Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" - ESALQ
Disciplina: LCE0220 Cálculo II
Prof. Idemauro Antonio Rodrigues de Lara

3^a lista de exercícios - Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

1. Uma equação diferencial ordinária, teve como solução geral a função na forma implícita $f(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$, em que c_1, c_2, c_3, c_4 são constantes arbitrárias. Qual é o grau da equação diferencial ordinária? Justifique.

2. Verifique se a função $y = \ln x + c$ é solução geral da equação $y' = \frac{1}{x}$.

3. Mostrar que a família de funções $y = e^x(c_1 \cos(x) + c_2 \text{sen}(x))$ é solução da equação diferencial $y'' - 2y' + 2y = 0$.

4. Verifique que a função $y = ce^{-8x}$ é solução geral da equação diferencial $y' + 8y = 0$. Ache a solução particular, sabendo-se para $x = 0$ temos $y = 10$.

5. Determinar as equações diferenciais que admitem as seguintes soluções:
   a. $y = e^{cx}$ [Resp.: $y'^2 - y''y = 0$]
   b. $xy + 1 = cy^2$ [Resp.: $y^2 - 2y' - xyy' = 0$]
   c. $y = c_1x + c_2x^2$ [Resp.: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$]
   d. $y\cos(x) + c_1x + c_2 = 0$ [Resp.: $y'' \cos x - 2y' \text{sen} x - y \cos x = 0$]
   e. $xy = c_1e^x + c_2e^{-x}$ [Resp.: $xy' + 2y' - xy = 0$]
   f. $\arctan y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = c$ [Resp.: $(1 + x^2)dy + x(1 + y^2)dx = 0$]

6. Encontrar a equação diferencial para a família de parábolas com vértice na origem e eixo das abscissas como eixo de simetria. [Resp.: $y^2 - 2xyy' = 0$]

7. Encontrar uma função, sabendo-se que sua derivada segunda é $-3x^2$, além disso, esta função passa pelo ponto P(-2,4) e a reta tangente à curva no ponto P é $y = 2x + 8$.

8. Determinar a solução particular da equação diferencial $\text{sen} x dx + y^2dy = 0$, sabendo-se que ela passa pelo ponto $P(\pi, 1)$. [Resp.: $y^3 = 4 + 3\cos x$]

9. Numa substância a decomposição molecular é realizada em função do tempo e, pode-se dizer, que a variação da quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade presente. Escreva a equação diferencial que caracteriza este fenômeno e escreva a equação que descreve o tempo necessário para que a quantidade se reduza à metade. Para a decomposição radioativa este tempo é denominado meia vida.

10. (Gomes e Nogueira, 1980) Sendo $dm = kmdt$, a equação diferencial da desintegração atômica, em que m é a massa do elemento e t é o tempo, pergunta-se em quanto tempo se reduz a 10% a massa do fósforo radioativo (P_{32}), cuja meia vida é de 14,3 dias. [Resp.: 47,5 dias]

11. Achar a equação da família de curvas para as quais o segmento da subnormal é proporcional à raiz quadrada da abscissa. [Resp.: $3y^2 = 4kx^{3/2} + c$]

12. Encontrar a soluação geral das equações diferenciais a seguir.

a. $(2x+4)dx + (3y-5y^2)dy = 0$ — Resp.: $6x^2 + 24x + 9y^2 - 10y^3 = c$

b. $(3x^2+4x)dx + (5y^3+2y+1)dy = 0$ — Resp.: $x^3 + 2x^2 + \frac{5}{4}y^4 + y^2 + y = c$

c. $(xy-y)dx + (xy-x)dy = 0$ — Resp.: $x + y - \ln xy = c$

d. $3x^2dx - 5y^3dy = 0$ — Resp.: $4x^3 - 5y^4 = c$

e. $x\dfrac{dy}{dx} = 3y$ — Resp.: $y = cx^3$

f. $xdx - y^2dy = 0$ — Resp.: $3x^2 - 2y^3 = c$

g. $y' = y^2x^3$ — Resp.: $y = \dfrac{4}{c-x^4}$

h. $y' = 5y$ — Resp.: $y = ce^{5x}$

i. $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$ — Resp.: $2y^5 + 10y - 5x^2 - 10x = c$

j. $(1+x^2)dy = \sqrt{1-y^2}dx$ — Resp.: $\text{arcsen}(y) = \arctan(x) + c$

k. $6x^2ydy = (1+x^2)dx$ — Resp.: $3xy^2 = x^2 - 1 + cx$

13. Resolver as equações diferenciais a seguir

a. $(x+y)dy + (x-y)dx = 0$ — Resp.:$\ln(x^2+y^2+2\arctan(\frac{y}{x}) = c$

b. $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$ — Resp.:$y = x\text{sen}x + cx$

c. $xdy - ydx = 2\sqrt{x^2-y^2}dx$ — Resp.:$2\ln(cx) = \text{arcsen}(\frac{y}{x})$

d. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \cos x$ — Resp.:$y = 1 + ce^{-\text{sen}(x)}$

14. A velocidade angular de uma polia é $w = 80 - 10t$ rd/seg. Quantas voltas ela dará antes de parar? [Resp.:$\simeq$ 51 voltas]

15. Se uma cultura de bactérias aumenta de maneira proporcional à quantidade existente em cada instante e se a população duplica numa hora, de quanto aumentará ao final de duas horas. Estabelecer uma equação diferencial de primeira ordem como modelo matemático deste problema.

16. Coloca-se um corpo com temperatura desconhecida em uma sala com temperatura de 30^o F. Se após 10 minutos a temperatura do corpo é de 0^o F e após 20 minutos é de 15^o F, qual era a temperatura inicial do corpo? (Resp. -30^o F)

17. Duas famílias de curvas são ditas trajetórias ortogonais se, cada membro de uma delas corta todos os membros da outra segundo ângulos retos. Determinar as trajetórias ortogonais da família de circunferências com centro na origem: $x^2 + y^2 = c$. (Resp.: y=cx)