

Mecânica Quântica — 7600022

Sexta Lista — para praticar para a prova do dia 24/10/2017

Relações úteis

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$
$$L_{\pm} = \pm \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}.$$

1. Escreva a equação diferencial correspondente à relação $L_-|\ell, -\ell\rangle = 0$ e resolva para encontrar o harmônico esférico $Y_{\ell, -\ell}(\theta, \phi)$, a menos da constante de normalização.
2. A partir do resultado da questão anterior
 - (a) Lembrando que $\int |Y_{\ell, m}|^2(\theta, \phi) d\Omega = 1$ e adotando a convenção de que $Y_{\ell, -\ell}(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ é um número real positivo, encontre $Y_{1, -1}$.
 - (b) A partir do resultado do item anterior, encontre $Y_{1, 0}(r, \theta, \phi)$ e confira se esse resultado coincide com o encontrado em aula.

3. Calcule o comutador $[L_+, L_-]$ em coordenadas esféricas e verifique se o resultado coincide com a igualdade $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$.
4. Calcule o comutador $[L_+, L_z]$ em coordenadas esféricas e verifique se o resultado coincide com a igualdade $[L_+, L_z] = \hbar L_+$.
5. Escreva $L_+L_- + L_-L_+$ em coordenadas esféricas e compare o resultado com a expressão para o laplaciano em coordenadas esféricas (que você não precisa derivar. Pode encontrar na internet, por exemplo).
6. Por analogia com nosso tratamento das coordenadas esféricas, determine a expressão para L_z em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . *Ajuda:* As coordenadas cilíndricas se relacionam com as cartesianas pelas igualdades

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{tg } \phi = \frac{y}{x}.$$

7. Mostre que $\psi_a = zf(r)$, onde $f(r)$ é uma função que somente depende de r , é autofunção de L_z e encontre o autovalor de L_z correspondente.
8. Seja $\psi_b = (x + \alpha y)f(r)$, onde $f(r)$ é uma função que somente depende de r . Encontre os valores de α que fazem ψ_b ser autofunção de L_z . Quais são os autovalores correspondentes de L_z ? *Ajuda:* Escreva a equação $L_z\psi_b = \lambda\psi_b$ em coordenadas esféricas. Os termos proporcionais a $\cos(\phi)$ nos dois lados têm de ser iguais. Da mesma forma, os proporcionais a $\sin(\phi)$ têm de ser iguais. Daí resulta um sistema de duas equações com duas incógnitas que você poderá resolver para encontrar α e λ .
9. Mostre que $\psi_c = xf(r)$, onde $f(r)$ somente depende de r , é uma autofunção de L_x . Encontre o autovalor de L_x correspondente. *Ajuda:* Escreva L_x em termos de L_+ e L_- em coordenadas esféricas.
10. Considere a função $\psi_d = 1/r$
 - (a) Qual é o momento angular de ψ_d ? *Ajuda:* Calcule $L^2\psi_d$ e $L_z\psi_d$ em coordenadas esféricas.
 - (b) Mostre que

$$\nabla^2\psi_d = 0 \quad (r > 0).$$