AULA 7:
TESTE DE HIPOTESES

Gleici Castro Perdoná

pgleici@fmrp.usp.br

Resumo p/ IC $(\mu_A - \mu_B)$

Variâncias conhecidas

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0,1)$$

Variâncias desconhecidas e iguais

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$$

Variâncias desconhecidas e diferentes

$$\frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} \sim t_\nu$$

Resumo para IC (proporçao)

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1).$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Percentis da distribuição *t*

	Área na Cauda Superior					
gl	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,435
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,402
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
110	1,289	1,659	1,982	2,361	2,621	3,381
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	3,291

Tipos de erros e suas probabilidades

Situação

Decisão	H0 Verdadeira	H0 Falsa
“Aceitar” H0	Sem erro	Erro II
Rejeitar H0	Erro I	Sem erro

α = *P(erro do tipo I) = P (Rejeitar H0 | H0 é verdadeira)*

α chama-se nível de significância

β = *P(erro do tipo II) = P ("Aceitar" H0 | H0 é falsa)*

1- β chama-se poder do teste

Fazendo c = 0,5 e σ = 3 e n = 10

H_0: μ = 11g/dl
H_1: $\mu \neq$ 11g/dl

A Região crítica:

$$\overline{Y} < 10,5 \quad ou \quad \overline{Y} > 11,5$$

Assim supondo

$$Y \approx N(\mu, 3^2) \quad então \quad \overline{Y} \approx N(\mu, 3^2/10)$$

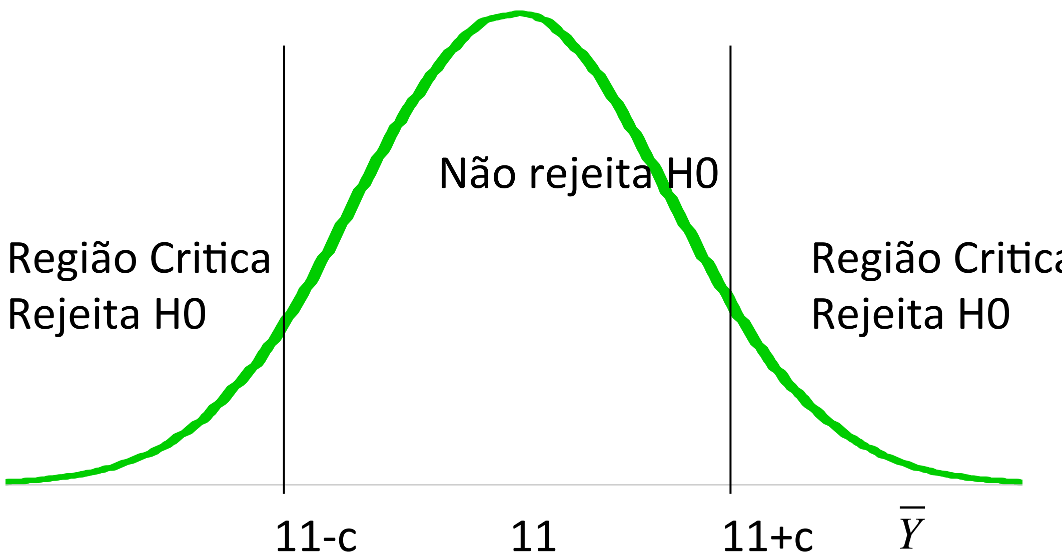
Assim

$$\alpha = P(\overline{Y} < 10,5 \quad ou \quad \overline{Y} > 11,5 \quad | \mu = 11)$$

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{10.5 - 11}{3 / \sqrt{10}} = -0.909$$

$$\alpha = P(Z < -0.909) + P(Z > 0.909)$$

$$\alpha = 0.1817 + 0.1817 = 0.3634$$



Procedimento Geral dos Testes de hipóteses

1. Pelo contexto do problema identificar o parâmetro de interesse
2. Especificar a hipótese nula
3. Especificar uma hipótese alternativa apropriada
4. Escolher o nível de significância, α
5. Escolher uma estatística de teste adequada
6. Fixar a região crítica do teste
7. Recolher uma amostra e calcular o valor observado da estatística de teste
8. Decidir sobre a rejeição ou não de *H0*

EXEMPLO 2

PFE: Pico de fluxo expiratório em homens (em litros de ar/min)

Pac	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Antes	**635**	**704**	**662**	**560**	**603**	**745**	**698**	**575**	**633**	**669**
Depois	**640**	**712**	**681**	**558**	**610**	**740**	**707**	**585**	**635**	**682**

O pico do fluxo expiratório (PFE) é uma medida indireta de resistência das vias aéreas, sendo um parâmetro expiratório esforço-dependente, freqüentemente usado para monitorizar pacientes asmáticos e sua resposta ao tratamento.

O Objetivo do estudo é comparar as MÉDIAS DE DUAS distribuições normais, supondo que se trata da MESMA população, mas em dois momentos diferentes: antes e após uso de um broncodilatador (salbutamol).

Existe interesse em verificar se o broncodilatador contribuiu para a PFE médio nos pacientes, isto é, verificar se a média do PFE antes do tratamento é MENOR do que a média de PFE após o tratamento. Reparem que é exigido que se tome uma decisão, o que configura um problema de TESTE DE HIPÓTESES.

PREFEITURA MUNICIPAL DE CAMPINAS

SUS

SECRETARIA MUNICIPAL DE SAÚDE
CAMPINAS - SP

PICO DE FLUXO EXPIRATÓRIO

VALORES DE PICO DE FLUXO EXPIRATÓRIO (l/min) PARA POPULAÇÃO NORMAL *1

TABELA 1

HOMENS	ESTATURA					
ANOS	155	160	165	170	175	180
20	564	583	601	620	639	657
25	553	571	589	608	626	644
30	541	559	577	594	612	630
35	530	547	565	582	599	617
40	518	535	552	569	586	603
45	507	523	540	557	573	576
50	494	511	527	543	560	563
55	483	499	515	531	547	563
60	471	486	502	518	533	549
65	460	475	490	505	520	536
70	448	462	477	492	507	521

TABELA 1

MULHERES	ESTATURA					
ANOS	145	150	155	160	165	170
20	405	418	431	445	459	473
25	399	412	426	440	453	467
30	394	407	421	434	447	461
35	389	402	415	428	442	455
40	383	396	409	422	435	448
45	378	391	404	417	430	442
50	373	386	398	411	423	436
55	368	380	393	405	418	430
60	363	375	387	399	411	424
65	358	370	382	394	406	418
70	352	364	376	388	399	411

VALORES DE PICO DE FLUXO EXPIRATÓRIO (l/min) PREVISTO PARA CRIANÇAS NORMAIS

TABELA 2

ESTATURA (CM)	VALOR (l/min)	ESTATURA (CM)	VALOR (l/min)
109	145	142	328
112	169	145	344
114	180	147	355
117	196	150	370
119	207	152	381
122	222	155	397
124	233	157	407
127	249	160	423
130	265	163	439
135	291	165	450
137	302	168	466
140	318	170	476

OBSERVAÇÃO: *1 Leiner, CG et al. Expiratory peak flow rate. Standard values for normal subjects. Use as a clinical test of ventilatory function. Am Rev Respir Dis. 1963; 88: 644.

RELATÓRIO:

NOME:

IDADE:	SEXO:		ESTATURA:	VALOR PFE PREVISTO:	VALOR PFE OBTIDO:	% DO PREVISTO:
ANOS	MASCULINO	FEMININO	CM			

OBSERVAÇÕES:

ORIENTAÇÕES:

- O paciente deverá ser orientado a fazer maior esforço possível.
- Medicações em uso ou dificuldades técnicas durante o exame deverão constar no campo "**OBSERVAÇÕES**".

Procedimento Geral dos Testes de hipóteses

1. Pelo contexto do problema identificar o parâmetro de interesse

DIFERENÇA ENTRE AS MÉDIAS

2. Especificar a hipótese nula

DIFERENÇA ENTRE AS MÉDIAS DEVE SER SUPOSTA IGUAL A ZERO

3. Especificar uma hipótese alternativa apropriada

DIFERENÇA ENTRE AS MÉDIAS DEVE SER SUPOSTA MENOR QUE ZERO

$$H_0 : \mu_d = 0 \qquad \textit{onde } \mu_d = \mu_{antes} - \mu_{depois}$$
$$H_1 : \mu_d < 0$$

4. Escolher o nível de significância, α

5. Escolher uma es $\alpha = 0{,}01 \qquad 1 - \alpha = 0{,}99$

Amostra de 10 elementos, menor que 30 elementos a variável de teste que será utilizada será a variável $\mathbf{t_{n-1}}$ da distribuição t de Student.

6. Fixar a região crítica do teste

Teste unilateral à esquerda (com 1% de significância), e a variável de teste é t_{n-1} (a amostra tem 10 elementos), então o valor crítico (obtido da tabela da distribuição t de Student) será

$$t_{n-1,\text{critico}} = t_{10-1;0{,}01} = t_{9;0{,}01} = -t_{9;0{,}99} = -2{,}82$$

Para valores maiores de -2,82 NÃO REJEITAREMOS H_0

(ou seja o broncodilatador não faz efeito, a diferença entre as médias é nula).

Se t_{n-1} for menor do que -2,82 rejeitaremos H_0
(a média DEPOIS aumentou demais em relação à média ANTES do tratamento para que a diferença seja devida apenas ao acaso).

Claro que há uma chance de 1% de que venhamos a rejeitar H_0 sendo ela verdadeira.

7. Recolher uma amostra e calcular o valor observado da estatística de teste

Pac	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Antes	**635**	**704**	**662**	**560**	**603**	**745**	**698**	**575**	**633**	**669**
Depois	**640**	**712**	**681**	**558**	**610**	**740**	**707**	**585**	**635**	**682**
d_i	**-5**	**-8**	**-19**	**2**	**-7**	**5**	**-9**	**-10**	**-2**	**-13**
d_i^2	**25**	**64**	**361**	**4**	**49**	**25**	**81**	**100**	**4**	**169**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-66}{10} = \text{-6,6 l/min}$$

8. Decidir sobre a rejeição ou não de *H0*

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - [(\sum d_i)^2 / n]}{n-1}} = \sqrt{\frac{882 - [(-66)^2 / 10]}{10-1}} = \text{7,04 l/min}$$

$$t_{n-1} = \frac{\bar{d}}{(s_d / \sqrt{n})} \qquad t_{10-1} = t_9 = \frac{-6{,}6}{(7{,}04 / \sqrt{10})} = -2{,}96$$

Se o valor da variável de teste fosse MENOR do que -2,82 a hipótese H_0 seria rejeitada

$$t_{n-1} = t_9 = -2{,}96 < t_{n-1,\text{critico}} = t_{9;0{,}01} = -2{,}82$$

REJEITAMOS H_0 a 1% de significância.

Com 99% de confiança (ou uma chance de erro de 1%) que o bronco dilatador contribuiu para o aumento do PEF médio dos pacientes

Dados

635	640
704	712
662	681
560	558
603	610
745	740
698	707
575	585
633	635
669	682

No R

antes=scan()
Colar

depois=scan()
Colar

t.test (antes,depois, alt="less",paired=T, var.equal=T)

Paired t-test
data: antes and depois
t = -2.9635, df = 9, p-value = 0.007935
sample estimates: mean of the differences -6.6

t.test(x, y = NULL, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE, conf.level = 0.95, ...)

Intervalo (10 minutos)

Um estudo foi conduzido para investigar se o farelo de aveia auxilia a baixar os níveis séricos de colesterol dos homens em relação as mulheres hipercolesterolêmicos. Catorze indivíduos do sexo masculino foram aleatoriamente colocados em uma dieta que incluía farelo de aveia e Catorze do sexo feminino, seus níveis de colesterol de lipoproteína de baixa densidade (LDL – *low-density lipoprotein*) foram registrados. Os níveis são diferentes em relação ao sexo? Os dados desse estudo são mostrados a seguir

	LDL (mmol/l)	
ID	Masculino	Feminino
1	4,61	3,84
2	6,42	5,57
3	5,4	5,85
4	4,54	4,8
5	3,98	3,68
6	3,82	2,96
7	5,01	4,41
8	4,34	3,72
9	3,8	3,49
10	4,56	3,84
11	5,35	5,26
12	3,89	3,73
13	2,25	1,84
14	4,24	4,14

(a) As duas amostras são de dados pareados ou independentes?

(b) Quais são as hipóteses apropriadas para um teste bilateral?

(c) Conduza o teste ao nível de significância de 5%. Qual é o p-valor?

(e) O que você conclui?

Temos duas populações?

- Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 25,5 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises desse índice, obtendo:28, 27, 24, 21, 25, 26, 22,23,24,e 27. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual a 4,84 mg2 . Pode-se aceitar, ao nível de 10% , a afirmação do fabricante?

Correlação

Correlação é a interdependência ou associação entre duas ou mais variáveis quantitativas. Por exemplo X e Y. Temperatura e pulsação, Altura e idade, pressão e Area no esôfago,etc.

Aplicações prática

- relação entre as médias de temperatura e o obituário por doenças do aparelho respiratório;
- relação entre cólera e as condições climáticas
- relação entre pulsação e a temperatura de indivíduos normais;
- relação entre pesos de recém -nascidos e as condições sociais
- relação entre raio e circunferência;
- relação entre volume e pressão de um gás

Correlação

É de grande interesse em diversas áreas a verificação do grau de associação entre duas ou mais variáveis(características), de uma determinada população. Desta grande necessidade, determina-se o **coeficiente de correlação**, que é medido por uma constante representada por **r** . Os coeficientes de correlação, variam de uma maneira contínua entre os limites -1 e +1, gerando os seguintes tipos de correlação:

$$-1 \leq r \leq 1$$

- Correlação positiva, acontece quando uma variável aumenta e a outra variável associada também.
- Correlação negativa, acontece quando uma variável aumenta e a outra variável associada diminui.
- Quando não há correlação o coeficiente é igual a zero.

Como medir a correlação?

Algumas considerações para valores contínuos pequenos médios e grandes são feitos; (Rugg)

Quando	$r < 0{,}15$	$\rightarrow$	não há correlação
	$0{,}15 < r < 0{,}29$	$\rightarrow$	baixa
	$0{,}30 < r < 0{,}49$	$\rightarrow$	média
	$r > 0{,}50$	$\rightarrow$	acentuada

-1 $\longleftrightarrow$ +1

Correlação negativa | Ausência correlação | Correlação positiva

Como calcular?

O coeficiente de correlação $\rho = média\left[\frac{(X-\mu_X)}{\sigma_X}\frac{(Y-\mu_Y)}{\sigma_Y}\right]$

$$r = \frac{\sum(XY) - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{\sqrt{\left[\sum(X^2) - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}\right] * \left[\sum(Y^2) - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{N}\right]}}$$

EXEMPLO

Uma fonoaudiologa mediu a pressão e área no esofogo para uma avaliação. As medidas estão correlacionadas?

Pressão	2	5	8	10	20	25
Area	5	8	9	12	14	15

$$r = \frac{\sum(XY) - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{\sqrt{\left[\sum(X^2) - \frac{\left(\sum X\right)^2}{N}\right] * \left[\sum(Y^2) - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{N}\right]}}$$

Atenção: Temos que ter normalidade em ambas as variáveis!
Veja o qqnorm e o qqline no R

Associação

- Agora temos variáveis qualitativas e desejamos saber sobre a independencias

Estatura\Sexo	Fem	Mas
Baixa	11	7
Mediana	14	25
Alta	7	15

$$X^2 = \sum_{i=1}^{rc} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Associação

- Agora temos variáveis qualitativas e desejamos saber sobre a independencias

Observado

Estatura\Sexo	Fem	Mas	soma
Baixa	11	7	18
Mediana	14	25	39
Alta	7	15	22
soma	32	47	79

Esperado

Estatura\Sexo	Fem	Mas
Baixa	7,291	10,799
Media	15,797	23,202
Alta	8,911	13,89

$$\mathrm{X}^2 = \sum_{i=1}^{rc} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(11-7,291)^2}{7,291} + \frac{(7-10,799)^2}{10,799} + \ldots \quad 4,204$$

Agora o procedimento é equivalente aos outros testes.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P**. Estatística básica.** 4 ed. São Paulo, Atual, 1987.

PAGANO, M. e GAUVREAU, K. Princípios de Bioestatística - Tradução da 2ª Edição Norte Americana, Pioneira Thonpson Learning, São Paulo, SP,2004.

MEDRONHO R; CARVALHO DM; BlOCH KV; LUIZ RR; WERNECK GL. Epidemiologia.
Atheneu, 2 ed. São Paulo, 2008

ROSNER, B.Fundamentos de bioestatistica**.** 8ª Edição Norte Americana, Cengage Learning, 2016.