**EAE 5706: Microeconomia II**
Departamento de Economia − FEA/USP
Lista de Exercícios − Teoria dos Jogos
*Respostas*

**Lista 5, Exercício 1.** Considere as seguintes estratégias totalmente mistas para os jogadores 1 e 2: o jogador 1 escolhe $E$ com probabilidade $\varepsilon_1$ e o jogador 2 escolhe $B$ com probabilidade $\varepsilon_2$, onde $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$ são números reais positivos "pequenos". Seja $\mu$ a crença do jogador 3 associada ao nodo esquerdo do seu conjunto de informação. Dadas essas estratégias totalmente mistas, pela regra de Bayes, devemos ter que:

$$\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2} = 1 - \varepsilon_2$$

Note que quando $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$, a estratégia do jogador 1 converge para a escolha de $X$ com probabilidade 1 e a estratégia do jogador 2 converge para a escolha de $T$ com probabilidade 1. Neste caso, temos que:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$$

Portanto, as crenças representadas na figura não são consistentes com a definição de equilíbrio sequencial.

**Lista 5, Exercício 2.** Considere as seguintes estratégias totalmente mistas para os jogadores 3 e 1: o jogador 3 escolhe $a$ com probabilidade $\varepsilon_3$ e o jogador 1 escolhe $In$ com probabilidade $\varepsilon_1$, onde $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_3$ são números reais positivos "pequenos". Seja $\mu$ a crença do jogador 2 associada ao nodo esquerdo do seu conjunto de informação. Dadas essas estratégias totalmente mistas, pela regra de Bayes, devemos ter que:

$$\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 \varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_3) \varepsilon_1} = \varepsilon_3$$

Note que quando $\varepsilon_3 \to 0$ e $\varepsilon_1 \to 0$, a estratégia do jogador 3 converge para a escolha de $b$ com probabilidade 1 e a estratégia do jogador 1 converge para a escolha de $Out$ com probabilidade 1. Neste caso, temos que:

$$\lim_{\varepsilon_3 \to 0} \mu(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = 0$$

Portanto, as crenças descritas no enunciado não são consistentes com a definição de equilíbrio sequencial.

**Lista 5, Exercício 3.** Considere as seguintes estratégias totalmente mistas para os jogadores 1 e 2: o jogador 1 escolhe $t$ com probabilidade $\varepsilon_1$ e o jogador 2 escolhe $u$ com probabilidade $\varepsilon_2$, onde $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$ são números reais positivos "pequenos". Seja $\mu$ a crença do jogador 3 associada ao nodo superior do seu conjunto de informação. Dadas essas estratégias totalmente mistas, pela regra de Bayes, devemos ter que:

$$\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1)\varepsilon_2}$$

Neste caso, a questão consiste em determinar se é possível encontrar sequências convergentes $\left\{\varepsilon_1^k\right\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ e $\left\{\varepsilon_2^k\right\}_{k=1}^{\infty} \to 0$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu^k = \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_1^k}{\varepsilon_1^k + \left(1 - \varepsilon_1^k\right)\varepsilon_2^k} = \frac{1}{3}$$

Considere, então, as seguintes sequências $\varepsilon_1^k = \frac{1}{3k}$ e $\varepsilon_2^k = \frac{2}{3k-1}$.[1] Neste caso, pela regra de Bayes, temos:

$$\begin{aligned}
\mu^k &= \frac{\frac{1}{3k}}{\frac{1}{3k} + \left(1 - \frac{1}{3k}\right)\frac{2}{3k-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{3k}}{\frac{1}{3k} + \frac{3k-1}{3k}\frac{2}{3k-1}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Note que essas sequências de estratégias e crenças convergem para o perfil de estratégias e crenças desejadas. Além disso, é possível mostrar que dadas as crenças e as estratégias dos demais jogadores, nenhum jogador possui incentivo para desviar. Assim, segue que o par de estratégias e crenças $(b, d, r)$ e $\mu = \frac{1}{3}$ constitui um equilíbrio sequencial.

**Lista 6, Exercício 9.** O equilíbrio perfeito de subjogo é caracterizado pelas seguintes estratégias:

$$q_1^* = 45$$

e

$$q_2^*(q_1) = q_3^*(q_1) = \frac{90 - q_1}{3}$$

Assim, as quantidades de equilíbrio são dadas por:

$$q_1^* = 45$$

e

$$q_2^* = q_3^* = 15$$

O preço de equilíbrio é:

$$p^* = 25$$

[1] Essas sequências devem ser encontradas por "tentativa e erro". Note que existem várias outras sequências para as quais o argumento abaixo também funcionaria.

**Lista 7, Exercício 4.** Rever os conceitos de payoffs factíveis e individualmente racionais (vide notas das aulas 13 e 14). Observe que, neste caso, os payoffs de minmax dos jogadores são:

$$\underline{\underline{v}}_1 = 0$$

e

$$\underline{\underline{v}}_2 = 1$$

**Lista 7, Exercício 5.**

*a.* Observe que $C$ e $c$ são as únicas estratégias racionalizáveis, de forma que $(C, c)$ é o único equilíbrio de Nash. Portanto, o único equilíbrio perfeito de subjogo da versão finitamente repetida do jogo consiste em um perfil de estratégias $(C, c)$ para todo período $t$ e história $h^t$.

*b.* A estratégia de "Nash reversion" é a seguinte: $(i)$ jogar $(B, b)$ no primeiro período; $(ii)$ em qualquer período subsequente, jogar $(B, b)$ se a história for tal que nenhum jogador tenha desviado anteriormente; caso contrário, jogar $(C, c)$. Neste caso, $(B, b)$ pode ser sustentado em equilíbrio se, e somente se:

$$\frac{9}{1-\delta} \geq 11 + \delta \frac{\delta}{1-\delta} \;\Rightarrow\; \delta \geq \frac{1}{3}$$

*c.* Não, o payoff $(10, 10)$ não pertence ao conjunto de payoffs factíveis.