Eletricidade e Magnetismo - IME

Lei de Ampère

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Lei de Ampère

Quando calculamos o campo elétrico de um arranjo de cargas vimos que era possível utilizar a *Lei de Coulomb*, fazer as integrações envolvidas, e obter o campo total.

Para sistemas de alta simetria era possível utilizar a *Lei de Gauss*, o que tornava mais fácil o cálculo do campo elétrico.

No caso magnético, temos a *Lei de Biot-Savart* para o cálculo do campo magnético de um arranjo de correntes, envolvendo integrações complexas.

Será possível utilizar a simetria do sistema para facilitar os cálculos? Bem, a *Lei de Gauss* no caso magnético não é útil pois como vimos,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

O uso da simetria no cálculo será feita através de uma nova Lei, a chamada ***Lei de Ampère***.

A Lei de Ampère não é formulada em termos de um fluxo magnético, mas definida com base em uma *integral de linha* de ***B*** em torno de uma trajetória fechada:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

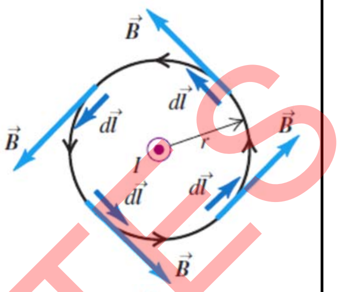
Esta formulação tem dois aspectos: é definida em ternos do produto escalar entre o campo magnético em um dado ponto e o elemento infinitesimal naquele ponto; é uma integral em um caminho fechado, o que é indicado na circunferência no centro da integral.

Lei de Ampère

Vamos considerar o campo magnético produzido por um condutor retilíneo com corrente I. O campo gerado por ele é:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

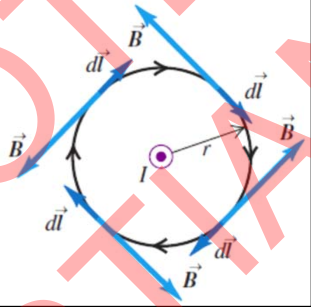
Alem disso, as linhas de campo são circunferências centradas sobre o condutor. Vamos calcular a integral de linha de ***B*** em torno de uma dessas circunferências com raio r, como mostrado ao lado.



Em uma dada circunferência, ***B*** e ***dl*** são paralelos, logo, ***B***.***dl*** = B dl. Como r é constante em torno da circunferência, B também é constante. Assim, B pode sair da integral e teremo que $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ nada mais é que o comprimento da circunferência, assim:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

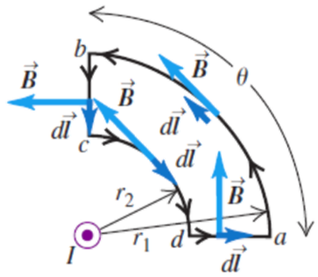
Se ***B*** e ***dl*** são antiparalelos, ***B dl*** = -Bdl e a integral daria $-\mu_0$I. O sinal da corrente depende do sentido da integração com relação à corrente. A regra da mão direita indica se, na direção de integral de linha adotada, a corrente é positiva ou negativa.



Lei de Ampère

Um percurso de integração que *não* circunda um condutor é indicado ao lado. Podemos repartir a integral de linha fechada em varias partes nos pontos a, b, c e d.

Ao longo de *ab* de raio r_1, ***B*** e ***dl*** são paralelos, ***B*** ao longo de r_1 é constante e vale B= μ_0I/(2πr_1). Ao longo do arco *cd* de raio r_2, ***B*** e ***dl*** são antiparalelos e ***B*** ao longo de r_2 é B= -μ_0I/(2πr_2). O campo B é perpendicular ao longo dos segmentos *bc* e da e não contribuem para a integral. Assim:



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_1\int_a^b dl + (0)\int_b^c dl + (-B_2)\int_c^d dl + (0)\int_d^a dl$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(r_1\theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + 0 = 0$$

O maior módulo de ***B*** ao longo do arco *cd* é compensada pelo menor comprimento do arco. Assim, $\int \vec{B}.d\vec{l}$ nos dois arcos tem mesmo valor, mas sinais opostos, e se cancelam. Assim, mesmo que tenhamos campo magnético presente na região de integração, esta integral fechada é nula se não englobar correntes.

Lei de Ampère

Pode-se mostrar este resultado para um percurso arbitrário de integração.

Na posição do elemento de linha $d\vec{l}$ o ângulo entre $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ é ϕ e

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\,dl \cos\phi$$

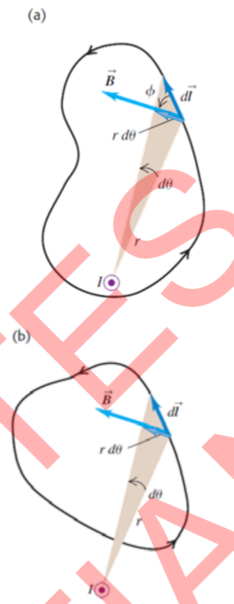
Pela figura, $d\vec{l}\cos\phi = r d\theta$, onde θ é o ângulo subentendido por $d\vec{l}$ em relação ao fio e r é a distancia entre $d\vec{l}$ e o fio. Logo,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r\,d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

Mas, $\oint d\theta = 2\pi$ e assim,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Quando o percurso não engloba o fio, a variação total do ângulo θ durante uma volta completa através do percurso de integração é zero, $\oint d\theta = 0$ ao invés de 2π e a integral é zero.



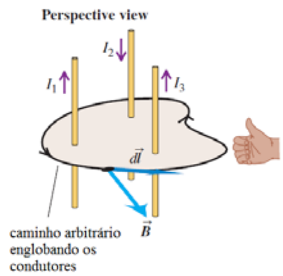
Lei de Ampère – Formulação Geral

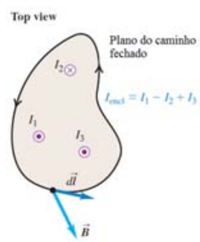
Para generalizar a lei de Ampere, deve-se considerar diversos fios retilíneos longos que passam na área

O campo magnético total B em qualquer ponto do caminho é a soma vetorial dos campos produzidos pelos condutores individuais. Assim a integral de linha do campo total ***B*** é igual a μ_0 vezes a soma algébrica das correntes.

Portanto, na Lei de Ampère inserimos a corrente no interior ou englobada pelo percurso de integração. O enunciado da Lei de Ampère é :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$ Lei de Ampère





Apesar de termos focado no caso especial de fios retilíneos, longos e paralelos, essa equação vale para todos os percursos e condutores ***qualquer*** que seja a forma do condutor e do percurso escolhido.

Lei de Ampère – Forma integral e diferencial

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Podemos escrever a corrente I em um condutor em termos da integral da densidade de corrente *J* integrada em uma superfície *S*,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Assim,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

De calculo diferencial avançado, temos a Lei de Stokes:

"A integral de linha de um vetor em torno de uma curva fechada é igual a integral de superfície das componentes de seu rotacional, normais à qualquer superfície limitada pela curva"

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Aplicando a Lei de Stokes na lei de Ampère em termos de *J*,

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

A integral é tomada na mesma superfície *S*. Assim, somente teremos a igualdade se os integrandos forem idênticos, logo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Sendo essa a *Lei de Ampère* na forma diferencial. Essa expressão está quase completa, mas ela não contempla possíveis variações no fluxo elétrico, ou seja, o fato do campo elétrico poder variar com o tempo. Logo mais, completaremos essa expressão.

Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um fio retilíneo conduzindo uma corrente

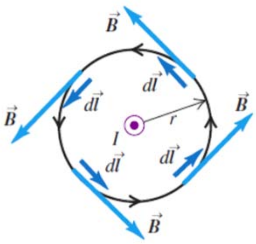
Podemos utilizar a Lei de Ampère para determinar o módulo, direção e sentido de ***B*** em um fio de corrente.

Pra isso podemos explorar a simetria cilíndrica dessa situação, escolhendo como percurso de integração uma circunferência de raio *r* centralizada no fio e situada no plano

Neste caso, ***B*** é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos.
A lei de Ampère fornece,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

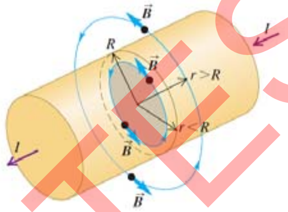


Lei de Ampère – Aplicações

Campo no interior de um cilindro condutor longo

Um condutor cilíndrico longo de raio *R* conduz uma corrente I. A corrente está uniformemente distribuída na área ada seção reta do cilindro. Calcule o campo magnético em função da distância *r* entre o ponto do campo e o eixo do cilindro para todos os pontos dentro ($r < R$) e fora do condutor ($r > R$).

Dentro do condutor:



A regra da mão direita indica que o campo ***B*** será tangente à circunferência que circunda o eixo de sentido de corrente. Escolhemos como percurso de integração uma circunferência de raio *r* centralizada no fio e situada no plano. Assim, o módulo da integral da lei de ampere será, $B2\pi r$.

Agora precisamos obter a corrente englobada pela circunferência.

Para isso, usamos a definição de densidade de corrente:

$$I_{int} = JA_{int} = J\pi r^2$$

No fio de raio R temos uma corrente I. Assim o módulo de densidade de corrente será,

$$JA = J\pi R^2 = I \Rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$$

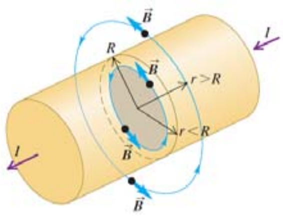
Assim, $B\,2\pi r = \mu_0 I_{int} = \mu_0 J\pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2 = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2} \quad \text{(dentro do condutor, } r < R\text{)}$$

Lei de Ampère – Aplicações

Campo no interior de um cilindro condutor longo

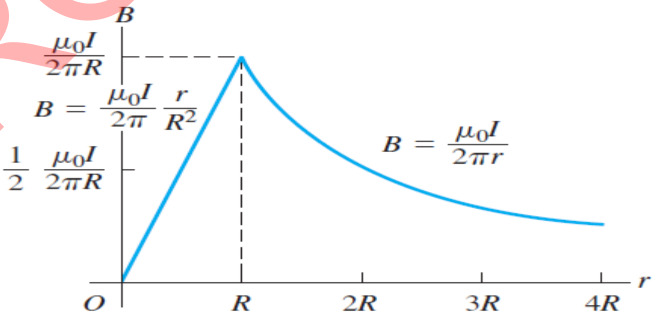
Fora do condutor:



Neste caso, usando regra da mão direita, novamente o campo ***B*** será tangente à circunferência que circunda o eixo de sentido de corrente. Escolhemos como percurso de integração uma circunferência de raio *r* centralizada no fio e situada no plano. Assim, o módulo da integral da lei de ampere será, $B2\pi r$.

Neste caso, a circunferência engloba toda a corrente e assim, $I_{int} = I$

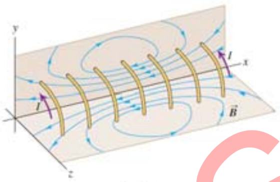
Assim, $B\,2\pi r = \mu_0 I$ $\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (fora do condutor, $r > R$)



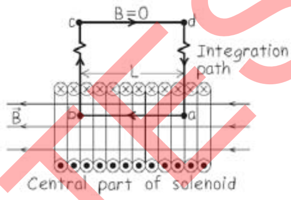
Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide

Um solenóide é constituído por um enrolamento helicoidal de fio sobre um núcleo, em geral som seção reta circular. Use a lei de Ampère para determinar o campo magnético no centro ou nas proximidades do centro desse solenóide longo. O solenóide conduz uma corrente *I* e possui *n* espiras por unidade de comprimento.



Escolhemos como percurso de integração o retângulo *abcd* indicado ao lado.



O lado ab, de comprimento L é paralelo ao eixo do solenoide. Supomos que o lado dc esteja bastante afastado do solenoide, de moco que o campo nele seja desprezável.

Por simetria, o campo ***B*** ao longo do lado ab é constante e paralelo a esse lado. Usando a lei de Ampère, fazemos o percurso ao longo do lado ab no mesmo sentido de ***B***. Assim, $\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL$

Ao longo dos lados bc e da, $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ é zero pois ***B*** é perpendicular a ***dl***. Ao longo de cd $\vec{B}\cdot d\vec{l}$ também é zero pois ***B*** é zero. Assim, a integral será $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL$

Precisamos saber a corrente englobada pelo circuito fechado. O numero de espiras para um dado comprimento L é igual a *nL*, sendo *n* o numero de espiras por unidade de comprimento.

Cada espira conduz uma corrente I, logo a corrente englobada será: $I_{\text{int}} = nLI$

Pela lei de Ampère, como $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ é positiva, I_{int} também é positiva.

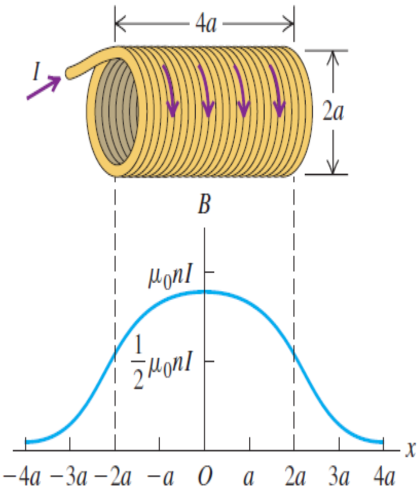
Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide

Usando a lei de Ampère, temos

$$BL = \mu_0 nLI$$

$$B = \mu_0 nI$$



Note que o lado *ab* não precisa cair no eixo do solenoide, assim este resultado demonstra que o campo é uniforme ao longo da seção reta inteira nas proximidades do centro do solenóide.

O sentido de ***B*** é o mesmo do momento magnético ***μ***.

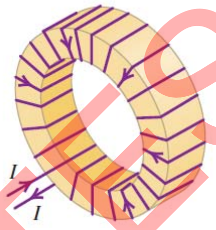
Para os pontos ao longo do eixo o campo é mais forte nas vizinhanças do centro do solenoide e diminui a medida que o ponto se aproxima das extremidades. Para um solenóide muito longo em comparação com seu diâmetro, o campo em cada extremidade é exatamente a metade do campo magnético no seu centro.

Lei de Ampère – Aplicações

Campo de um solenóide toroidal

Um solenóide toroidal, ou toróide é um solenoide que conduz uma corrente I através de um enrolamento com N espiras em torno de um núcleo em forma de rosca, como indicado abaixo.

Quando as espiras são bastante próximas podemos considerar que o campo magnético ***B*** que estaria na periferia do toróide é desprezável e assim o campo se concentra no interior do toróide.



Temos de considerar percursos magnéticos concêntricos ao eixo do toróide.

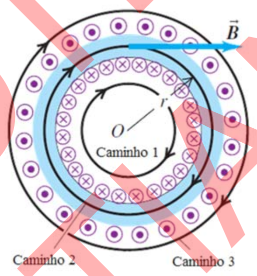
Caminho 1: A corrente no interior deste caminho é nula. Logo, pela Lei de Ampère, ***B*** é necessariamente nulo

Caminho 3: Cada espira passa duas vezes através da área delimitada, com correntes em sentidos contrários. Assim, a corrente ***total*** I_{inte} que passa dentro desse caminho é nula e, pela Lei de Ampère, ***B*** é necessariamente nulo também.

Caminho 2: neste caso considere uma circunferência de raio r. por simetria, vemos que ***B*** é tangente a circunferência. Logo, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ será igual a $2\pi rB$. Cada espira passa uma vez pelo percurso 2.

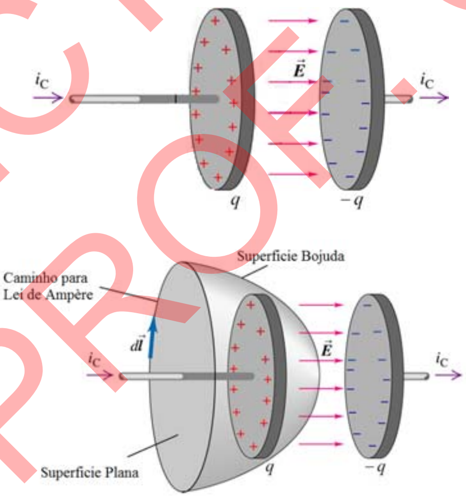
A corrente total será $I_{inte} = NI$, onde N é o numero total de espiras no enrolamento e a corrente é positiva para o percurso de integração indicado. Assim, pela Lei de Ampére, $2 \pi r B = \mu_0 N I$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



Corrente de Deslocamento

A lei de Ampère na forma que vimos é incompleta e precisa de uma modificação.



Vamos considerar um capacitor de placas paralelas. Uma corrente i_c chega no capacitor.

Assuma um caminho fechado que compreenda a borda de duas superfícies. Aplicando a Lei Ampère considerando a superfície plana:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Pois nessa superfície temos uma corrente i_c transitando.

Se aplicamos a Lei de Ampère considerando a superfície bojuda:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

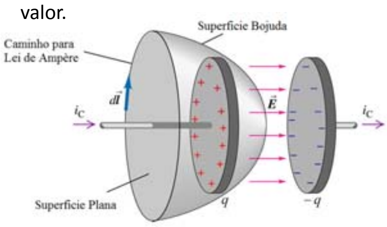
Pois dentro de um capacitor não temos corrente transitando.

E agora???

Corrente de Deslocamento

James Clerk Maxwell utilizou sua genialidade para resolver esse problema!

Dentro do capacitor temos um campo ***E*** e um fluxo elétrico Φ_E variando com o tempo.
A taxa dessa variação depende da carga nas placas e assim, da corrente i_c
A carga instantânea é $q = C\,v$, sendo C a capacitância e v a tensão entre as placas
Para um capacitor de placas paralelas, $C = \varepsilon_0 A\,/\,d$, sendo A a área das placas, d a separação entre elas e ε_0 a permissividade do vácuo. Quando temos um dielétrico de permissividade ε basta usarmos este valor.



James Clerk Maxwell	
Conhecido(a) por	Equações de Maxwell, distribuição de Maxwell-Boltzmann, demônio de Maxwell
Nascimento	13 de junho de 1831 Edimburgo, Escócia
Morte	5 de novembro de 1879 (48 anos) Cambridge, Inglaterra
Nacionalidade	britânico
Alma mater	Universidade de Edimburgo, Universidade de Cambridge
Prêmios	Prêmio Smith (1854), Prêmio Adams (1857), Medalha Rumford (1860)
Assinatura	James Clerk Maxwell sig.svg
Orientador(es)	William Hopkins
Orientado(s)	Horace Lamb, George Chrystal
Instituições	Marischal College, King's College de Londres, Universidade de Cambridge
Campo(s)	Matemática, física
Tese	1854:

Teremos:

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E$$

Quando o capacitor está sendo carregado, a taxa de variação da carga q é a corrente $i_c = dq/dt$

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell propôs que dentro da região entre as placas, surge uma pseudocorrente i_d com a formula,

$$i_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

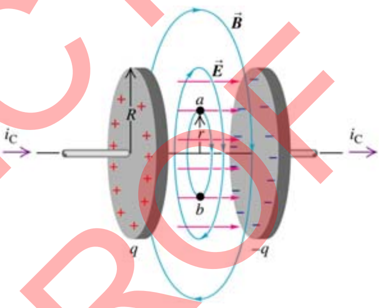
A esta corrente denominou ***corrente de deslocamento.***

Temos também a correspondente densidade de corrente de deslocamento dada por

$$j_d = \frac{i_d}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt}$$

Corrente de Deslocamento

Mas... Essa pseudocorrente existe mesmo ou é somente um artificio?
Bem, se a corrente existe, devemos ter um campo magnético dentro do capacitor, gerado por ela.



A corrente dentro do capacitor é distribuída por toda a área e é igual a j_d vezes esta área : $(i_d/\pi R^2)\pi r^2$.

A integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ da Lei de Ampère é igual a B vezes o comprimento da circunferência, $2\pi r$, e como $i_d = i_c$ durante a carga do capacitor:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_c$$

Ou seja,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2} i_c$$

Experimentalmente se comprova que existe um campo magnético dentro de um capacitor!

Note que essa conclusão é valida mesmo quando tem-se espaço vazio dentro do capacitor. Essa é uma das provas da existência das ondas eletromagnéticas.
A lei de Ampére completa assume a forma:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{\text{encl}} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$