Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ
Disciplina: LCE0220 Cálculo II
Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

5^a lista de exercícios - Funções a duas ou mais variáveis independentes

1. Usando a definição formal de derivadas parciais, encontre as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:
   a. $f(x,y) = -2x^3 + 4y$
   b. $f(x,y,z) = x^2 - y + 2z$

2. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a função $f(x,y) = 4xy^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(-1,2)$ e $f_y(-1,2)$

3. Encontrar as derivadas parciais de primeira ordem das funções a seguir.
   a. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$
   b. $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
   c. $z = \sqrt{x^2+y^2}$
   d. $z = e^{\frac{x}{y}}$
   e. $z = \text{sen}\dfrac{x}{y}$
   f. $z = \sqrt{\dfrac{x+y}{x^2+y^2}}$
   g. $z = e^{x^2-y^2}$
   h. $z = 5^{xy} + x - y$
   i. $z = x^3e^x + 5y$
   j. $z = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
   k. $z = \cos(3x^2 + e^{2y^3})$
   l. $z = 12x^2y^3 + \cos x - \ln y + 2^x$

4. Encontrar as derivadas parciais de segunda ordem das funções a seguir.
   a. $z = x^4y^3 - 2xy^2 + y - 5$
   b. $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$
   c. $z = \ln(x^2+y^2)$
   d. $z = e^{\frac{x}{y}}$
   e. $z = \text{sen}(xy)$
   f. $z = \dfrac{1}{x+y}$

5. Dada a função $f(x,y) = 2x^5y + \ln(y)$, construa a matriz hessiana para o ponto $P(1,3)$ e calcule seu determinante.

6. Se $z = xy + 2^x$, obter dz.

7. Dada a função $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, obter dz.

8. Mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}y = 2$ se $z = \ln(x^2+xy+y^2)$.

9. Mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}y = xy + z$ se $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

10. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a função $P(k, L) = 3k^{0,5}L^{0,5}$. Mostre que $k\dfrac{\partial P}{\partial k} + L\dfrac{\partial P}{\partial L} = P(k, L)$

11. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Seja $q = 30 - 4x - 2y$ a equação da demanda de um produto A, x seu preço unitário e y o preço unitário de um bem B.

    a. Calcule as demanadas marginais parciais, $\frac{\partial q}{\partial x}$ e $\frac{\partial q}{\partial y}$, explicando seu significado.

    b. O que aumenta mais a demanda de A: diminuir em uma unidade seu preço unitário (mantendo o de B) ou diminuir em uma unidade o preço unitário de B (mantendo o de A)?

12. Mostre que a função $z = 2xy^3$ é diferenciável no ponto $P(2, 3)$ e calcule a diferencial da função neste ponto para $dx = dy = 0,002$.

13. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Dada a função custo para a produção de dois bens de quantidades x e y, $C(x, y) = 100 + x^2 + 2y^2 + xy$, determine:

    a. o custo marginal em relação a x;

    b. o custo marginal em relação a y;

    c. $\frac{\partial C}{\partial x}(10, 20)$ e $\frac{\partial C}{\partial y}(10, 20)$, explicando seus significados.

14. Encontre a diferencial total de primeira ordem das seguintes funções:

    a. $z = \ln(2x^3 + \cos y)$

    b. $z = 10yx^3$

    c. $z = \dfrac{x}{x + y^2}$

    d. $z = e^{2x+y^3}$

15. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a seguinte função custo de dois bens de quantidades x e y:

$$C(x, y) = 15 + 2x^2 + 5y^2 + xy$$

    a. Calcule a diferencial do custo no ponto $x = 10$ e $y = 15$ para $\Delta x = \Delta y = 0,1$.

    b. Calcule a diferencial num ponto genérico para $\Delta x = \Delta y = 0,05$.

16. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) Considere a seguinte relação macroeconômica:

$$Y = \frac{C_0 + I + G - bT}{1 - b}$$

    em que Y é a renda nacional, C_0 e b são constantes, I representa o gasto com investimentos, G representa o gasto governamental, T representa o total de impostos. Usando a diferencial da função, verifique o que ocorre com a renda nacional, se o gasto governamental e os impostos aumentarem em 2 unidades monetárias e o gasto com investimentos permanecer constante.

17. Determinar a diferencial total de segunda ordem da função $z = \text{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$.

    Resp.: $d^2z = \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx^2 - \frac{2y}{(1+y^2)^2}dy^2$

18. Ache os pontos críticos de cada uma das funções a seguir e classifique-os.

    a. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$

    b. $z = e^{x^2+y^2}$

    c. $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$

    d. $z = \ln\left(2x^2 - 4x - 3y^2 + 27y - 10\right)$

e. $w = -x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 2y + 6z - 10$

f. $w = x^2 + y^2 + z^2 + y - z + xy + 6$

Resp.: a. $(\frac{10}{3}, \frac{11}{3})$ b. $(0,0)$ c. $(1,1)$ d. $(1,3)$ e. $(2,1,3)$ f. $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$

19. (Morettin, Hazzan e Bussab, 2010) O lucro que uma empresa obtém, vendendo dois produtos A e B é dado por

$$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

em que x e y são as quantidade vendidas. Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro. (**Resp.:** $(\frac{90}{23}, \frac{18}{23})$)

20. Num ensaio de espaçamento de eucaliptos, as produções obtidas para diversos espaçamentos foram as seguintes

Espaçamento (m $\times$ m)	Área (X) (m^2)	Produção (Y)(m^3/ha)
$1,0 \times 1,0$	1,00	268
$1,0 \times 1,5$	1,50	262
$1,0 \times 2,0$	2,00	266
$1,5 \times 2,0$	3,00	253
$1,0 \times 3,0$	3,00	229
$2,0 \times 2,0$	4,00	247
$2,0 \times 3,0$	6,00	206

Ajuste uma equação de regressão linear simples. Faça uma previsão da produção para uma área de 5,00 m^2. (**Resp.:** $\hat{Y} = -11,99X + 282,40$)

21. Os dados a seguir, referem-se ao número de dias após o plantio do milho (X) e o teor de Mg (Y), em mg/planta.

X	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Y	140	160	180	230	360	410	490	500	650	800

Ajustar um modelo de regressão linear simples para descrever o teor de Mg (Y) em função do número de dias após o plantio (X). Interpretar o coeficiente de regressão estimado $\hat{\beta}$. Faça uma previsão do teor de magnésio para X=75.

22. Calcular as integrais

a. $\int\int 3x^2y^3 dx\, dy$ b. $\int\int\int 4xy^2 z dx\, dy\, dz$ c. $\int\int x dx\, dy$

d. $\int\int x\cos(y) dxdy$ e. $\int\int (2x+y) dx\, dy$ f. $\int\int (y-1) dx\, dy$

23. Inverter a ordem de integração nas integrais duplas a seguir:

a. $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dydx$

b. $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y) dydx$

Resp.: a. $\int_0^{48} \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y) dxdy$ b. $\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y) dxdy + \int_2^3 \int_{y/3}^{1} f(x,y) dxdy$

24. Calcular as integrais definidas

    a. $\displaystyle\int_0^2 \int_1^3 (x^2y + 2xy^2)dx\ dy$

    b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi} [\text{sen}(x) + \cos(y)]dx\ dy$

    Resp. a. $\frac{116}{3}$ b. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$

25. Calcular $\displaystyle\int_D\int xydx\ dy$, em que D é a região do plano limitada pelas retas $x = 2$, $y = 2$ e $y = 2 - x$. (**Resp.:** $\frac{10}{3}$)

26. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = x + y$ e acima do domínio dado pela inequações $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 4$. (**Resp.:** 64)

27. Calcular $\int\int_D (2x - y)dxdy$, em que D é limitado pelas retas $x = 2$, $y = x$ e pela parábola $y = x^2$. (**Resp.:** $\frac{9}{10}$)

28. Calcule o volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = 5$ e acima do domínio dado pela inequações $0 \leq x \leq 4$ e $x \leq y \leq 2x$. (**Resp.:** 20)

29. Calcular $\int\int_D (x+y)dxdy$, em que D é limitado pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2-x$. (**Resp.:** $\frac{11}{6}$)

30. Ao calcular o volume V do sólido situado abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima de uma região S do plano xoy, obteve-se a seguinte soma de integrais:

$$V = \int_0^1 \left[\int_0^y z\ \ dx\right]dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} z\ \ dx\right]dy$$

Desenhe a região S e expresse o volume V por uma soma de integrais, para as quais a ordem de integração esteja invertida. Calcule o volume V.