Gabarito - Lista de Exercícios Microeconomia II

Outubro 2017

Seleção Adversa

Resposta 1. Nessa economia temos um conjunto de agente $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ indexados por sua produtividade. As proporções de agentes de cada tipo são λ e $(1-\lambda)$, respectivamente. Um equilíbrio competitivo é (Θ^*, w^*) tal que $\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w\}$ e $w^* = E[\theta|\theta \in \Theta^*]$[1], ou seja, essa definição de equilíbrio exige uma consistência.

Na verdade, como Θ^* é função de w, podemos nos limitar a buscar equilíbrios variando apenas o suposto salário que o compõe. Temos que, como $\theta_2 > r_2 > \theta_1 > r_1$, definindo $\Theta(w) \equiv \{\theta : r(\theta) \leq w\}$;

$$\Theta(w) = \begin{cases} \{\theta_1, \theta_2\} & \text{, se } w \geq r_2; \\ \{\theta_1\} & \text{,se } r_2 > w \geq r_1; \\ \emptyset & \text{,se } r_1 > w. \end{cases}$$

[1] Definimos $E[\theta : \theta \in \Theta] = E[\theta]$, para $\Theta = \emptyset$

Então temos que

$$E[\theta|\theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 & \text{, se } w \geq r_2; \\ \theta_1 & \text{, se } r_2 > w \geq r_1; \\ \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 & \text{, se } r_1 > w. \end{cases}$$

Emtão basta sabermos se existe w tal que $w = E[\theta|\theta \in \Theta(w)]$.

Podemos ter um salário de equilíbrio em 3 faixas:

a) $w \geq r_2 \Rightarrow$ Nesse caso teríamos $w^* = \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2$, mas note que é necessário e suficiente para isso ser um equilíbrio que

$$\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 \geq r_2 \Rightarrow \lambda \leq \frac{\theta_2 - r_2}{(\theta_2 - \theta_1)}.$$

b) $r_2 > w \geq r_1 \Rightarrow$ Nesse caso teríamos $w^8 = \theta_1$, mas note que é necessário e suficiente que

$$r_2 > \theta_2 \geq r_1,$$

o que sabemos que valo por $\theta_2 > r_2 > \theta_1 > r_1$.

c) $r_1 > w \Rightarrow$ Nesse caso $w^* = \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2$, o que caracteriza um equilíbrio se

$$r_1 > \lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2 \Rightarrow \lambda > \frac{\theta_1 - r_1}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Sabemos que uma alocação é eficiente de pareto se todos estão trabalhando. Caso contrário, o indivíduo tipo θ_i poderia trabalhar ganhando $r_i + \frac{\theta_i - r_i}{2}$. Nesse caso o trabalhador e a firma estariam melhores. Também podemos ver que, uma vez que todos estão trabalhando, a não ser que haja desperdício todas as alocações são efcientes de pareto (a melhoria de um implica a piora de outros).

Resposta 2. a) Quando as firmas observam os tipos dos trabalhadores, o salário pode ser contingente nessa variável. Então o equilíbrio competitivo será $\Theta^* =$

$[\theta_0, \theta_1]$ e $w^*(\theta) = \theta$.

b) Assim como no Exercício acima, defina $\Theta(w) \equiv \{\theta : r(\theta) \leq w\} = \{\theta : \theta \leq w + \alpha\}$, ou seja

$$\Theta(w) = \begin{cases} [\theta_0, \theta_1] & \text{, se } w \geq \theta_1 - \alpha \\ [\theta_0, w + \alpha] & \text{, se } \theta_1 - \alpha > w \geq \theta_0 - \alpha \\ \emptyset & \text{, se } \theta_0 - \alpha > w. \end{cases}$$

O que também gera, sabendo que a distribuição é uniforme,

$$E[\theta|\theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} \frac{\theta_0+\theta_1}{2} & \text{, se } w \geq \theta_1 - \alpha \\ \frac{\theta_0+w+\alpha}{2} & \text{, se } \theta_1 - \alpha > w \geq \theta_0 - \alpha \\ \frac{\theta_0+theta_1}{2} & \text{, se } \theta_0 - \alpha > w. \end{cases}$$

O equilíbrio competitivo, mais uma vez, pode ser de três tipos:

i) $w^* \geq \theta_1 - \alpha \Rightarrow$ Nesse caso há *pooling total*, e $w^* = \frac{\theta_0+\theta_1}{2}$, o que só será um equilíbrio se

$$\frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \geq \theta_1 - \alpha \Rightarrow \alpha \geq \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}.$$

Isso significa que a *outside option* do melhor tipo têm que ser pior do que se misturar com todos os agentes no mercado de trabalho. Nesse caso $\Theta^* = [\theta_0, \theta_1]$.

ii) $\theta_1 - \alpha > w^* \geq \theta_0 - \alpha \Rightarrow$ Nesse caso há *pooling parcial*, e

$$w^* = \frac{\theta_0 + w^* + \alpha}{2} \Rightarrow w^* = \theta_0 + \alpha.$$

Mas precisamos estar no intervalo $[\theta_0 - \alpha, \theta_1 - \alpha)$,

$$\theta_1 - \alpha > w^* \geq \theta_0 - \alpha \Rightarrow \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} > \alpha \geq 0$$

Então, se a condição acima é válida, $\Theta^* = [[\theta_0, \theta_0 + 2\alpha]$ e $w^* = \theta_0 + \alpha$ é um equilíbrio.

iii) $\theta_0 - \alpha > w^* \Rightarrow$ Nesse caso, mais uma vez, $w^* = \frac{\theta_0+\theta_1}{2}$. Esse será um equilíbrio se

$$\theta_0 - \alpha > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} < 0,$$

o que nunca é válido, pois $\alpha > 0$. Então não haverá equilíbrios desse tipo.

Resposta 3. Defina $\Theta(w) \equiv \{\theta : r(\theta) \leq w\} = \{\theta : \theta \leq w/r\}$. Assim,

$$\Theta(w) = \begin{cases} [0,1] & \text{, se } w \geq r \\ [0, w/r] & \text{, se } r > w \geq 0 \\ \emptyset & \text{, se } 0 > w \end{cases}$$

e usando o fato que a distribuição é uniforme, temos que,

$$E[\theta|\theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, se } w \geq r \\ \frac{w}{2r} & \text{, se } r > w \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, se } 0 > w \end{cases}$$

Vamos analisar novamente três casos:

i) $w^* = \frac{1}{2}$ e $\Theta^* = [0,1]$. Esse caso ocorre se

$$\frac{1}{2} \geq r > 0$$

ii) Há duas situações possíveis:

- $w^* = \frac{w^*}{2r}$ e $\Theta^* = [0, w^*/r]$. Esse caso ocorre se $r = 1/2$. Note que todo $w^* \in [0, 1/2)$ é consistente com o equilíbrio.

- $w^* = 0$ e $\Theta^* = \{0\}$. Note que toto $0 < r <'$ é consistente com esse equilíbrio. No entanto, como há apenas um conjunto de medida nula que se emprega, desconsiderarei esse caso na resposta dos itens.

iii) $w^* = \frac{1}{2}$ e $\Theta^* = \emptyset$. Esse caso ocorre se

$$\frac{1}{2} < 0$$

o que é impossível.

Vamos responder os itens analisando esse três casos:

a) Vemos que só há equilíbrio para $r \in (0, 1/2]$. Logo, para $r > 1/2$ não há equilíbrio.

b) Se $r = 1/2$, há infinitos equilíbrios. Para qualquer $w^* \in [0, 1/2]$, o equilíbrio será $(w^*, [0, w^*/r]) = (w^*, [0, 2w^*])$. O equilíbrio que emprega o maior número de pessoas é $(1/2, [0, 1])$.

c) Se $r < 1/2$, há um único equilíbrio competitivo, descrito no caso $(i) : (1/2, [0, 1])$.

Resposta 4. Considere a função $\phi(w) = E[\theta | r(\theta) \leq w] - w$. Como $E[\theta | r(\theta) \leq w]$ é contínua para $w \in [r(a), \infty)$, ϕ é contínua no mesmo intervalo. Se $w = r(a)$, então $\phi(w) = a - r(a) > 0$, por hipótese. Ainda, $\phi(b) = E[\theta | r(\theta) \leq b] - b \leq E(\theta) - b < 0$. Logo pelo Teorema do Valor Intermediário, $\exists w' \in (r(a), b)$ tal que $\phi(w') = 0$.

Resposta 5. Uma versão do problema da Netflix pode ser escrito como de escolher os preços p_H, p_L e qualidades $q_H, q_L \geq 0$ para resolver

$$\max \lambda(p_H = q_H) + (1 - \lambda)(p_L - q_L)$$

sujeito a

$$u(q_H, p_H | H) \geq u(q_L, p_L | H)$$

e

$$u(q_L, p_L | L) \geq 0.$$

Pode ser verificado que qualquer contrato que é factível nessa versão do problema satisfaz a compatibilidade de participação e incentivos para todos os tipos. Pode ser mostrado que as duas desigualdades acima são ativas para qualquer solução ótima.

a) Como $\lambda = 1-\lambda$, precisamos maximizar $p_H - q_H + p_L - q_L$ sujeito a $4\sqrt{q_H} - p_H = 4\sqrt{q_L} - p_L$ e $3\sqrt{q_L} - p_L = 0$. Utilizamos as restrições para obter:

$$p_H = 4\sqrt{q_H} - \sqrt{q_L} \qquad p_L = 3\sqrt{q_L}$$

Substituindo na função objetivo nós obtemos

$$4\sqrt{q_H} - q_H + 2\sqrt{q_L} - q_L.$$

Essa função é claramente estritamente côncava e é unicamente maximizada por $(\hat{q}_H, \hat{q}_L) = (4, 1)$. Os preços obtidos são $(\hat{p}_H, \hat{p}_L) = (7, 3)$.

b) Agora a função objetivo é

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}(p_H - q_H) + \frac{1}{5}(p_L - q_L) &= \frac{4}{5}(4\sqrt{q_H} - \sqrt{q_L} - q_H) + \frac{1}{5}(3\sqrt{q_L} - q_L),\\ &= \frac{4}{5}(4\sqrt{q_H} - q_H) + \frac{1}{5}(-\sqrt{q_L} - q_L).\end{aligned}$$

Onde substituímos as restrições como anteriormente. Por um lado, como a função é decrescente em q_L, fica claro que o ótimo é escolher $\hat{q}_L = 0$. Por outro lado, a qualidade ótima para o tipo alto é dada por $\hat{q}_H = 4$ (isto é fácil de perceber a partir da CPO). Os preços obtidos são $(\hat{p}_H, \hat{p}_L) = (8, 0)$.

A intuição é simples: como há relativamente poucos consumidores consumidores pobres, é melhor para a Netflix não oferecer os serviços para esses consumidores a fim de focar exclusivamente nos clientes que valoram mais o serviço. Essa estratígia permite a Netflix prover exatamente a mesma qualidade "premium" como no caso anterior mas agora a um preço mais alto.

c) Para um λ genérico, a função objetivo será

$$\lambda(p_H - q_H) + 91 - \lambda)(p_L - q_L) = \lambda(4\sqrt{q_H} - \sqrt{q_L} - q_H) + (1-\lambda)(3\sqrt{q_L} - q_L),$$
$$\lambda(4\sqrt{q_H} - q_H) + (1-\lambda)\left[\left(3 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{q_L} - q_L\right].$$

Segue que a função se tornará decrescente em q_L se, e somente se,

$$3 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \leq 0.$$

Essa condição é equivalente a $\lambda \geq 3/4$, então $\hat{\lambda} = 3/4$.

Resposta 6. a) Caso a firma observe o tipo do agente antes de oferecer o contrato, ele saberá que o indivíduo aceitará qualquer coisa que o deixe melhor do que o seu custo de oportunidade, i.e., pode implementar quaisquer (q, t) tais que

$$\theta^i q - t \geq 0.$$

Então ele escolherá o melhor entre eles, i.e.,

$$\begin{aligned}(q_i^{FB}, t_i^{FB}) \in \quad & \underset{t,q\geq 0}{\arg\max}\, t - C(q) \\ & s.a. \quad \theta^i q - t \geq 0.\end{aligned}$$

Então a alocação de *first-best* $(q_i^{FB}, t_i^{FB})_{i=1}^N$ está definida para cada θ^i por,

$$\begin{aligned}C'(q_i^{FB}) &= \theta^i; \\ t &= \theta^i q_i^{FB}.\end{aligned}$$

b) Dizemos que uma alocação $\left(q_i^{FB}, t_i^{FB}\right)_{i=1}^N$ satisfaz a restrição de compatibilidade de incentivos se vale

$$\theta^i q_i - t_i \geq \theta^i q_j - t_j, \forall (i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2. \tag{IC}$$

Podemos ver que a alocação *first-best* não satisfaz (IC). Para ver isso considere $i \in \{1,\ldots,N-1\}$ qualquer. Como $C'(0) = 0$ sabemos que $q_i^{FB} > 0$, então

$$\theta^{i+1} q_i^{FB} - t_i^{FB} \underset{\theta^{i+1} > \theta^i}{>} \theta^i q_i^{FB} - t_i^{FB} = 0 = \theta^{i+1} q_{i+1}^{FB} - t_{i+1}^{FB}.$$

c) Considere mais uma vez $i \in \{1,\ldots,N-1\}$. Então sabemos, por (IC), que

$$\begin{aligned} \theta^{i+1} q_{i+1} - t_{i+1} \geq \theta^{i+1} q_i - t_i &\Rightarrow \theta^{i+1}(q_{i+1} - q_i) \geq t_{i+1} - t_i; \\ \theta^i q_i - t_i \geq \theta^i q_{i+1} - t_{i+1} &\Rightarrow \theta^i (q_{i+1} - q_i) \leq t_{i+1} - t_i, \end{aligned}$$

o que implica

$$(\theta^{i+1} - \theta^i)(q_{i+1} - q_i) \geq 0 \Leftrightarrow (q_{i+1} - q_i) \geq 0.$$

Da equação $\theta^i (q_{i+1} - q_i) \leq t_{i+1} - t_i$ podemos notar também que $t_{i+1} \geq t_i$. Como isso vale para i qualquer, está provado.

d) Considere uma alocação $(q_i, t_i)_{i=1}^N$ crescente tal que, para todo i, o indivíduo $i+1$ não quer se passar pelo indivíduo i, i.e., vale

$$\theta^{i+1} q_{i+1} - t_{i+1} \geq \theta^{i+1} q_i - t_i, \forall i \in \{1,\ldots,N-1\}. \tag{IC'}$$

Note que (IC) implica (IC'), uma vez que esse é um subgrupo das restrições de compatibilidade de incentivos. A ideia é notarmos que esse subgrupo, juntamente com a alocação ser crescente, são também suficientes para compatibilidade de incentivos.

Então considere $j > i$ qualquer (sem perda de generalidade). Então podemos escrever $j = i + n$. Então

$$\theta^{i+n} q_{i+n} - t_{i+n} = \theta^{i+n} q_i - t_i + \sum_{n'=0}^{n-1} \left[\theta^{i+n}(q_{i+n'+1} - q_{i+n'}) - (t_{i+n'+1} - t_{i+n'})\right]$$

Como todos os elementos multiplicando $\theta's$ são positivos, e $\theta^{i+n} \geq \theta^{i+n'+1}$ para $n' \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\theta^{i+n} q_{i+n} - t_{i+n} \geq \theta^{i+n} q_i - t_i + \sum_{n'=0}^{n-1} \left[\theta^{i+n'+1}(q_{i+n'+1} - q_{i+n'}) - (t_{i+n'+1} - t_{i+n'})\right] \geq \theta^{i+n} q_i - t_i,$$

já que (IC') implica que cada termo da soma é positivo. Então já vemos que nenhum indivíduo quererá se passar por alguém com parâmetro menor.
Agora precisamos checar se o indivíduo i não tem incentivos para se passar por $i + n$, então vejamos. Acabamos de ver que

$$\theta^{i+n} q_{i+n} - t_{i+n} \geq \theta^{i+n} q_i - t_i.$$

Suponha que essa restrição esteja ativa (na igualdade), então

$$\theta^{i+n} q_{i+n} - t_{i+n} = \theta^{i+n} q_i - t_i \Leftrightarrow \theta^{i+n}(q_{i+n} - q_i) = t_{i+n} - t_i.$$

Então os indivíduos também não possuem incentivos para se passarem por alguém com parâmetro maior.

e) e f) Dizemos que uma alocação $(q_i, t_i)_{i=1}^{N}$ satisfaz as restrições de participação, ou de racionalidade individual, se

$$\theta^i q_i - t_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}. \tag{IR}$$

Agora suponha que, para $(q_i, t_i)_{i=1}^N$, vale (IC) e que

$$\theta^1 q_1 - t_1 \geq 0.$$

Considere então um indivíduo i qualquer, das restrições de compatibilidade de incentivos temos que

$$\theta^i q_i - t_i \geq \theta^i q_1 - t_1 \geq \theta^1 q_1 - t_1 \geq 0.$$

Então vale a racionalidade individual para todos os indivíduos.

Agora, queremos provar que, no ótimo first-best, as restrições de compatibilidade de incentivos de $i+1$ se passando por i serão ativas, para todo i. Imagine que não, então considere uma alocação $(q_i, t_i)_{i=1}^N$ que satisfaz (IC) e (IR),, e que para algum i,

$$\theta^{i+1} q_{i+1} - t_{i+1} > \theta^{i+1} q_i - t_i$$

Tome um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que a desigualdade acima ainda seja verdadeira com tarifa $t_{i+1} + \varepsilon$. Então considere uma alocação $(\tilde{q}_i, \tilde{t}_i)_{i=1}^N$ tal que $(\tilde{q}_i)_{i=1}^N = (q)_{i=1}^N, \tilde{t}_j = t_j$ para $j \leq i$ e $\tilde{t}_j = t_j + \varepsilon$ para $j \geq i+1$. Claramente essa alocação gera ganhos maiores para a firma, agora basta vermos se ela satisfaz (IC) e (IR). Primeiramente note que para $j \geq i+1$

$$\theta^{j+1} q_{j+1} - t_{j+1} \geq \theta^{j+1} q_j - t_j \Leftrightarrow \theta^{j+1} q_{j+1} - (t_{j+1} + \varepsilon) \geq \theta^{j+1} q_j - (t_j + \varepsilon),$$

então na nova alocação ninguém tem incentivos a se passar pelo tipo logo abaixo[2].

[2]Veja que o ganho desse mesmo tipo de desvio para indivíduos $j \leq i$ ficou inalterado pois a alocação está inalterada para esse agentes. Para o indivíduo $i+1$ ainda não há desvio pela definição de ε.

Também é verdade que, para $j \geq i+1$,

$$\theta^j q_j - t_j \geq \theta^j q_{j+1} - t_{j+1} \Leftrightarrow \theta^j q_j - (t_j + \varepsilon) \geq \theta^j q_{j+1} - (t_{j+1} + \varepsilon),$$

então na nova alocação ninguém tem incentivos a se passar pelo tipo logo acima. Pelo mesmo argumento apresentado no item (d) a compatibilidade de incentivos entre tipos "vizinhos" se estende para (IC). Como a alocação do tipo θ^1 ficou inalterada sua restrição de participação continua valendo. Pela primeira parte desse item então vemos que a nova alocação satisfaz (IR).

Resposta 7. Temos que um equilíbrio competitivo é um par (w^*, Θ^*) tal que

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \text{ e } w^* = E[\theta | \theta \in \Theta^*]$$

a) Defina $\Theta(w) \equiv \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} = \left\{\theta : \theta \leq w + \frac{1}{4}\right\}$. Assim,

$$\Theta(w) = \begin{cases} [1,2] & \text{, se } w \geq \frac{7}{4} \\ \left[1, w + \frac{1}{4}\right] & \text{, se } \frac{7}{3} > w \geq \frac{3}{4} \\ \emptyset & \text{, se } \frac{3}{4} > w \end{cases}$$

Lembrando agora que

$$E[\theta | \theta \in \Theta(w)] \begin{cases} = \int \theta \frac{f(\theta}{P(\Theta(w))} d\theta & \text{, se } P(\Theta(w)) > 0 \\ \equiv \theta' & \text{, se } \Theta(w) = \{\theta'\} \\ \equiv E(\theta) & \text{se } \Theta(w) = \emptyset \end{cases}$$

e usando o fato que a distribuição é uniforme, temos que,

$$E[\theta | \theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{, se } w \geq \frac{7}{4} \\ \frac{w + \frac{5}{4}}{2} & \text{, se } \frac{7}{4} > w \geq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \text{, se } \frac{3}{4} > w \end{cases}$$

Temos então três casos:

i) $w^* = \frac{3}{2}$ e $\Theta^* = [1,2]$. Esse caso ocorre apenas se

$$1,5 = \frac{3}{2} = w^* \geq \frac{7}{4} = 1,75, \rightarrow\leftarrow$$

ii) $w^* = \frac{5}{8} + \frac{w^*}{2} \Rightarrow w^* = \frac{5}{4}$ e $\Theta^* = \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Esse caso ocorre apenas se

$$\frac{3}{4} \geq w^* = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$$

iii) $w^* = \frac{3}{2}$ e $\Theta^* = \emptyset$. Esse caso ocorre apenas se

$$\frac{3}{2} = w^* < \frac{3}{4}, \rightarrow\leftarrow$$

Assim, o equilíbrio é $\{w^*, \Theta^*\} = \left\{\frac{5}{4}, \left[1, \frac{3}{2}\right]\right\}$.

b) Defina $\Theta(w) \equiv \{\theta : r(\theta) \leq w\} = \left\{\theta : \theta \geq \frac{9}{4} - w\right\}$. Assim,

$$\Theta(w) = \begin{cases} [1,2] & \text{, se } w \geq \frac{5}{4} \\ \left[\frac{9}{4} - w, 2\right] & \text{, se } \frac{5}{4} > w \geq \frac{1}{4} \\ \emptyset & \text{, se } \frac{1}{4} > w \end{cases}$$

Vamos analisar novamente três casos:

i) $w^* = \frac{3}{2}$ e $\Theta^* = [1,2]$. Esse caso ocorre se

$$1,5 = \frac{3}{2} = w^* \geq \frac{5}{4} = 1,25$$

ii) $w^* = \frac{\frac{17}{4} - w}{2} \Rightarrow w^* = \frac{17}{12}$ e $\Theta^* = \left[\frac{5}{6}, 2\right]$. Esse caso ocorre se

$$\frac{5}{4} > w^* = \frac{17}{12} \geq \frac{1}{4}, \rightarrow\leftarrow$$

iii) $w^* = \frac{3}{2}$ e $\Theta^* = \emptyset$. Esse caso ocorre se

$$w^* = \frac{3}{2} < \frac{1}{4}, \rightarrow\leftarrow$$

Assim, o equilíbrio é $\{w^*, \Theta^*\} = \left\{\frac{3}{2}, [1,2]\right\}$.

c) Supondo as produtividades observáveis, as empresas podem desenhar um contrato para cada tipo. Neste caso, teríamos $w(\theta) = \theta$.

Observe que no primeiro caso temos que $r(\theta) < \theta, \forall\theta$. Sendo assim, a alocação Pareto-ótima será todos os trabalhadores empregados, isto é, $\Theta_{PO} = [1,2]$ e $w_{PO}(\theta) = \theta, \forall\theta \in \Theta$.

No segundo caso temos que $r(\theta) > \theta, \forall\theta \in \left[1, \frac{9}{8}\right)$ e $r(\theta) \leq \theta, \forall\theta \in \left(\frac{9}{8}, 2\right]$. Deste modo, a alocação Pareto-ótima será $\Theta_{PO} = \left[\frac{9}{8}, 2\right]$ e $w_{PO} = \theta, \forall\theta \in \Theta$.

Com isso, podemos notar que em ambos os casos as alocações de equilíbrio são diferentes das alocações Pareto-ótimas. No primeiro caso, com a função r crescente nos tipos, temos menos gente trabalhando em equilíbrio do que na alocação eficiente de Pareto. Já no segundo caso, com a função r decrescente nos tipos, a situação, se inverte, temos mais gente trabalhando em equilíbrio do que na alocação eficiente de Pareto.

Resposta 8. a) Como θ é observável, preços podem variar de acordo com θ. O preço de equilíbrio para o tipo θ deve satisfazer:

$$\theta \times 0 + (1-\theta)p(\theta) = rK = 2500.$$

Então,

$$p(\theta) = \frac{2500}{1-\theta}.$$

Dada essa precificação, o tipo θ irá encontrar o aluguem ótimo se, e somente se,

$$\theta(v-0)+(1-\theta)(v-p(\theta)) = v-(1-\theta)p(\theta) = 6000-2500 = 3500 \geq 3500(1-\theta).$$

Como $\theta \in (0,1)$, essa equação vale para todos os tipos. Isso significa que todos os tipos alugam. Como não há assimetria de informação, o resultado será plenamente eficiente.

b) Agora o preço de aluguel $\hat{p}$ não pode depender de θ. Seja $\hat{\theta}^e$ a probabilidade média de dar calote daqueles inquilinos que aceitam os contratos. A condição de equilíbrio para os dono será

$$\hat{\theta}^e \times 0 + (1-\hat{\theta}^e)\hat{p} = rK = 2500.$$

Então,

$$\hat{p} = \frac{2500}{1-\hat{\theta}^e}.$$

Dado esse preço, o tipo θ irá achar ótimo alugar um apartamento se, e somente se,

$$\theta(v-0) + (1-\theta)(v-\hat{p}) = 6000 - 2500\left(\frac{1-\theta}{-\hat{\theta}^e}\right) \geq 3500(1-\theta).$$

Isso é equivalente a

$$\theta \geq 1 - \frac{6000(1-\hat{\theta}^e}{3500(1-\hat{\theta}^e)+2500} = \frac{5 \times \hat{\theta}^e}{5+7(1-\hat{\theta}^e} = \tilde{\theta},$$

onde $\tilde{\theta}$ é o tipo marginal que é indiferente entre alugar ou não. Assim, a probabilidade média de dar calote de equilíbrio é:

$$\hat{\theta}^e = \frac{\tilde{\theta}+1}{2}.$$

Isso é equivalente a

$$(2\hat{\theta}^e - 1)(5 + 7(1 - \hat{\theta}^e)) = 5 \times \hat{\theta}^e.$$

A solução relevante para essa equação quadrática é $\theta^e = 6/7$ (a outra é $\theta^e = 1$). Isso implica que apenas tipos $\theta \geq \tilde{\theta} = 5/7$ irão alugar e eles o fazem a um preço de equilíbrio $\hat{p} = 2500/(1 - 6/7) = 17500\$$

Esse resultado é claramente não eficiente já que apenas inquilinos ruins alugam dado os preços serem altíssimos induzindo um problema de seleção adversa. Note que uma alternativa rápida à solução "sequencial" apresentada acima é resolver o sistema a seguir simultaneamete:

$$(1 - \hat{\theta}^e)\hat{p} = 2500 \quad 6000 - (1 - \tilde{\theta})\hat{p} = 3500(1 - \tilde{\theta}) \quad 2\hat{\theta}^e = \tilde{\theta} + 1,$$

onde a primeira equação é a condição de equilíbrio para as firmas, a segunda a condição de equilíbrio para o tipo marginal e a terceira é a consistência entre a probabilidade marginal de dar calote e a probabilidade média de dar calote entre aqueles que alugam.

Resposta 9. a) Se ambas firmas investem, o valor das mesmas passa a ser o seu valor inicial mais o retorno do projeto (não dá desconto), i.e., $V_L' = 50+30 = 80$ e $V_H' = 100 + 30 = 130$. Se os investidores acreditam que ambos os tipos investem (pooling), o valor esperado das firmas é $130 \times 0,1 + 80 \times 0,9 = 85$ e logo a fração $20/85$ deve ser vendida. Nessa caso, os *shareholders* iniciais da melhor firma obterão $(65/85) \times 130 = 99,41 < 100$, de modo que a decisão de fazer o projeto não é razoável para eles. Já os *shareholders* iniciais da pior firma obterão $(65/85) \times 80 = 61,17 > 50$, de modo que a decisão de fazer o projeto é razoável para eles. Dessa forma, fica claro que essas crenças não são razoáveis, pois apenas a pior firma decidiria fazer o projeto, e não ambas.

b) Se os investidores acreditam que apenas a pior firma investe, o valor esperado das firmas é 80 e logo a fração 20/80 deve ser vendida. Nesse caso, os *shareholders* iniciais da melhor firma obterão $(60/80) \times 130 = 97,5 < 100$, de modo que a decisão de fazer o projeto não é razoável para eles. Já os *shareholders* iniciais da pior firma obterão $(60/80)80 = 60 > 50$, de modo que a decisão de fazer o projeto é razoável para eles. Dessa forma, fica claro que essas crenças são razoáveis, pois apenas a pior firma decidiria fazer o projeto.

c) A campanha publicitária cumprirá o mesmo papel da educação no Modelo de Spence, pois servirá apenas como uma maneira da melhor firma sinalizar seu tipo, não tendo nenhuma influência no retorno do projeto. Vamos definir o equilíbrio. Considere aqui $\mathbb{V} = \{V_L, V_H\}, V_L = 50$ e $V_H = 100$, o conjunto de tipos e $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+$ o conjunto de possíveis gastos com a campanha publicitária.

Definição 1. *Um equilíbrio Bayesiano perfeito (EBP) desse jogo de sinalização é um perfil de estratégias* $(K^*(.), V^*(.))$*, com* $K^* > \mathbb{V} = \{V_L, V_H\} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}_+$ *e* $V^* : \mathbb{K} = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, e uma função de crença dada por* $\mu : \mathbb{K} = \mathbb{R}_+ \to [0,1]$*, tais que:*

i) $\mu(K)$ *é a probabilidade da firma com nível de gastos em publicidade* K *ser do tipo alto, obtida da estratégia dos shareholders iniciais pela regra de Bayes (atualização Bayesiana) sempre que possível (ou seja, para* $K^*(V_L)$ *e* $K^*(V_H)$*);*

ii) Restrição de participação

$$\left[1 - \frac{20}{V^*(K^*(V_i)) + 30 - K^*(V_i)}\right](V_i + 30 - K^*(V_i) \geq V_i, \quad i = H, L;$$

iii) O nível de gastos em publicidade $K^*(.)$ *é ótimo para cada agente, i.e.,*

$$K^*(V_i) \in \arg\max_{K \geq 0} \left[1 - \frac{20}{V^*(K) + 30 - K}\right](V_i + 30 - K), \quad i = H, L;$$

iv) (Eq. de Nash do subjogo simultâneo entre os investidores): para todo

$K \geq 0$,

$$V^*(K) = \mu(K)V_H + [1 - \mu(K)]V_L$$

Queremos encontrar equilíbrios separadores, i.e., $K^*(V_L) \neq K^*(V_H)$. *Nesse caso,* $\mu(K^*(V_L)) = 0$ *e* $\mu(K^*(V_H)) = 1$, *de modo que* $V^*(K^*(V_L)) = V_L$ *e* $V^*(K^*(V_H)) = V_H$.

Lema 1. *Há um equilíbrio separador com gastos de publicidade* $K^*(V_H)$ *e* $K^*(V_L)$ *se, e somente se,*

$$K^*(V_L) = 0 \tag{1}$$

$$\left[1 - \frac{20}{V_H + 30 - K^*(V_H)}\right][V_H + 30 - K^*(V_H)] \geq V_H \tag{2}$$

$$\left[1 - \frac{20}{V_L + 30 - K^*(V_L)}\right][V_L + 30 - K^*(V_L)] \geq V_L \tag{3}$$

$$\left[1 - \frac{20}{V_H + 30 - K^*(V_H)}\right][V_H + 30 - K^*(V_H)] \geq \left[1 - \frac{20}{V_L + 30}\right](V_H + 30) \tag{4}$$

$$\left[1 - \frac{20}{V_L + 30}\right](V_L + 30) \geq \left[1 - \frac{20}{V_H + 30 - K^*(V_H)}\right][V_L + 30 - K^*(V_H)] \tag{5}$$

Demonstração. O mesmo raciocínio da do Lema 2. □

Logo, de (2) seque que:

$$110 - K^*(V_H) \geq 100 \Leftrightarrow K^*(V_H) \leq 10$$

De (5) segue que:

$$60 \geq \left[1 - \frac{20}{130 - K^*(V_H)}\right][80 - K^*(V_H)] \Leftrightarrow 8,21 \leq K^*(V_H) \leq 121,79$$

Ainda, (2) e (4) sempre valem. Assim, há equilíbrios separadores com gastos com publicidade para a melhor firma em todo o intervalo [8, 21; 10]. Isso acontece pois a sinalização, mesmo sendo um gasto que não altera o retorno do projeto, faz com que uma fatia menor da melhor firma seja vendida. Ou seja, os acionistas iniciais da melhor firma perdem com o gasto de publicidade, mas ficam com uma participação maior na empresa.

Resposta 10. a) Sob informação completa o problema do monopolista é

$$\begin{aligned} \max_{t,q} \quad & t - cq^2/2 \\ s.a. \quad & \theta q - t \geq 0 \end{aligned}$$

Claramente a restrição exige que $t = \theta q$.

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\theta q - c\frac{q^2}{2}\right) \Rightarrow \theta = cq \Rightarrow q = \theta/c, \quad t = \theta^2/c$$

b) Suponha que tenhamos um mecanismo onde o tipo $\underline{\theta}$ compre quantidade $\underline{q}$ a uma tarifa $\underline{t}$ e o tipo $\bar{\theta}$ compre a quantidade $\bar{q}$ a uma tarifa $\bar{t}$.

O problema do monopolista é

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{p}\left(\underline{t} - c\frac{\underline{q}^2}{2}\right) + \bar{p}\left(\bar{t} - c\frac{\bar{q}^2}{2}\right) \\ s.a. \quad & \underline{\theta}\underline{q} - \underline{t} \geq 0 && \text{(IR1)} \\ & \bar{\theta}\bar{q} - \bar{t} \geq 0 && \text{(IR2)} \\ & \underline{\theta}\underline{q} - \underline{t} \geq \underline{\theta}\bar{q} - \bar{t} && \text{(IC1)} \\ & \bar{\theta}\bar{q} - \bar{t} \geq \bar{\theta}\underline{q} - \underline{t} && \text{(IC2)} \end{aligned}$$

Juntos, IR1 e IC2 implicam IR2 como $\bar{\theta}\bar{q} - \bar{t} \geq \bar{\theta}\underline{q} - \underline{t} \geq \underline{\theta}\underline{q} - \underline{t} \geq 0$. Iremos ignorar a restrição IC1 também por enquanto e mostrar que ela é satisfeita pela solução do problema sem ela.

Da restrição IR1, $\underline{t} = \underline{\theta}\underline{q}$.

Da restrição IC2, $\bar{t} = \underline{t} + \bar{\theta}(\bar{q} - \underline{q}) = \underline{\theta}\underline{q} + \bar{\theta}(\bar{q} - \underline{q})$.

Substituindo na função objetivo, temos

$$\max \underline{p}\left(\underline{\theta}\underline{q} - c\frac{\underline{q}^2}{2}\right) + \bar{p}\left(\underline{\theta}\underline{q} + \bar{\theta}(\bar{q} - \underline{q}) - c\frac{\bar{q}^2}{2}\right)$$

As condições de primeira ordem diferenciando em relação a $\bar{q}$ e $\underline{q}$ são

$$\bar{p}\bar{\theta} - \bar{p}c\bar{q} = 0$$

$$\text{e } \underline{p}\underline{\theta} - \underline{p}c\underline{q} + \bar{p}\underline{\theta} - \bar{p}\bar{\theta} = 0$$

Da primeira vemos

$$\bar{q} = \bar{\theta}/c$$

Da segunda temos

$$\underline{q} = \frac{\underline{\theta} - \bar{p}\bar{\theta}}{\underline{p}c}.$$

Finalmente verificamos que a restrição IC1 que ignoramos é de fato satisfeita. Como IC2 vale com igualdade,

$$\bar{\theta}(\bar{q} - \underline{q}) = (\bar{t} - \underline{t}).$$

Como $\bar{q} > \underline{q}$, temos

$$\underline{\theta}(\bar{q} - \underline{q}) < (\bar{t} - \underline{t}),$$

assim $\underline{\theta}\underline{q} - \underline{t} > \underline{\theta}\bar{q} - \bar{t}$ como desejado.

A utilidade do comprador tipo $\underline{\theta}$ é 0.

A utilidade do comprador tipo $\bar{\theta}$ é

$$\bar{S} = \bar{\theta}\bar{q} - \bar{t} = \bar{\theta}\bar{q} - (\underline{\theta} - \underline{q} + \bar{\theta}(\bar{q} - \underline{q})) = \frac{(\bar{\theta} - \underline{\theta})(\underline{\theta} - \bar{p}\bar{\theta})}{\underbrace{p}_{}\ c}.$$

c) Se o consumidor compra a tecnologia alternativa, ele então escolhe

$$\max \theta q - \bar{c}\frac{q^2}{2} - f.$$

Isso resulta

$$q = \theta/\bar{c}$$

$$u = \theta^2/2\bar{c} - f.$$

Dada a tarifa do item (b) com $f < \bar{\theta}^2/2\bar{c} - \bar{S}$, o tipo $\bar{\theta}$ prefere produzir ele mesmo a comprar a cesta que o monopolista oferece o que lhe dá utilidade $\bar{S}$. Assim apenas consumidores do tipo $\underline{\theta}$ irão comprar do monopolista. Claramente o monopolista poderia se dar melhor se ele puder vender para os tipos $\bar{\theta}$ com outra tarifa.

No problema de maximização, devemos adicionar agora outra restrição,

$$\bar{\theta}\bar{q} - \bar{t} \geq \frac{\bar{\theta}^2}{2\bar{c}} - f \tag{IR2'}$$

Suponha inicialmente que f é de tal forma que a restrição somente é ativa para o problema original, i.e.

$$f = \frac{\theta^2}{2\bar{c}} - \bar{S}.$$

Como f é decrescente, o monopolista deve satisfazer IR2' ao aumentar $\bar{q}$ ou ao decrescer $\bar{t}$. Qualquer mudança na qual tenha mesmo efeito em $\bar{\theta}\bar{q} - \bar{t}$ tenha o mesmo efeito sobre os lucros. Cada um tem o mesmo custo marginal $c\bar{q} = \bar{\theta}$. Por causa do efeito de segunda ordem, o monopolista inicialmente prefere diminuir $\bar{t}$. Entretanto, eventualmente isto iria fazer com que a restrição IC1 é ativa quando o consumidor do tipo baixo $\underline{\theta}$ acha a cesta do tipo alto $\bar{\theta}$ mais atrativo. Nesse ponto, aumentar $\bar{q}$ ao invés de diminuir $\bar{t}$ tem menos efeito na restrição IC1 e é preferível.

Resposta 11. a) Como sempre, $\hat{t}_L = 0$, $\hat{w}_L = \theta_L = 0$ e $\hat{w}_H = \theta_H = 2$. $\hat{t}_H$ é solução para $\theta_H = c(\hat{t}_H, \theta_L)$, assim $\hat{t}_H = \sqrt{2/3}$.

b) Um contrato do tipo *pooling* juntando os dois tipos deve pagar ao menos

$$\theta_H - c(\hat{t}_H, \theta_H) + c(0, \theta_H) = 4/3$$

para assegurar que os agente do tipo alto irão sinalizar. Já que $\mathbb{E}\{\theta\} = 1 < 4/3$, oferecer esse contrato não é ótimo para a firma.

c) Precisamos mostrar que nenhum par de contratos alternativo pode prover um lucro positivo. Qualquer desvio lucrativo é fracamente dominado por um par de contratos que pagam

$$w_H = \theta_H - c(\hat{t}_H, \theta_H) + c(t, \theta_H) = 4/3 + t^2$$

para o tipo alto e

$$w_L = w_H - c(t, \theta_L) + c(\hat{t}_L, \theta_L) = 4/3 - 2t^2$$

para o tipo baixo, onde $t \in (0, \hat{t}_H)$ é a complexidade da função designada para o tipo alto no desvio. Em qualquer desses contratos, a firma ira lucrar

$$\frac{1}{2}(\theta_L - w_L) + \frac{1}{2}(\theta_H - w_H) = \frac{1}{2}\left(2t^2 - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - t^2\right) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}.$$

Como $t < \hat{t}_H = \sqrt{2/3}$, a firma que desviar desse contrato não obterá lucro maior que

$$\frac{1}{2}\hat{t}_H^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Como não há desvio lucrativo, o menu de contratos original forma um SPNE.

Resposta 12. a) $c(0, \theta) = 0$, $c_e(e, \theta) = 2e/\theta > 0 \forall e > 0$, $c_{ee}(e, \theta) = 2/\theta > 0$, $c_\theta(e, \theta) = -e^2/\theta^2 < 0 \forall e > 0$ e $c_{e\theta}(e, \theta) = -2e/\theta^2 < 0 \forall e > 0$. A condição $c_{e\theta}(e, \theta) < 0 \forall e > 0$ gera a *single-crossing property*. Lembre que $u(w, e|\theta) = w - c(e, \theta)$. Tome um par $(\hat{e}, \hat{w}) \in \mathbb{R}^2_+$ no plano onde o salário é medido no eixo das ordenadas e o nível de educação é medido no eixo das abscissas. Então, usando o teorema da função implícita:

$$\left.\frac{dw}{de}\right|_{u(w,e|\theta)=u(\hat{e},\hat{w}|\theta)} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial e}}{\frac{\partial u}{\partial w}} = c_e(e, \theta) > 0, \quad \forall e > 0$$

Como $c_{e\theta}(e, \theta) < 0 \forall e > 0$

$$\left.\frac{dw}{de}\right|_{u(w,e|1)=u(\hat{e},\hat{w}|1)} > \left.\frac{dw}{de}\right|_{u(w,e|2)=u(\hat{e},\hat{w}|2)}, \forall e > 0$$

Desse modo, $\forall e > 0$, a inclinação da curva de indiferença dos trabalhadores do melhor tipo é menor do que a inclinação da curva de indiferença dos trabalhadores do pior tipo, e as curvas só se cruzam no par $(\hat{e}, \hat{w})$.

b) Temos a seguinte definição:

Definição 2. *Um equilíbrio Bayesiano perfeito (EBP) desse jogo de sinalização é um perfil de estratégias* $(e^*(.), w^*(.))$, *com* $e^* : \Theta = \{\theta_L, \theta_H\} \to E = \mathbb{R}_+$ *e* $w^* : E = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *e uma função crença dada por* $\mu : E = \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, *tais que:*

i) $\mu(e)$ *é a probabilidade do trabalhador com nível de educação e ter produtividade alta, obtida da estratégia do trabalhador pela regra de Bayes (Atualização Bayesiana) sempre que possível (ou seja, para* $e^*(\theta_L)$ *e* $e^*(\theta_H)$*);*

ii) O nível de educação $e^*(.)$ é ótimo para cada agente, i.e.,

$$e^*(\theta) \in \arg\max_{e \geq 0} w^*(e) - \frac{e^2}{\theta};$$

iii) (Eq. de Nash do subjogo simultâneo entre as firmas): para todo $e \geq 0$,

$$w^*(e) = \mu(e)\theta_H + [1 - \mu(e)]\theta_L$$

Em um equilíbrio agregador os dois tipos escolhem o mesmo nível de educação i.e., $e^*(\theta_H) = e^*(\theta_L) = e^*$. Como as crenças são derivadas corretamente da estratégia do trabalhador e da Regra de Bayes (se possível), temos que:

$$\mu(e^*) = P(\theta_H|e^*) = \frac{P(e^*|\theta_H)P(\theta_H)}{P(e^*|\theta_H)P(\theta_H) + P(e^*|\theta_L)P(\theta_L)} = \frac{1.P(\theta_H)}{1.P(\theta_H) + 1.P(\theta_L)} = \lambda$$

Por (iii), temos que $w^*(e^*) = E(\theta)$. Para outros níveis de educação $e \neq e^*$, sabemos apenas que $\theta_L \leq w^*(e) \leq \theta_H$, dado que $\mu(e) \in [0, 1]$.

Lema 2. *Há um equilíbrio agregador com nível de educação e^* se, e somente se,*

$$\lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta + L - \frac{e^{*2}}{\theta_L} \geq \theta_L \tag{6}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Lembre que o trabalhador do tipo baixo sempre pode escolher $e = 0$. Como $w^*(e) \geq \theta_L \forall e$, o trabalhador do tipo baixo obterá no mínimo utilidade θ_L se escolher não se educar. Por (ii), se temos um equilíbrio agregador, então (1) deve valer. ($\Leftarrow$) Suponha que vale (1). Considere a seguinte crença e o seguinte programa salarial

$$\mu(e) = \begin{cases} \lambda & \text{, se } e = e^* \\ 0 & \text{, se } e \neq e^* \end{cases} \text{ e } w^*(e) = \begin{cases} E(\theta) & \text{, se } e = e^* \\ \theta_L & \text{, se } e \neq e^* \end{cases}$$

Assim, é ótimo para o tipo baixo escolher e^*. Ainda, como

$$\lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L - \frac{e^{*2}}{\theta_H} \geq \lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L - \frac{e^{*2}}{\theta_L}$$

vemos que e^* também é ótimo para o tipo alto. $\square$

Usando o lema 1, vemos que os níveis educadionais para os quais existe um equilíbrio agregador devem satisfazer:

$$2\lambda + 1 - \lambda - e^{*2} \geq 1 \Leftrightarrow e^* \in [0, \sqrt{\lambda}].$$

Em todos os equilíbrio agregadores os trabalhadores recebem $E(\theta)$. Dessa forma, um equilíbrio em que $e^* = 0$ Pareto domina os demais.

c) Agora os trabalhadores escolhem níveis educacionais distintos, $e^*(\theta_H) \neq e^*(\theta_L)$. Usando o mesmo raciocínio do item anterior, vemos que $\mu(e^*(\theta_L)) = 0$ e $\mu(e^*(\theta_H)) = 1$, de modo que $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$ e $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$.

Lema 3. *Há um equilíbrio separador com níveis de educação $e^*(\theta_H)$ e $e^*(\theta_L)$ se, e somente se,*

$$\theta_L - \frac{e^*(\theta_H)^2}{\theta_H} \geq \theta_L \geq \theta_H - \frac{e^*(\theta_H)^2}{\theta_L} \text{ e } e^*(\theta_L) = 0 \tag{7}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Considere um equilíbrio separador qualquer. Novamente, um trabalhador tipo baixo obterá no mínimo utilidade θ_L se escolher não se educar. Logo, por (ii)

$$\theta_L - \frac{e^*(\theta_L)^2}{\theta_L} \geq \theta_L \Rightarrow e^*(\theta_L) = 0$$

Segue que $e^{(}\theta_H) > 0$. Mas o trabalhador do tipo alto também pode escolher não se educar, obtendo no mínimo θ_L de utilidade, e a primeira desigualdade deve valer, por (ii). A segunda desigualdade segue novamente de (ii) aplicada ao tipo baixo. ($\Leftarrow$) Suponha que vale (2). Considere a seguinte crença e o seguinte programa salarial

$$\mu(e) = \begin{cases} 1 & ,\text{se } e = e^*(\theta_H) \\ 0 & ,\text{se } e \neq e^*(\theta_H) \end{cases} \quad \text{e } w^*(e) = \begin{cases} \theta_H & ,\text{se } e = e^*(\theta_H) \\ \theta_L & ,\text{se } e \neq e^*(\theta_H) \end{cases}$$

Segue trivialmente de (2) que $(\mu(.), w^*(.), e^*(\theta_H) > 0, e^*(\theta_L)) = 0$ é um equilíbrio separador. $\square$

Usando o lema 2, vemos que os níveis educacionais para o tipo alto, $e^*(2)$, para os quais existe um equilíbrio separador devem satisfazer:

$$2 - \frac{e^*(2)^2}{2} \geq 1 \geq 2 - e^*(2)^2 \Leftrightarrow e^*(\theta_H) \in [1, \sqrt{2}]$$

Em todos os equilíbrios separadores os trabalhadores do tipo baixo têm utilidade θ_L e os trabalhadores do tipo alto recebem θ_H. Desse modo, fica clardo um equilíbrio separador em que $e^*(2) = 1$ Pareto domina os demais.

d) Quando não há sinalização e $r(\theta_L) = r(\theta_H) = 0$, o único equilíbrio competitivo ocorre com $w^* = E(\theta)$ e $\Theta^* = \{\theta_L, \theta_H\}$. Desse modo a utilidade do trabalhador do tipo alto é $E(\theta) - 0/2 = E(\theta) = 2\lambda + 1 - \lambda = \lambda + 1$. No melhor equilíbrio separador (no sentido de Pareto), o trabalhador do tipo mais alto tem utilidade $2 - 1/2 = 3/2$. Assim para que os trabalhadores mais produtivos estejam pior com sinalização do que quanto a sinalização não é possível devemos ter

$$\lambda + 1 \geq 3/2 \Leftrightarrow \lambda \geq 1/2$$

Resposta 13. Hipóteses:

Tipos (qualidades): $\theta \in \{L, H\}$ onde $Pr(\theta = L) = 1 - \lambda$ e $Pr(\theta = H) = \lambda$.

Valoração do comprador (principal): $V \in \{V_L, V_H\}$.

Custo do vendedor (agente):$c \in \{c_L, c_H\}$.

$V_H > p > V_L > c_h > c_L$

Utilidade esperada (neutra ao risco): $U = \lambda V_H + (1-\lambda)V_L$

a) Sob qualidade não observável, o consumidor escolhe comprar se:

   $U = \lambda V_H + (1-\lambda)V_L > p$.

b) O vendedor do tipo $\theta = H$ gasta $A > 0$ em marketing para sinalizar qualidade maior.

   - Suponha por contradição que existe um equilíbrio separador, ou seja, $A_L \neq A_H$ e o consumidor distingue exatamente o tipo de produto (i.e., $\mu(\theta = H|A_H) = 1$). $\Rightarrow$ consumidor compra somente $\theta = H$, pois $V_H > p > V_L$.
   - Os lucros nesse caso são:

     $\pi_H = p - c_H - A \geq 0$,

     $\pi_L = 0$.
   - Note que existe desvio lucrativo para $\theta = L$, pois se $A_L = A_H$:

     $\pi_L = p - c_L - A > p - c_H - A \geq 0$.
   - Contradição com este ser um PBE.
   - O problema nessa questão esta ligado a violação da condição de single-crossing que exige o custo do sinal seja maior para $\theta = L$ em nível e na margem. Nesse caso, como $c_H > c_L$, a firma tipo $\theta = L$ tem espaço orçamentário para copiar qualquer estratégia de sinalização da firma $\theta = H$.

Resposta 14. a) Firmas pagam um salário igual a produtividade esperada: $\hat{w}(e) = \mathbb{E}(\theta|e)$. Para os níveis de educação de equilíbrio, esse esperança é determinada pela regra de Bayes. Para os níveis de educação fora do equilíbrio possuímos certa liberdade para especificar as crenças (o que faremos no final).

Passando para os trabalhadores, como é usual, os de tipo mais baixo não adquirem educação: $\hat{e}_L = 0$. Então, encontramos e_M que satisfaz

$$\theta_M - c(e_M, \theta_L) = \theta_L - c(e_L, \theta_L).$$

Isso resulta em

$$\hat{e}_M^2 = \theta_L(\theta_M - \theta_L).$$

A seguir, vamos encontrar e_H para satisfazer

$$\theta_H - c(e_H, \theta_M) = \theta_M - c(e_M, \theta_M).$$

Isso resulta em

$$\hat{e}_H^2 = \hat{e}_M^2 + \theta_M(\theta_H - \theta_M) = \theta_L(\theta_M - \theta_L) + \theta_M(\theta_H - \theta_M).$$

Finalmente, podemos usar as crenças a seguir (representadas por produtividade esperada):

$$\mathbb{E}(\theta|e) = \begin{cases} \theta_L & 0 \leq e < \hat{e}_M \\ \theta_M & \hat{e}_M \leq e < \hat{e}_H \\ \theta_H & e \geq \hat{e}_H. \end{cases}$$

b) Crenças admissíveis induzem uma produtividade esperada que satisfaça

$$\theta_L \leq \mathbb{E}(\theta|e) \leq \min\{ \underbrace{\theta_L + c(e, \theta_L)}_{\text{Restrição do tipo baixo}}, \underbrace{\theta_M - c(\hat{e}_M, \theta_M) + c(e, \theta_M)}_{\text{Restrição do tipo médio}}, \theta_H \}$$

para todo $e \geq 0$. É claro que a atualização Bayesiana e o fato que estamos procurando equilíbrio separador implica que $\mathbb{E}(\theta|\hat{e}_L) = \theta_L$, $\mathbb{E}(\theta|\hat{e}_M) = \theta_M$ e $\mathbb{E}(\theta|\hat{e}_H) = \theta_H$.

figura2.PNG

c) É claro que $\hat{w}(e) = \mathbb{E}(\theta|e)$. Iremos focar no melhor PBE juntando os tipos baixo e médio, de modo que tanto θ_L quanto θ_M escolham $\hat{e}_P = 0$, enquanto o tipo θ_H escolha $\hat{e}_H > 0$. Como consequência, $\hat{w}(0) = (\theta_L + \theta_M)/2$ e $w(\hat{e}_H) = \theta_H$. Para evitar que o tipo médio tenha incentivos a se passar por tipo alto, $\hat{e}_H$ deve satisfazer $\hat{w}(0) - c(0, \theta_M) = \theta_H - c(\hat{e}_H, \theta_M)$. Isto é, $\hat{e}_H^2 = \theta_M \left(\theta_H - \frac{\theta_L + \theta_M}{2}\right)$. As crenças devem induzir uma função de salário dentro do conjunto $[\theta_L, \theta_H]$ e abaixo da curva de indiferença do tipo médio (os tipos baixo e alto nunca são um problema sozinhos nesse PBE).

figura3.PNG

d) Agora o tipo baixo escolhe $\hat{e}_L = 0$, enquanto tipos θ_M e θ_H escolhem $\hat{e}_P > 0$. Assim, devemos ter que $\hat{w}(0) = \theta_L$ e $\hat{w}(\hat{e}_P) = (\theta_M + \theta_H)/2$. O nível de educação $\hat{e}_P$ deve ser tal que o tipo baixo não tenha incentivo para imitar o comportamento do conjunto de tipos médio e alto. Isto é assegurado pela condição

$$\hat{w}(0) - c(0, \theta_L) = \hat{w}(\hat{e}_P) - c(\hat{e}_P, \theta_L)$$

e é equivalente a

$$\hat{e}_P^2 = \theta_L \left(\frac{\theta_M + \theta_H}{2} - \theta_L \right).$$

Note que estamos focando no melhor PBE juntando os tipos médio e alto. As crenças devem induzir uma função de salário dentro do conjunto $[\theta_L, \theta_H]$ e abaixo da curva de indiferença dos tipos baixo e alto (o tipo médio nunca é um problema sozinho nesse PBE).

figura4.PNG

Resposta 15. a) Suponha que as firmas possam observar θ e condicionar seus contratos a cada tipo: contrato (w_L, t_L) somente para os tipos θ_L e contrato (w_H, t_H) somente para os tipos θ_H.

Proposição 1. *Em todo ENPS com produtividade observável, as firmas oferecem o menu de contratos* $\{(\theta_L, 0), (\theta_H, 0)\}$, *onde:*

- $(\theta_L, 0)$ *é o contrato para os trabalhadores* θ_L
- $(\theta_H, 0)$ *é o contrato para os trabalhadores* θ_H

e cada indivíduo θ_i *aceita o contrado* $(\theta_i, 0)$ *e as firmas tem lucro zero.*

b)

Lema 4. *Em qualquer equilíbrio, agregador ou separador, ambas firmas devem ter lucro zero.*

Demonstração.

- Sejam (w_H, t_H) e (w_L, t_L) os contratos escolhidos pelos trabalhadores respectivos (podem ser iguais).
- Suponha que o lucro agregado das duas firmas seja $\pi > 0$.
- Logo uma delas está lucrando no máximo $\pi/2$.
- Considere o seguinte desvio dessa firma no qual ela oferece

$$\{(w_H + \epsilon, t_H), (w_L + \epsilon, t_L)\}, \epsilon > 0.$$

- O contrato $(w_L + \epsilon, t_L)$ irá atrair todos os trabalhadores do tipo θ_L e o contrato $(w_H + \epsilon, t_H)$ irá atrair todos os trabalhadores do tipo θ_H.
- Note que como o tipo θ_i inicialmente preferia o contrato tipo (w_i, t_i) ao (w_j, t_j) nós temos que $w_i - c(t_i, \theta_i) \geq w_j - c(t_j, \theta_i)$ e, portanto, $(w_i + \epsilon) - c(t_i, \theta_i) \geq (w_j + \epsilon) - c(t_j, \theta_i)$.
- Como ϵ pode ser arbitrariamente pequeno, esse desvio fornece a firma um lucro arbitrariamente próximo de π, então a firma tem um desvio lucrativo.
- Logo, devemos ter $\pi \leq 0$.
- Como nenhuma firma pode ter prejuízo em equilíbrio (ela pode ter sempre lucro zero não oferecendo nenhum contrato)$\Rightarrow \pi = 0$.

Lema 5. *Não existe equilíbrio agregador.*

Demonstração.

- Suponha que haja equilíbrio agregador (w^P, t^P).
- Pelo lema acima ele se encontra na pooled breakeven line $w^P = E(\theta)$ (lucro zero).
- Suponha que a firma j esteja oferecendo (w^P, t^P).

- Então a firma $k \neq j$ tem um desvio que lhe dá lucro positivo.

  Ela oferece um único contrato $(\tilde{w}, \tilde{t})$ que se encontra em algum lugar da área sombreada da figura abaixo e tem $\tilde{w} < \theta_H$.

- Esse contrato atrai todos os trabalhadores do tipo θ_H e nenhum do tipo θ_L, que preferem (w^P, t^P) a $(\tilde{w}, \tilde{t})$.

- Além disso, como $\tilde{w} < \theta_H$, a firma k tem lucro estritamente positivo desse contrato.

figura5.PNG

c) Em qualquer ENPS do modelo de triagem:

- os trabalhadores menos produtivos aceitam o contrato $(\theta_L, 0)$;

- os trbalahadores mais produtivos aceitam o contrato $(\theta_H, \hat{t}_H)$, onde $\theta_H - c(\hat{t}_H, \theta_L) = \theta_L$.

figura6.PNG

Resposta 16.

- Função de payoff do trabalhador: $u_1(a_1, a_2, \theta) = a_2 - \frac{a_1}{\theta}$

- Função de payoff da firma: $u_2(a_1, a_2, \theta) = -(a_2 - \theta)^2$

a) Quando a informação é completa a firma observa perfeitamente a produtividade do trabalhador e oferece um salário $a_2(\theta) = \theta, a_2(\theta') = \theta' < a_2(\theta'') = \theta''$. Assim, como o trabalhador do tipo θ maximiza $u(a_1, \theta, \theta) = \theta - \frac{a_1}{\theta}$ em relação a $a_1 : a_1(\theta) = 0$

figura7.PNG

b) Em um equilíbrio separador, o trabalhador de baixa produtividade revela se tipo então recebe um salário igual a θ'. Ele então deve escolher $a_1 = 0$, o nível de educação que minimiza se custo privado, dado que ele será corretamente identificado no equilíbrio.

Seja a_1'' a ação de equilíbrio do tipo θ''. Para que $(a_1' = 0, a_1'')$ seja parte de um equilíbrio separador, deve valer que o tipo θ' não prefere a_1'' a a_1':

$$\theta' - \frac{0}{\theta'} = \theta' \geq \theta'' - \frac{a_1''}{\theta'} \Leftrightarrow a_1'' \geq \theta'(\theta'' - \theta').$$

Similarmente, o tipo θ'' não pode preferir $a_1' = 0$ a a_1'':

$$\theta'' - \frac{a_1''}{\theta''} \geq \theta' \Leftrightarrow a_1'' \leq \theta''(\theta'' - \theta').$$

Assim, uma condição necessária para que o equilíbrio separador exista é $\theta'(\theta'' - \theta') \leq a_1'' \leq \theta''(\theta'' - \theta')$.

Alternativamente, suponha que $\theta'(\theta'' - \theta') \leq a_1'' \leq \theta''(\theta'' - \theta')$. Considere as crenças: $\{\mu(\theta 1|a_1) = 1 \text{ se } a_1 \neq a_1'', \mu(\theta'|a_1'') = 0\}$. Claramente, os dois tipos preferem $a_1 = 0$ que qualquer $a_1 \notin \{0, a_1''\}$, pois qualquer nível de educação desse tipo renderá salário do tipo baixo θ' de qualquer forma. Como θ' prefere 0 a a_1'' e θ'' prefere a_1'' a 0, temos um contínuo de equilíbrios separadores, e os trabalhadores do tipo alto pode escolher um nível de educação $a_1'' \in [\theta'(\theta'' - \theta'), \theta''(\theta'' - \theta')]$.

c) Em um equilíbrio do tipo pooling, ambos tipos escolhem a mesma ação: $\tilde{a}_1 = a_1' = a_1''$.

As crenças da firma são iguais anteriormente e posteriormente. $\mu(\theta = \theta'|\tilde{a}_1) = p'$, $\mu(\theta = \theta''|\tilde{a}_1) = p''$.

O salário é, então, $a_2(\tilde{a}_1) = p'\theta' + p''\theta''$.

Para que $\tilde{a}_1$ seja o resultado obtido em um equilíbrio pooling é necessário atribuir crenças pessimistas $\mu(\theta = \theta'|a_1) = 1$ para qualquer ação $a_1 \neq \tilde{a}_1$ (ao observar $a_1 \neq \tilde{a}_1$ a firma irá inferir que o trabalhador é de baixa habilidade). Assim, $\tilde{a}_1$ é nível de equilíbrio do tipo pooling se, e somente se, para cada θ,

$$\theta' \leq p'\theta' + p''\theta'' - \frac{\tilde{a}_1}{\theta}$$

(i.e. sse nenhum tipo de trabalhador deseja desviar de $\tilde{a}_1$, para $a_1 = 0$, que é o desvio mais lucrativo)

Como $\theta' < \theta''$, o tipo θ' é que teria mais incentivos a desviar para $a_1 = 0$, para minimizar os custos com educação, a restrição ativa é dada por

$$\tilde{a}_1 \leq p''\theta'(\theta'' - \theta').$$

Há, também, um contínuo de equilíbrios.

figura8.PNG

É fácil checar que qualquer estratégia $a_1 > \theta'(\theta''-\theta')$ é um equilíbrio dominado para o tipo θ'' mas não para o tipo θ':
Considere o equilíbrio separador $a_1' = 0$, $a_1'' = a_1^* > \theta'(\theta''-\theta')$, $\mu(\theta = \theta''|a_1^*) = 1$, $\mu(\theta = \theta''|a_1) = 0$ para $a_1 \neq a_1', a_1''$. Os payoffs são $u_1(a_1' = 0, a_2' = \theta', \theta') = \theta'$ e $u_1(a_1'', a_2'' = \theta'', \theta'') = \theta'' - \frac{a_1''}{\theta''}$
Considere o desvio para $a_1^d = \theta'(\theta'' - \theta')$: no melhor dos casos, o payoff do trabalhador, para cada um dos tipos é:

$$u_I(a_1^d, a_2 = \theta'', \theta') = \theta'' - \frac{a_1}{\theta'} = u_I(a_1' = 0, a_2' = \theta', \theta') = \theta'$$

e

$$u_I(a_1^d, a_2 = \theta'', \theta'') = \theta'' - \frac{a_1^d}{\theta''} > \theta'' - \frac{a_1^*}{\theta''}.$$

Então a firma não deve atribuir probabilidade positivo ao evento do tipo θ' desviar¿ $\mu(\theta = \theta'|a_1^d) = 0$. Então $(a_1' = 0, a_1'' = a_1^*)$ não é um perfil de estratégias que resulta em um equilíbrio separador, pois o tipo θ'' estaria melhor se desviasse para $a_1\theta'(\theta'' - \theta')$. Assim, no conjunto de todos os níveis de educação que geram um equilíbrio separador, há um único que não é um equilíbrio dominado para o tipo θ'', e que é o único nível de educação que gera um equilíbrio separador intuitivo para o tipo θ'':
O único equilíbrio separador intuitivo é

$$a_1' = 0, a_1'' = \theta'(\theta''-\theta'), \mu(\theta = \theta''|a_1'') = 1, \mu(\theta = \theta''|a_1) = 0, \text{para qualquer } a_1 \neq a_1''.$$

O conjunto de níveis de educação de equilíbrio pooling é $[0, \tilde{a}_1]$. Mas todas figura9.PNG

essas escolhas de educação violam o critério intuitivo.

Assim, ao aplicarmos o critério intuitivo nos permite reduzir a um único PBE intuitivo, e esse equilíbrio separador é:

$$a_1' = 0, a_1'' = \theta'(\theta''-\theta'), \mu(\theta = \theta''|a_1'') = 1, \mu(\theta = \theta''|a_1) = 0, \text{para qualquer } a_1 \neq a_1''$$

.

Resposta 17. a)

$$\begin{aligned} \max_{t(\theta),q(\theta)} \quad & t(\theta) - cq(\theta) \\ s.a. \quad & q'(\theta) \geq 0, \\ & t(\theta) = \theta q(\theta)^{\frac{1}{2}} - \int_0^\theta q(s)^{\frac{1}{2}} ds. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Pelos argumentos usuais, o problema é transformado para

$$\begin{aligned} \max_{q(\theta)} \quad & \int_0^1 \theta q(\theta)^{\frac{1}{2}} - cq(\theta) - \frac{1-\theta}{1} q(\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ s.a. \quad & q'(\theta) \geq 0. \end{aligned}$$

É fácil ver que

$$q(\theta) = 0 \text{ se } \theta < \frac{1}{2}.$$

Maximizando ponto a ponto em relação a q e ignorando a restrição de monotonicidade resulta em:

$$(2\theta - 1)\frac{1}{2\sqrt{q}} - c = 0$$

Resolvendo para q, temos:

$$q(\theta) = \left(\frac{\theta}{c} - \frac{1}{2c}\right)^2. \tag{2}$$

Como q é crescente em θ, essa é a solução para o problema restrito também.

Temos também ao substituir na segunda restrição do problema (1) t:

$$t(\theta) = \theta\left(\frac{\theta}{c} - \frac{1}{2c}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^{\theta}\left(\frac{s}{c} - \frac{1}{2c}\right)ds$$

e integrando, temos:

$$t(\theta) = \frac{1}{2c}\theta^2 - \frac{1}{8c}. \tag{3}$$

c) Invertendo a equação (2) para θ para obter:

$$\theta = c\sqrt{q} + \frac{1}{2}.$$

Substituindo em (3) para obter:

$$t = \frac{c}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q}.$$

Assim é possível checar que o preço por unidade $\frac{t}{q}$ é decrescente em q.