

SISTEMAS DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS LINEARES

Teorema:

Considere o seguinte sistema de k equações a diferenças lineares de primeira ordem, homogêneo:

$$\begin{aligned}x_t^1 &= a_{11}x_{t-1}^1 + a_{12}x_{t-1}^2 + \dots + a_{1k}x_{t-1}^k \\x_t^2 &= a_{21}x_{t-1}^1 + a_{22}x_{t-1}^2 + \dots + a_{2k}x_{t-1}^k \\&\vdots \\x_t^k &= a_{k1}x_{t-1}^1 + a_{k2}x_{t-1}^2 + \dots + a_{kk}x_{t-1}^k\end{aligned}$$

ou em termos matriciais

$$X_t = AX_{t-1}$$

Se a matriz A dos coeficientes desse sistema possui k autovalores reais distintos, com respectivos autovetores $v^1, v^2, \dots, v^k$, então a solução desse sistema de equações é dada por:

$$X_t = c_1 r_1^t v^1 + c_2 r_2^t v^2 + \dots + c_k r_k^t v^k$$

onde $C_1, C_2, \dots, C_k$ são constantes arbitrárias.

Sistema de Equações Lineares com Autovalores Complexos

Considere o seguinte sistema de 2 equações a diferenças lineares de primeira ordem, homogêneo:

$$x_t^1 = a_{11} x_{t-1}^1 + a_{12} x_{t-1}^2$$

$$x_t^2 = a_{21} x_{t-1}^1 + a_{22} x_{t-1}^2$$

ou em termos matriciais

$$X_t = AX_{t-1}$$

Considere também que a matriz dos coeficientes A possui dois autovalores complexos $\alpha \pm \beta i$ com respectivos autovetores complexos $u \pm vi$, onde u e v são matrizes de ordem (2×1) com elementos que são números reais.

Calculando-se a partir dos autovalores reais:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad e \quad (\cos \omega, \sin \omega) = \left(\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r} \right)$$

Tem-se que a solução do sistema de equações a diferenças lineares e homogêneo é dado por

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} = r^t \left[(c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)) u - (c_2 \cos(\omega t) + c_1 \sin(\omega t)) w \right]$$

u e w são matrizes de ordem (2x1) associados aos autovetores complexos correspondentes $v = u \pm wi$

Sistema de Equações a Diferenças de 1ª ordem em Geral

Considere o seguinte sistema geral de k equações a diferenças lineares de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_t^1 &= a_{11} x_{t-1}^1 + a_{12} x_{t-1}^2 + \dots + a_{1k} x_{t-1}^k + g_1(t) \\ x_t^2 &= a_{21} x_{t-1}^1 + a_{22} x_{t-1}^2 + \dots + a_{2k} x_{t-1}^k + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_t^k &= a_{k1} x_{t-1}^1 + a_{k2} x_{t-1}^2 + \dots + a_{kk} x_{t-1}^k + g_k(t) \end{aligned}$$

ou em termos matriciais

$$X_t = A X_{t-1} + G_t$$

onde

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^1 \\ \vdots \\ x_t^1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}; \quad G_t = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_k(t) \end{bmatrix}$$

e $g_i(t)$, para $i = 1, 2, \dots, k$, são todas funções conhecidas e com mesma especificação funcional. Por exemplo, todas são funções constantes, ou funções lineares ou funções exponenciais, etc.

Método Geral de Solução de Sistemas:

Da mesma forma que no caso das equações a diferenças isoladas, a solução geral daquele sistema é dada pela soma da solução geral do seu sistema de equações homogêneo correspondente:

$$X_t = AX_{t-1}$$

denominado de $x_c(t)$ (solução complementar), mais a solução particular do sistema original analisado $x_p(t)$. Ou seja:

$$X_t(t) = X_c(t) + X_p(t)$$

Obs.: como no caso da solução de equações a diferenças lineares isoladas, a forma de obtenção da solução particular $X_p(t)$ vai depender da especificação das funções $g_i(t)$.

Exemplos de Sistema de Equações Lineares a Diferenças

Exemplo 23.21 do Livro de Simon e Blume:

Considere que a população de um dado país, classificada em Urbana, Suburbana e Rural, apresenta, em média, os seguintes movimentos anuais migratórios internos:

- Das famílias urbanas, 20% mudam para áreas suburbanas e 5% para áreas rurais;
- Das famílias suburbanas, 2% mudam para áreas urbanas e 8% para áreas rurais;
- Das famílias rurais, 10% mudam para áreas urbanas e 20% para áreas suburbanas.

ou

$$U_t = 0,75U_{t-1} + 0,02S_{t-1} + 0,10R_{t-1}$$

$$S_t = 0,20U_{t-1} + 0,90S_{t-1} + 0,20R_{t-1}$$

$$R_t = 0,05U_{t-1} + 0,08S_{t-1} + 0,70R_{t-1}$$

ou

$$\begin{pmatrix} U_t \\ S_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,02 & 0,10 \\ 0,20 & 0,90 & 0,20 \\ 0,05 & 0,08 & 0,70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{t-1} \\ S_{t-1} \\ R_{t-1} \end{pmatrix}$$

Essa matriz de Markov apresenta os autovalores e autovetores:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 0,70 \\ r_3 &= 0,65 \end{aligned} \quad ; \quad v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solução Geral:

$$\begin{pmatrix} U_t \\ S_t \\ R_t \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} (1)^t + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} (0,7)^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (0,65)^t$$

Solução Estacionária: (para $t \rightarrow \infty$)

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_t \\ \bar{S}_t \\ \bar{R}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 10c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{15} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{U}_t \\ \bar{S}_t \\ \bar{R}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,133 \\ 0,667 \\ 0,200 \end{pmatrix}$$

Determinação de c_2 e c_3 , a partir de dadas condições iniciais:

Dado

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ S_0 \\ R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,10 \\ 0,30 \end{pmatrix}$$

Podemos determinar:

$$\begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,10 \\ 0,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,133 \\ 0,677 \\ 0,200 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_2 = 0,11 \text{ e } c_3 = -0,44$$

Portanto, tem-se então que a solução específica do sistema analisado é dado por:

$$\begin{pmatrix} U_t \\ S_t \\ R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,133 \\ 0,667 \\ 0,200 \end{pmatrix} + 0,11 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} (0,7)^t - 0,44 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (0,65)^t$$

ou

$$\begin{aligned} U_t &= 0,133 + 0,88(0,7)^t - 0,44(0,65)^t \\ S_t &= 0,667 - 0,55(0,7)^t \\ R_t &= 0,20 - 0,33(0,7)^t + 0,44(0,65)^t \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Sistema não Homogêneo

$$x_t^1 = x_{t-1}^1 + x_{t-1}^2 + 5$$

$$x_t^2 = -9x_{t-1}^1 + x_{t-1}^2 + 18$$

Em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1}^1 \\ x_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Começando pela obtenção da solução particular, como as funções

$g_1(t)$ e $g_2(t)$ são constantes, vamos propor como soluções as

funções constantes $x_p^1(t) = b_1$ e $x_p^2(t) = b_2$.

Substituindo no sistema analisado temos:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$$

ou

$$b_1 = b_1 + b_2 + 5 \quad \text{ou} \quad b_2 = -5$$

$$b_2 = -9b_1 + b_2 + 18 \quad \text{ou} \quad b_1 = 2$$

Logo, a solução particular do sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_p^1(t) \\ x_p^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Cálculo da solução complementar, relativa ao sistema homogêneo correspondente:

$$\begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1}^1 \\ x_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

Essa matriz dos coeficientes apresenta as seguintes duas raízes complexas: $r_1 = 1 + 3i$ e $r_2 = 1 - 3i$.

Vamos calcular o autovetor correspondente à raiz $r_1 = 1 + 3i$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = (1 + 3i) \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} v_1^1 + v_2^1 &= (1 + 3i)v_1^1 \quad \text{ou} \quad -3iv_1^1 + v_2^1 = 0 \\ -9v_1^1 + v_2^1 &= (1 + 3i)v_2^1 \quad \text{ou} \quad -9v_1^1 - 3iv_2^1 = 0 \end{aligned}$$

Embora não seja fácil de perceber, uma dessas equações é redundante, pois é múltipla da outra: $e_2 = (-3i)e_1$. Portanto existem infinitas soluções para o autovetor procurado. Vamos tomar na equação 1, por exemplo, $v_1^1 = 1$, que resulta em $v_2^1 = 3i$. O autovetor correspondente é dado por

$$v^1 = \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} i \quad \text{ou} \quad v^1 = u + wi$$

Sabe-se que o outro autovetor correspondente à outra raiz complexa conjugada é dado pelo autovetor conjugado $\mathbf{v}^2 = \mathbf{u} - w\mathbf{i}$.

Agora, com base nas raízes complexas encontradas, temos que

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \quad \text{e} \quad (\cos \omega, \sin \omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

O que resulta num ângulo de $\omega = 71,565^\circ$ ou $\omega = 1,249$ radianos.

Portanto, a solução complementar encontrada é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_c^1(t) \\ x_c^2(t) \end{bmatrix} = (\sqrt{10})^t \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \cos(1,249.t) - c_2 \sin(1,249.t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \cos(1,249.t) + c_2 \sin(1,249.t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Finalmente, tem-se então que a solução geral do sistema analisado é dado pela simples soma das soluções complementar e particular, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c^1(t) \\ x_c^2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_p^1(t) \\ x_p^2(t) \end{bmatrix}$$

o que, em termos algébricos usuais, resulta em:

$$x^1(t) = (\sqrt{10})^t [c_1 \cos(1,249.t) - c_2 \sin(1,249.t)] + 2$$

$$x^2(t) = (\sqrt{10})^t (-3) [c_1 \cos(1,249.t) + c_2 \sin(1,249.t)] - 5$$



Fim

