



Lista de Exercícios de Cálculo II (LOB1004) - 7

Profa. Responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

Assunto referente: Regra da Cadeia, Derivação de funções definidas implicitamente, Determinante Jacobiano

1- Suponha que, para todo t , $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

2- Seja para todo (x, y) , $f(x, y, x^2 + y^2) = 0$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$.

3- Considere função $F(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$. Mostre que $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

4- Suponha que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Expresse $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial x}$ em termos de x, y, z .

5- Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$, mostre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$.

6- Calcule:

a) $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$, sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$

b) $\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$, sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$

c) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$, sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$

Respostas: a) $2(x - y)$, b) $-2xy^2$, c) $-2(s + 3r)$



7- Determine o jacobiano das funções:

a) $x = u + 4v$, $y = 3u - 2v$

b) $x = u^2 - v^2$, $y = u^2 + v^2$

c) $x = \frac{u}{u+v}$, $y = \frac{v}{u-v}$

d) $x = \alpha \sin \beta$, $y = \alpha \cos \beta$

e) $x = uv$, $y = vw$, $z = uw$

f) $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$, $z = e^{u+v+w}$

8- Sejam $u = x + y$ e $v = \frac{y}{x}$. Calcule o jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

Resposta: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{y}{x} \right)$

9- Seja $g(u,v) = f(x,y)$, sendo $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ são dadas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$. Suponha $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

a) Mostre que $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u}$.

b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$.

Resposta: b) $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$
