{assim como } \sigma^2 \to 0 \quad \text{(Correlação perfeita)}$$
$$Var(s_i) \to \sigma^2 \qquad \text{assim como } \sigma_C^2 \to 0 \quad \text{(Sem correlação)}$$

Agora P resolve (max TCE)

$$\begin{aligned}
\max_{e} \quad & p_1e_1 + p_2e_2 - C_1(e_1) - C_2(e_2) - \frac{1}{2}r_1\beta_1^2 Var(s_1) - \frac{1}{2}r_2\beta_2^2 Var(s_2) \\
s.a. \quad & \beta_1 = C_1'(e_1) = 2k_1e_1 \to e_1 = \frac{\beta_1}{2k_1} \\
& \beta_1 = C_2'(e_2) = 2k_2e_2 \to e_2 = \frac{\beta_2}{2k_2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \beta_1 & = \frac{p_1}{1-r_12k_1Var(s_1)} \\ \beta_2 & = \frac{p_2}{1-r_22k_2Var(s_2)} \end{array}\right\} \text{onde} \begin{array}{ll} 2k_i & = C_i''(e_i) \\ Var(s_i) & = \sigma^2 + \frac{\sigma^2\sigma_C^2}{\sigma^2+\sigma_C^2} \end{array}$$

$$\to e_i = \frac{P_i}{2k_i(1+r_i2k_iVar(s_i)}$$

As restrições IR dos agentes são ativas

$$\to \alpha_i = \frac{p_i^2(r_i2k_iVar(s_i) - 1}{4k_i(1+r_i2k_iVar(s_i))^2}$$

Payoff para P ("do agente i")

$$= p_ie_i - \alpha_i - \beta_ie_i = \frac{p_i^2}{4k_i(1+r_i2k_i+Var(s_i))}$$

Resposta 14. a) A propriedades que assumimos para g implicam:

- $h(0) = h'(0) = 0$.
- $h'(e) > 0$ se $e > 0$.
- $h''(e) > 0$.
- $k'(\theta) < 0$.

b) Suponha que $\theta' > \theta$. De IC, temos

$$w(\theta') - h(e(\theta'))k(\theta') \geq w(\theta) - h(e(\theta))k(\theta').$$

$$w(\theta - h(e(\theta))k(\theta) \geq w(\theta') - h(e(\theta'))k(\theta).$$

Somando cada um dos lados dessas inequações, podemos eliminar os salários obtendo:

$$h(e(\theta))k(\theta') - h(e(\theta'))k(\theta') + h(e(\theta'))k(\theta) - h(e(\theta))k(\theta) \geq 0.$$

Isso é equivalente a

$$(h(e(\theta')) - h(e(\theta)))(k(\theta) - k(\theta')) \geq 0.$$

Como k é decrescente, $k(\theta) > k(\theta')$. Assim, a desigualdade implica $h(e(\theta')) \geq h(e(\theta))$. Como h é crescente, segue que $e(\theta') \geq e(\theta)$. Finalmente, a IC implica $w(\theta') \geq w(\theta)$.

c) IC requer que $e(\theta) \in \arg\max_{\theta' \geq 0} w(\theta') - h(e(\theta'))k(\theta)$. A CPO desse problema (obtida por derivar em relação aθ' e avaliando em $\theta' = \theta$) é

$$w'(\theta) = h'(e(\theta))e'(\theta)k(\theta).$$

d) Integrando a COP acima em $[0, \theta]$, temos

$$w(\theta) = w(0) + \int_0^\theta h'(e(\tilde{\theta}))e'(\tilde{\theta})k(\tilde{\theta}d\tilde{\theta}.$$

Usando integração por partes temos,

$$\int_0^\theta h'(e(\tilde{\theta}))e'(\tilde{\theta})k(\tilde{\theta})d\tilde{\theta} = h(e(\theta))k(\theta) - h(e(0))k(0) - \int_0^\theta h(e(\tilde{\theta}))k'(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}.$$

Note que $h(e(0)) = 0$ e tomando $w(0) = 0$ gera a expressão desejada.

Resposta 15. a) Como $h(a) = a^2/2$ é estritamente convexa e suave,

$$\gamma(a) = \min\{y \geq 0 | y - h'(a) = 0\} = h'(a) = 2a/2 = a.$$

b) Note que a equação HJB é descrita por:

$$F(W) = \max_{a>0,c} \left\{ a - c + F'(W)(W - 1 + e^{-c}) + \frac{1}{2}(F''(W)r\sigma^2 + F'(W)) \right\}.$$

As CPO's são:

$$1 + a(F''(W)r\sigma^2 + F'(W)) = 0 \quad -1 - F'(W)e^{-c} \leq 0,$$

onde a última desigualdade vale com igualdade se $c > 0$. Assim, o esforço ótimo é dado por

$$\hat{a}(W) = -\frac{1}{F''(W)r\sigma^2 + F'(W)}$$

onde o consumo é dado por

$$\hat{c}(W) = \begin{cases} 0 & \text{se } F'(W) \geq -1 \\ \ln(-F'(W)) & \text{se } F'(W) < -1 \end{cases}.$$

c) Primeiramente, note que a promessa inicial W^* maximiza o lucro, então $F'(W^*) = 0$. Assim, $\hat{c}(W^*) = 0$.Isso significa que o contrato ótimo inicialmente envolve transferência de dinheiro para o agente. Na verdade, o agente apenas passa a receber dinheiro $W_t > (F')^{-1}(-1) > W^*$.

Para provar essa última afirmação, calculamos

$$\hat{a}'(W) = \frac{F'''(W)r\sigma^2 + F''(W)}{(F''(W)r\sigma^2 + F'(W))^2}.$$

Para obter uma expressão para $F'''(W)$, utilizamos o teorema do envelope na equação HJB:

$$F'(W) = F''(W)(W - 1 + e^{-\hat{c}(W)}) + F'(W) + \frac{1}{2}\hat{a}(W)^2(F'''(W)r\sigma^2 + F'')).$$

Substituindo $\hat{c}(W) = 0$ e $\hat{a}(W)$ da CPO e simplificando obtemos

$$F''(W)W + \frac{1}{2}\hat{a}(W)^2(F'''(W)r\sigma^2 + F''(W)) = 0.$$

Note que

$$\hat{a}(W)^2(F'''(W)r\sigma^2 + F''(W)) = \hat{a}'(W).$$

Assim, utilizando a concavidade de F, obtemos

$$\hat{a}(W) = -2F''(W)W > 0.$$