Mecânica Quântica — 7600022

Quinta Lista — teste no dia 17/10/2017

1. Demonstre a identidade

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

2. Na Mecânica Clássica, podemos definir o momento angular como $\vec{L} = -\vec{p}\times\vec{r}$. Na Mecânica Quântica, poderíamos definir o momento angular pela igualdade

$$\vec{L} = -\vec{P} \times \vec{R}?$$

Explique por quê.

3. Encontre a constante γ na igualdade

$$L_-|\ell, m\rangle = \hbar\gamma|\ell, m-1\rangle.$$

4. Calcule os elementos de matriz
   (a) $\langle \ell, \ell|L_+L_- + L_-L_+|\ell, \ell\rangle$
   (b) $\langle \ell, -\ell|L_+^2|\ell, -\ell+2\rangle$
   (c) $\langle \ell, \ell|L_-^2|\ell, \ell-2\rangle$

5. Calcule os elementos de matriz
   (a) $\langle \ell, \ell|L_x|\ell, \ell-1\rangle$
   (b) $\langle \ell, 0|L_y|\ell, 1\rangle$
   (c) $\langle \ell, 0|L_y|\ell, -1\rangle$

6. Qual é o valor médio esperado de uma medida de L_x no estado $|\ell, m\rangle$. E de uma medida de L_z?

7. Qual é o valor médio esperado de uma medida de L_x^2 no estado $|\ell, m\rangle$. E de uma medida de L_y^2? Dado ℓ, que valor(es) de m maximiza(m) esses valores médios? Você acha esse resultado razoável?

8. Na Mecânica Clássica, o componente L_x do momento angular se escreve, em coordenadas esféricas, na forma

$$L_x = L\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi).$$

De forma análoga, você pode encontrar L_y e L_z. Também pode definir L_+ e L_-, como na Mecânica Quântica. A partir desses resultados, compare a expressão quântica

$$L^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2$$

com a expressão clássica correspondente. Note que há uma distinção entre as duas e discuta a origem e a importância prática dessa distinção para um problema clássico típico (momento angular de um pião, por exemplo).

9. Considere o autoestado $|\ell, \ell\rangle$ de L^2 e L_z
   (a) Qual é o valor médio esperado de uma medida de L^2 nesse estado?
   (b) Qual é o valor médio esperado de uma medida de L_z nesse estado?
   (c) Apesar de L_z ter valor máximo nesse estado, o valor médio esperado de L^2 é maior do que o quadrado do valor esperado de L_z. Para entender por quê, empregue os resultados do problema 7 para obter os valores médios esperados de L_x^2 e L_y^2 no estado em questão.

10. Mostre que $|\ell, m\rangle$ somente é autoestado de L_x quando $\ell = m = 0$.

Mecânica Quântica - Lista 5

1) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

prova:

$$[AB, C] = ABC - CAB$$

$$= ABC - CAB + ACB - ACB$$

$$= A(BC - CB) + (-CA + AC)B$$

$$= A[B, C] + [A, C]B$$

2) Sim. Sempre que transformamos um objeto clássico em um quântico precisamos inicialmente transformar as funções clássicas em operadores quânticos e em seguida simetrizá-los.

Por exemplo,

$$xp = \frac{1}{2}(xp + px) \rightarrow \frac{1}{2}\hat{X}\hat{P} + \frac{1}{2}\hat{P}\hat{X}$$

Como $\vec{L} = -\vec{p} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{p}$, então

$\vec{L} \rightarrow \hat{L} = -\hat{P} \times \hat{R}$ e já está simetrizado!

3) $L_\pm |l, m\rangle = \hbar \gamma_\pm |l, m\pm 1\rangle$

$\gamma_\pm$?

Resolução:

$$L_\pm = L_x \pm i L_y$$

$$(L_\pm)^+ = L_x \mp i L_y = L_\mp$$

$$L_\mp L_\pm = (L_x \mp i L_y)(L_x \pm i L_y)$$

$$= L_x^2 \pm i L_x L_y \mp i L_y L_x + L_y^2$$

$$= L_x^2 + L_y^2 \pm i [L_x, L_y]$$

$$= L^2 - L_z^2 \pm i (i\hbar L_z)$$

$$= L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z$$

assim,

$$\langle l, m | L_\mp L_\pm | l, m\rangle = \langle l, m | L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z | l, m\rangle$$

note que

$$L^2 |l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle$$

$$\to \langle l, m | L_\mp L_\pm | l, m\rangle = \langle l, m | l(l+1)\hbar^2 - \hbar^2 m^2 \mp \hbar^2 m | l, m\rangle$$

$$= \hbar^2 [l(l+1) - m(m\pm 1)] \langle l, m | l, m\rangle$$

$$= \hbar^2 [l(l+1) - m(m\pm 1)]$$

Agora notando que

$$\langle l,m|L_\mp L_\pm|l,m\rangle = (L_\pm|l,m\rangle)^+ (L_\pm|l,m\rangle)$$

$$= (\hbar\gamma_\pm|l,m\pm1\rangle)^+ (\hbar\gamma_\pm|l,m\pm1\rangle)$$

$$= \hbar^2|\gamma_\pm|^2 \langle l,m\pm1|l,m\pm1\rangle$$

$$= \hbar^2|\gamma_\pm|^2$$

$$\rightarrow \hbar^2[l(l+1)-m(m\pm1)] = \hbar^2|\gamma_\pm|^2$$

$$\gamma_\pm = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}$$ (a menos de uma fase)

$$L_\pm|k,l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,|k,l,m\pm1\rangle$$

eventualmente pode ser quaisquer outros graus de liberdade no problema

4) a) $\langle l,l| L_+L_- + L_-L_+ |l,l\rangle$

notando que $L_\mp L_\pm = L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z$

$\rightarrow L_+L_- + L_-L_+ = 2(L^2 - L_z^2)$

$\rightarrow \langle l,l| L_+L_- + L_-L_+ |l,l\rangle = 2\langle l,l| L^2 - L_z^2 |l,l\rangle$

$= 2\langle l,l| l(l+1)\hbar^2 - \hbar^2 l^2 |l,l\rangle$

$= 2l\hbar^2 \langle l,l|l,l\rangle$

$= 2l\hbar^2$

b) $\langle l,-l| L_+^2 |l,-l+2\rangle \propto \langle l,-l|l,-l+4\rangle = 0$

c) $\langle l,l| L_-^2 |l,l-2\rangle \propto \langle l,l|l,l-4\rangle = 0$

5) $L_\pm = L_x \pm i L_y$

$\to L_x = \dfrac{L_+ + L_-}{2}$ e $L_y = \dfrac{L_+ - L_-}{2i}$

a) $\langle l,l|L_x|l,l-1\rangle = \dfrac{1}{2}\langle l,l|L_+ + L_-|l,l-1\rangle$

$= \dfrac{1}{2}\langle l,l|L_+|l,l-1\rangle + \dfrac{1}{2}\cancelto{0}{\langle l,l|L_-|l,l-1\rangle}$

$= \dfrac{1}{2}\hbar\sqrt{l(l+1)-(l-1)(l-1+1)}\,\langle l,l|l,l\rangle$

$= \dfrac{1}{2}\hbar\sqrt{l^2+l-l^2+l}$

$= \hbar\sqrt{l/2}$

b) $\langle l,0|L_y|l,1\rangle = \dfrac{1}{2i}\langle l,0|L_+ - L_-|l,1\rangle$

$= -\dfrac{1}{2i}\langle l,0|L_-|l,1\rangle$

$= \dfrac{i}{2}\hbar\sqrt{l(l+1)-1(1-1)}\,\langle l,0|l,0\rangle$

$= \dfrac{i\hbar}{2}\sqrt{l(l+1)}$

c) $\langle l,0|L_y|l,-1\rangle = \dfrac{1}{2i}\langle l,0|L_+ - L_-|l,-1\rangle$

$= \dfrac{1}{2i}\langle l,0|L_+|l,-1\rangle$

$$= \frac{1}{2i} \hbar \sqrt{l(l+1) - (-1)(-1+1)} \langle l, 0 | l, 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2i} \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

b) $\langle l,m|L_x|l,m\rangle = \frac{1}{2}\langle l,m|L_+ + L_-|l,m\rangle = 0$

$\langle l,m|L_z|l,m\rangle = m\hbar\langle l,m|l,m\rangle = m\hbar$

7) $\langle l,m| L_x^2 |l,m\rangle = \frac{1}{4} \langle l,m| (L_+ + L_-)^2 |l,m\rangle$

$= \frac{1}{4} \langle l,m| L_+^2 + L_-L_+ + L_+L_- + L_-^2 |l,m\rangle$

$= \frac{1}{4} \langle l,m| L_-L_+ + L_+L_- |l,m\rangle$

veja a questão 4a

$= \frac{1}{2} \langle l,m| L^2 - L_z^2 |l,m\rangle$

$= \frac{1}{2} [l(l+1) - m^2] \hbar^2 \langle l,m|l,m\rangle$

$= \frac{1}{2} [l(l+1) - m^2] \hbar^2$

$\langle l,m| L_y^2 |l,m\rangle = -\frac{1}{4} \langle l,m| (L_+ - L_-)^2 |l,m\rangle$

$= -\frac{1}{4} \langle l,m| L_+^2 - L_-L_+ - L_+L_- + L_-^2 |l,m\rangle$

$= \frac{1}{4} \langle l,m| L_-L_+ + L_+L_- |l,m\rangle$

$= \frac{1}{2} [l(l+1) - m^2] \hbar^2$

$= \langle l,m| L_x^2 |l,m\rangle$

$\langle l,m| L_z^2 |l,m\rangle = m^2\hbar^2 \langle l,m|l,m\rangle$

$= m^2\hbar^2$

$\langle L_x^2\rangle(m) = \langle L_y^2\rangle(m) = \frac{1}{2} [l(l+1) - m^2] \hbar^2$

para achar o valor de m que maximiza essa média, basta derivar em m e igualar a zero o resultado, isto é;

$$-m_{max}\hbar^2 = 0$$

$$\rightarrow m_{max} = 0$$

Esse resultado é razoável, pois como fixamos o valor de l, então fixamos o valor $\langle L^2 \rangle$. Como o valor de $\langle L_z^2 \rangle$ depende apenas de m^2, então quanto menor o valor de m^2 menor será a contribuição de $\langle L_z^2 \rangle$ ao valor de $\langle L^2 \rangle$ e, portanto, maior será a contribuição de $\langle L_x^2 \rangle$ e $\langle L_y^2 \rangle$.

8) Veja por exemplo a questão 3

$$L_\mp L_\pm = L_x^2 + L_y^2 \pm i[L_x, L_y]$$
$$= L^2 - L_z^2 \pm i[L_x, L_y]$$

$$\to L^2 = L_\mp L_\pm + L_z^2 \mp i[L_x, L_y]$$

Como na mecânica clássica os comutadores são sempre nulos, então

$$L^2 = L_\mp L_\pm + L_z^2 = L_+ L_- + L_z^2 \quad \text{(mecânica clássica)}$$

$$L^2 = L_\mp L_\pm + L_z^2 \mp i[L_x, L_y] = L_\mp L_\pm + L_z^2 \pm \hbar L_z \quad \text{(mecânica quântica)}$$

portanto, a única distinção é o termo linear em L_z que aparece apenas na mecânica quântica. A origem naturalmente se deve ao fato de diferentes componentes do momento angular não se comutarem na mecânica quântica. Assim, por exemplo não podemos medir com exatidão duas componentes do momento angular em mecânica quântica, enquanto na mecânica clássica podemos medir todas as componentes sem nenhuma limitação.

9) a) $\langle l,l|L^2|l,l\rangle = l(l+1)\hbar^2\langle l,l|l,l\rangle = l(l+1)\hbar^2$

b) $\langle l,l|L_z|l,l\rangle = l\hbar\langle l,l|l,l\rangle = l\hbar$

c) da questão 7, temos

$$\langle l,m|L_x^2|l,m\rangle = \langle l,m|L_y^2|l,m\rangle = \frac{1}{2}[l(l+1)-m^2]\hbar^2$$

$$\to \langle l,l|L_x^2|l,l\rangle = \langle l,l|L_y^2|l,l\rangle = \frac{1}{2}l\hbar^2$$

assim temos

$$\langle l,l|L^2|l,l\rangle = \langle l,l|L_x^2+L_y^2+L_z^2|l,l\rangle$$

$$= \langle l,l|\frac{1}{2}l\hbar^2+\frac{1}{2}l\hbar^2+l^2\hbar^2|l,l\rangle$$

$$= l(l+1)\hbar^2$$ (como visto na questão a)

portanto, tudo funciona corretamente!

10) $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$$L_x |l, \underbrace{m}\rangle = \frac{1}{2}(L_+|l,m\rangle + L_-|l,m\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,|l, \underbrace{m+1}\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,|l, \underbrace{m-1}\rangle$$

assim, apenas $|0,0\rangle$ é autovetor de L_x

$L_x|0,0\rangle = 0|0,0\rangle$ por definição!

se o momento angular é nulo é óbvio que o autovalor ou medida possível também será nula.