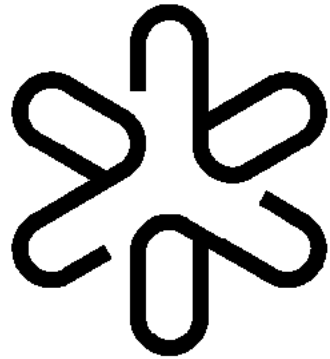




**Universidade de São Paulo
Instituto de Física**

FÍSICA MODERNA I

AULA 18

**Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 220
rizzutto@if.usp.br**

2o. Semestre de 2017

Página do curso:

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=53869>

11/10/2017

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Para ter sentido físico a função de onda vinculada a sua densidade de probabilidade, devemos impor algumas condições

- **As funções de onda e sua primeira derivada**, para serem soluções aceitáveis precisam:
 - **Ser finita** $\psi(x) \rightarrow 0; x \rightarrow \pm\infty$
partícula tem que ter ser movimento em uma região do espaço
 - **Ser unívoca** (a função de onda não pode ter múltiplos valores)
 - **Se contínua** (pois se temos funções descontínuas as derivadas serão infinitas nos pontos de descontinuidade)
- Essas condições são necessárias para que as funções de onda representem os observáveis de maneira adequada

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t) \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

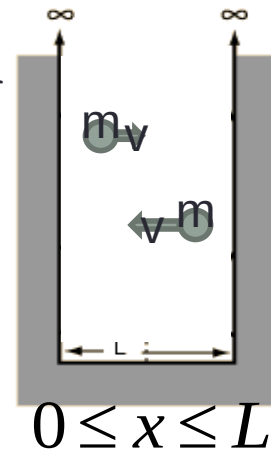
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Função de onda de uma partícula em uma caixa

Dentro da caixa $V(x) = 0$, fora $V(x) = \infty$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$



A equação de onda que satisfaz esta a eq. De Schrödinger pode ser:

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

- 1) É contínua e possui derivada primeira contínua $\frac{d\psi(x)}{dx} = ikAe^{ikx}$
- 2) Problema: essa função de onda não satisfaz as condições de contorno em que a função deve ser zero em $x=0$ e $x=L$

$$x = 0 \Rightarrow \psi(0) = Ae^0 = A$$

$$x = L \Rightarrow \psi(L) = Ae^{ikL}$$

Só será zero se $A=0$, aí a função de onda seria zero e não existiria nenhuma partícula

Para sair disto precisamos lembrar que para um estado estacionário podemos ter uma superposição de ondas :

$$\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

Partícula dentro da caixa $0 \leq x \leq L$ $\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$

$$\psi(x) = A_1 [\cos(kx + i \operatorname{sen} kx)] + A_2 [\cos(-kx) + i \operatorname{sen}(-kx)]$$

$$\psi(x) = A_1 [\cos(kx + i \operatorname{sen} kx)] + A_2 [\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)]$$

$$\psi(x) = (A_1 + A_2) \cos kx + i(A_1 - A_2) \operatorname{sen} kx$$

$$x = 0 \Rightarrow \psi(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$A_1 = -A_2$$

$$\psi(x) = 2iA_1 \operatorname{sen} kx = C \operatorname{sen} kx$$

$$\psi(0) = 0$$

$$x = L \quad kL = n\pi$$

A função de onda de estados estacionários para a partícula dentro da caixa

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Os níveis de energia:

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em uma caixa $V(x) = 0$ (poço infinito)”

Exemplo seria uma molécula

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2/a} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

para $n=1,3,5,\dots$

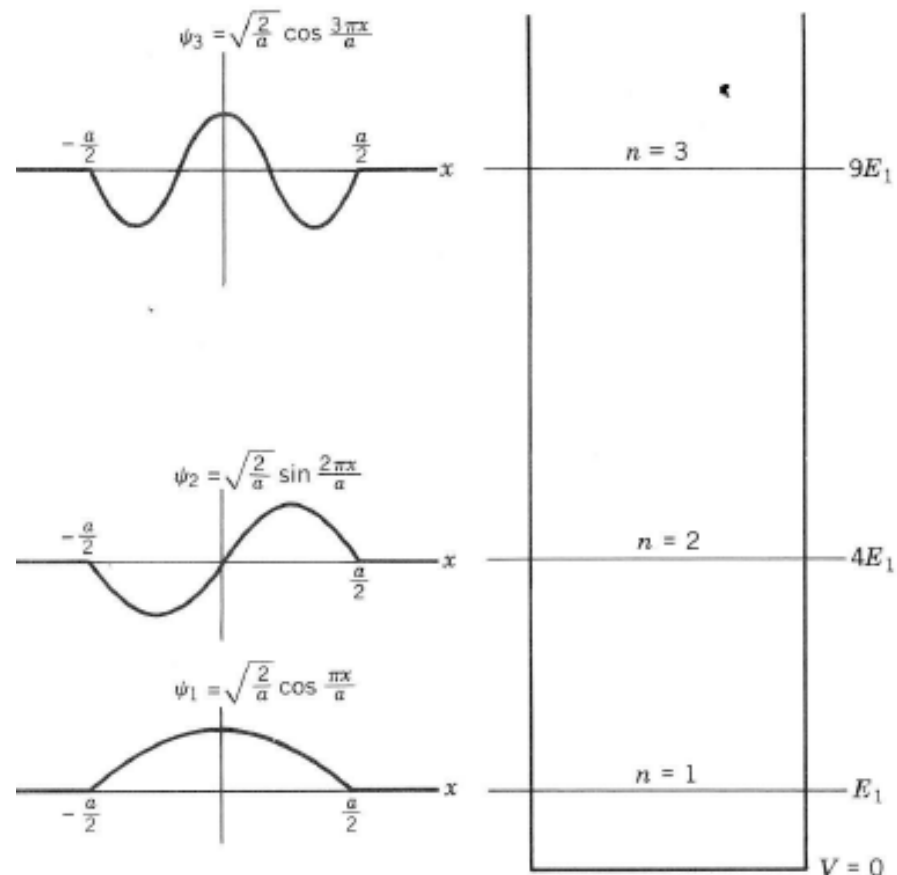
$$\psi(x) = \sqrt{2/a} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

para $n=2,4,6,\dots$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

para $n=1,2,3,4,\dots$

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

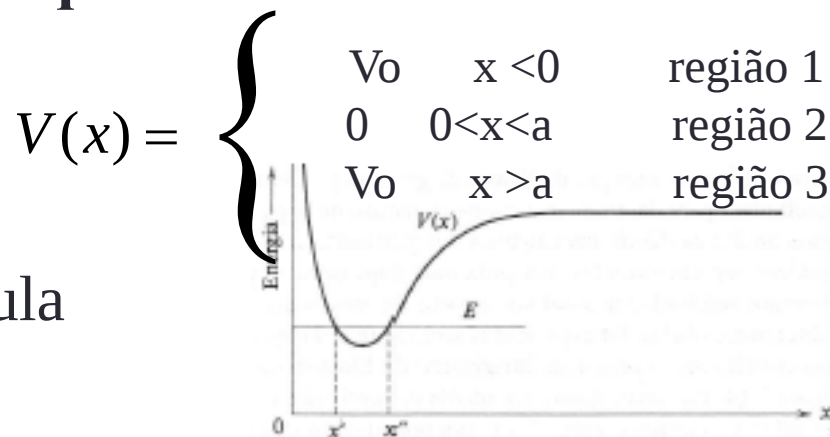


A menor energia possível não é zero!

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em um poço finito quadrado

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x)$$



- Potencial representaria uma partícula presa (chamado estado ligado):
 - nêutron em um estado ligado no núcleo
 - Elétron em um átomo e que pode se desprender (átomo ionizado)

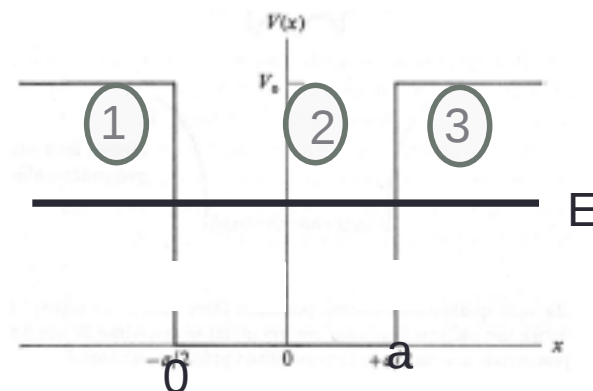
Região 1 e 3

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = k_1^2\psi(x)$$

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} + Be^{-k_1x}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{k_1x} + Ge^{-k_1x}$$



$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

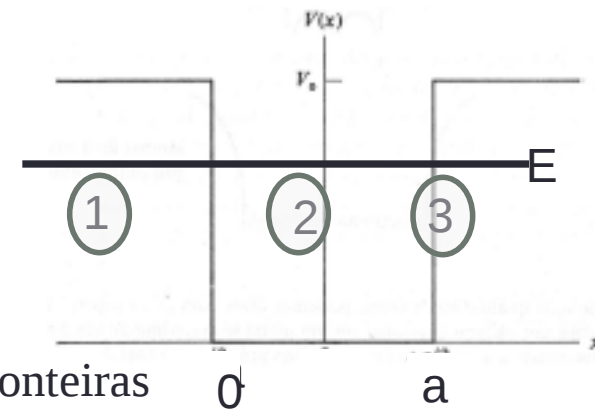
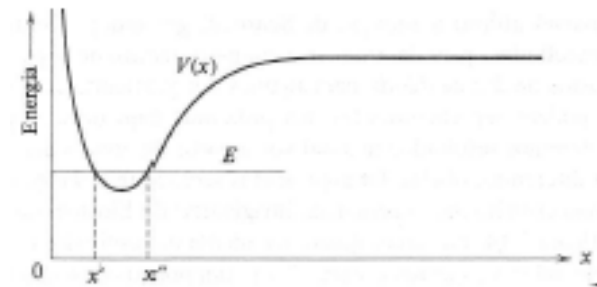
“Partícula presa em um poço finito quadrado”

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 & \text{região 1} \\ 0 & 0 < x < a & \text{região 2} \\ V_0 & x > a & \text{região 3} \end{cases}$$

Região 2 – dentro do poço

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) \quad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C \sin k_2 x + D \cos k_2 x$$



Aqui não conseguimos exigir que a função de onda se anule nas fronteiras

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1 x} + Be^{-k_1 x} \quad \psi_3(x) = Fe^{k_1 x} + Ge^{-k_1 x}$$

1) **Condição de finitude**

$$x \rightarrow \infty, \psi(x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty, \psi(x) \rightarrow 0$$

$$F=0$$

$$B=0$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

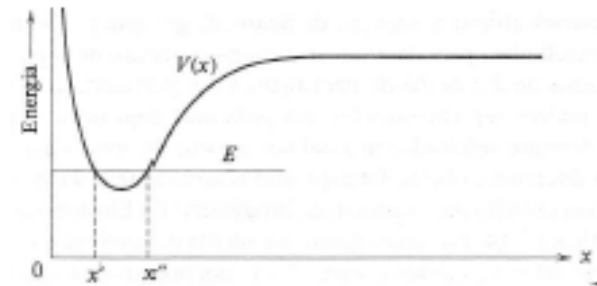
“Partícula presa em um poço finito quadrado”

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1x} \quad \text{Região 3}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C\sin k_2x + D\cos k_2x \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



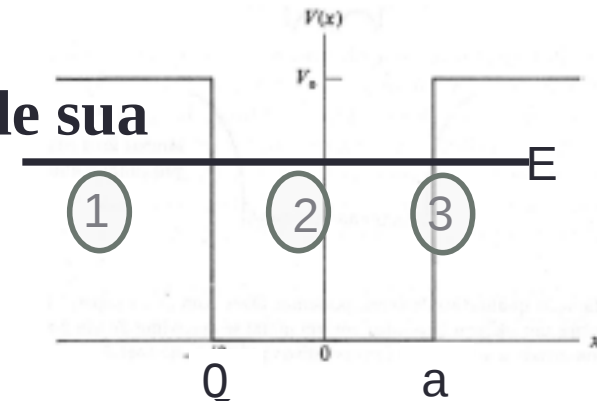
2) Condição de continuidade a função e de sua derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$\psi_{2(x=a)} = \psi_{3(x=a)}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{2(x=a)} = \frac{d}{dx}\psi_{3(x=a)}$$



Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em um poço finito quadrado”

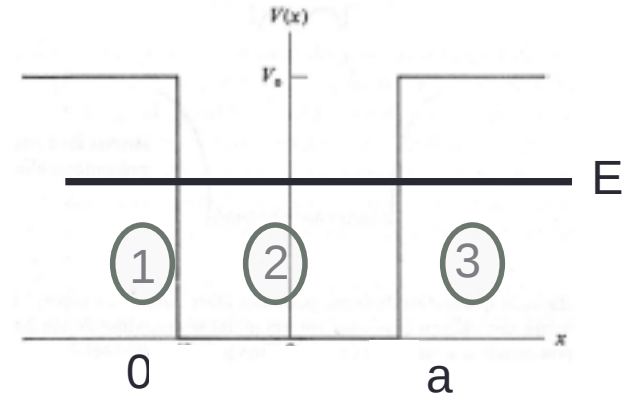
$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1x} \quad \text{Região 3}$$

$$\psi_2(x) = C\sin k_2x + D\cos k_2x \quad \text{Região 2}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



2) Condição de continuidade a função

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 = C\sin 0 + D\cos 0$$

$$A = D$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$k_1A = Ck_2\cos 0 - Dk_2\sin 0$$

$$k_1A = Ck_2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{C}{D}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

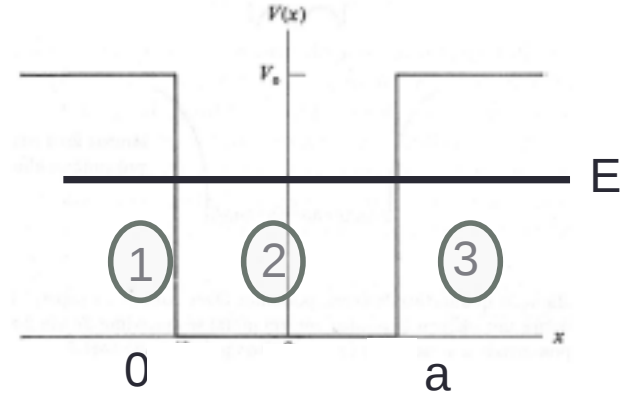
“Partícula presa em um poço finito quadrado

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1x} \quad \text{Região 3}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C\sin k_2x + D\cos k_2x \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$



2) Condição de continuidade da derivada da função

$$\psi_{2(x=a)} = \psi_{3(x=a)}$$

$$C\sin k_2a + D\cos k_2a = Ge^{-k_1a}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_{2(x=a)} = \frac{d}{dx}\psi_{3(x=a)}$$

$$Ck_2 \cos k_2a - Dk_2 \sin k_2a = -k_1 Ge^{-k_1a}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

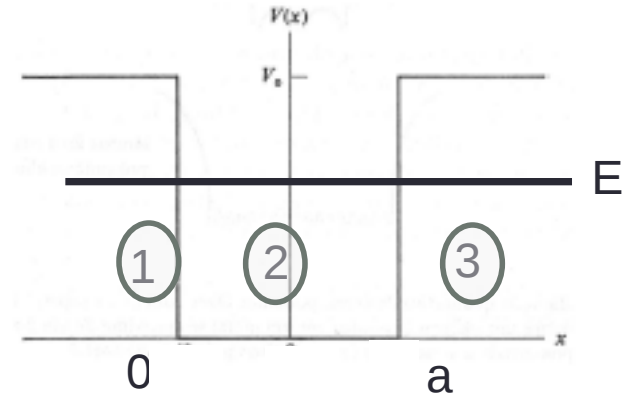
“Partícula presa em um poço finito quadrado

$$\psi_1(x) = Ae^{k_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_3(x) = Ge^{-k_1x} \quad \text{Região 3}$$

$$\psi_2(x) = C\sin k_2x + D\cos k_2x \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$



$$A = D$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{C}{D}$$

$$\textcircled{1} C\sin k_2a + D\cos k_2a = Ge^{-k_1a}$$

$$\textcircled{2} Ck_2 \cos k_2a - Dk_2 \sin k_2a = -k_1Ge^{-k_1a}$$

○ ○ Dividindo 2 por 1

$$\frac{Ck_2 \cos k_2a - Dk_2 \sin k_2a}{C\sin k_2a + D\cos k_2a} = \frac{-k_1Ge^{-k_1a}}{Ge^{-k_1a}} = \frac{\cancel{D}\frac{k_1}{k_2}\cos k_2a - \cancel{D}k_2\sin k_2a}{\cancel{D}\frac{k_1}{k_2}\sin k_2a + \cancel{D}\cos k_2a} = -k_1$$

$$x \left(\frac{1}{k_2} \right) \frac{\frac{k_1}{k_2} \cancel{D} \cos k_2 a - \cancel{D} k_2 \sin k_2 a}{\frac{k_1}{k_2} \cancel{D} \sin k_2 a + \cancel{D} \cos k_2 a} = -k_1$$

$$\frac{\frac{k_1}{k_2} \cos k_2 a - \sin k_2 a}{\frac{k_1}{k_2} \sin k_2 a + \cos k_2 a} = -\frac{k_1}{k_2}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$-\frac{k_1}{k_2} = -\sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

Isto está relacionado à profundidade do poço (V_0) e com a largura do poço (a)

E esta relação só pode ser satisfeita para certos valores de E .

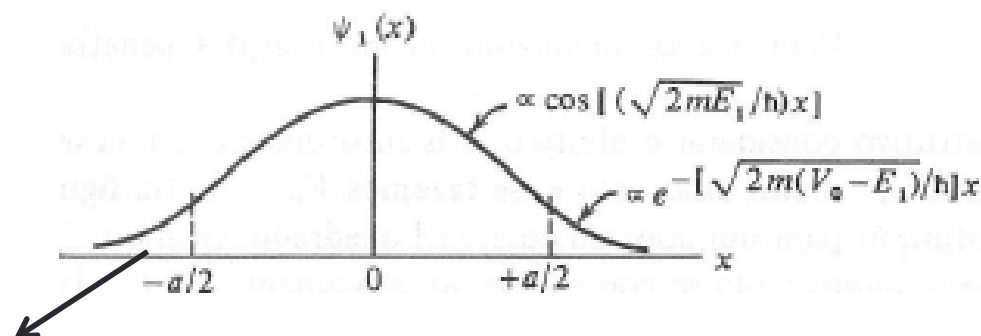
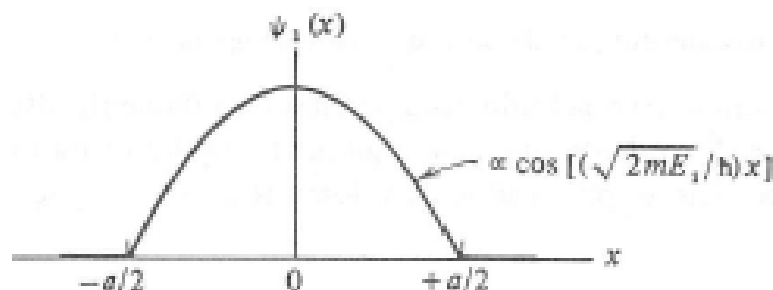
A solução não pode ser resolvida explicitamente para E .

Deve ser obtida pelo método geométrico.

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Partícula presa em um poço quadrado”

Comparando o primeiro estado do sistema do poço infinito com o poço finito



O fato da função de onda não ser zero nas paredes aumenta o comprimento de onda de De Broglie na parede (em comparação com o poço infinito), e isto torna menor a energia e o momento da partícula. Esta observação pode ser usada para aproximar as energias permitidas para a partícula ligada. A função de onda penetra na região exterior, numa escala de comprimento definido pela **profundidade de penetração** δ dado por:

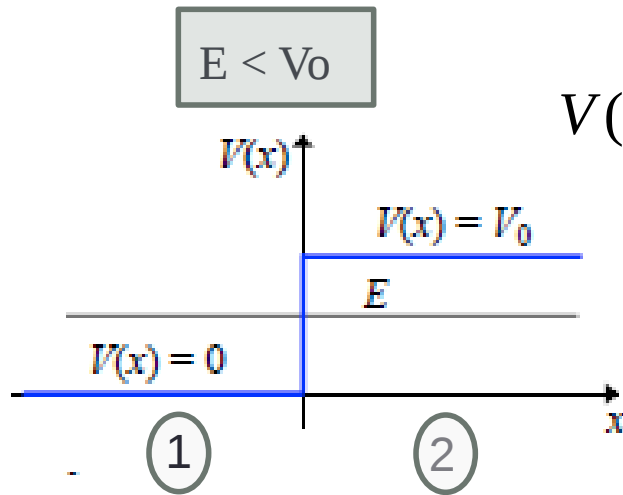
$$\delta = \frac{1}{k_1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

A função de onda no exterior é essencialmente zero além da distância δ , em ambos os lados do poço de potencial

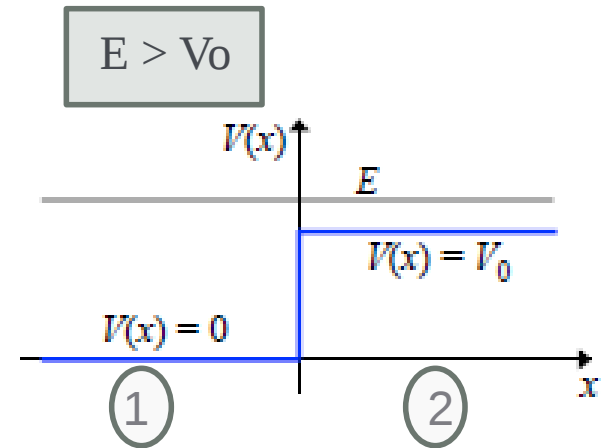
$$E_n \approx \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(L + 2\delta)^2}$$

Energia da partícula ligada no poço finito

“Potencial Degrau”



$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



1) Caso $E < V_0$

Região 1 $x < 0$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

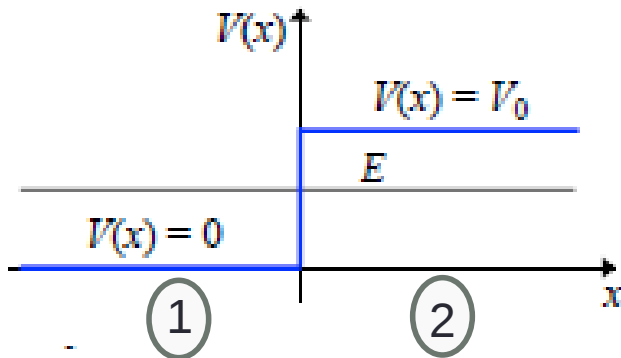
$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Solução da partícula livre}$$

Região 2 $x > 0$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi(x)$$

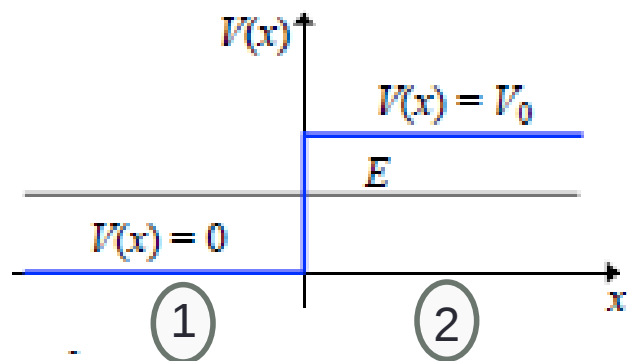
$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x}$$



Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$x \rightarrow \infty, \psi(x) \rightarrow 0$$

1) Condição de finitude

$x > 0$ região 2

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}$$

$$D=0$$

2) Condição de continuidade a função e da derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 + Be^0 = C$$

$$A + B = C$$

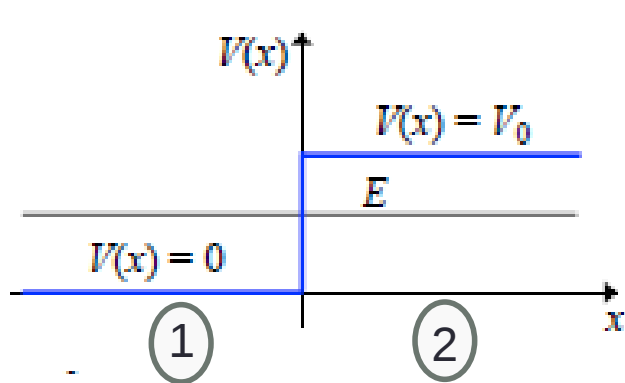
$$\frac{d}{dx}\psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx}\psi_{2(x=0)}$$

$$Aik_1e^0 - Bik_1e^0 = -Ck_2e^0$$

$$A - B = i \frac{k_2}{k_1} C$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$A + B = C \quad (1)$$

$$A - B = i \frac{k_2}{k_1} C \quad (2)$$

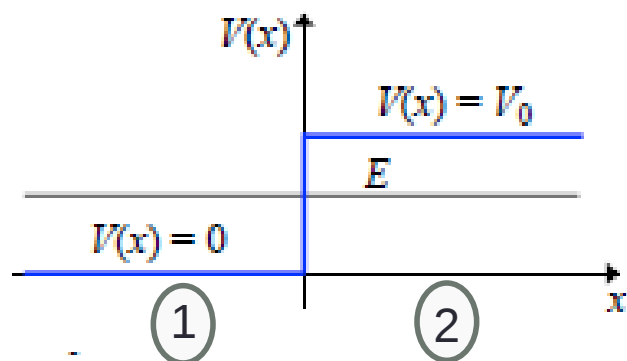
$$(1) + (2) \quad A = \frac{C}{2} \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right)$$

$$(2) - (1) \quad B = \frac{C}{2} \left(1 - i \frac{k_2}{k_1} \right)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{ik_1x} + \frac{C}{2} \left(1 - i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : } x < 0 \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



Coeficiente de Reflexão:

O fluxo de partículas na direção da onda, ou seja número de partículas que atravessam, uma certa posição por unidade de tempo é dado por

$\psi^*(x) \cdot \psi(x)$ vezes a velocidade das partículas

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$R = \frac{v_r \psi_r^* \psi_r}{v_i \psi_i^* \psi_i}$$

$$R = \frac{B^* B}{A^* A} \quad v_r = v_i$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} \quad \text{Região 2}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{ik_1x} + \frac{C}{2} \left(1 - i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : } x < 0 \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

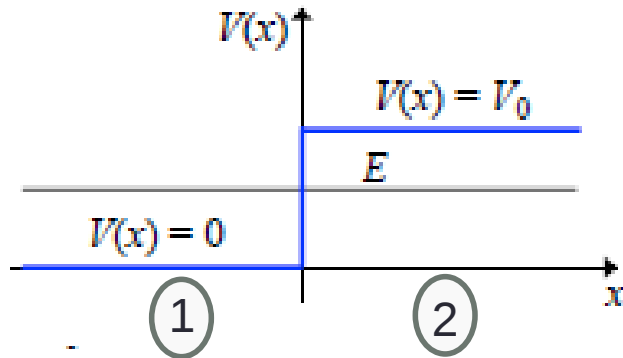
Região 1 : $x < 0$

$$\boxed{R = 1}$$

De pleno acordo com a mecânica clássica para $x < 0$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



Coeficiente de Reflexão:

O fluxo de partículas na direção da onda, ou seja número de partículas que atravessam, uma certa posição por unidade de tempo é dado por

$$\psi^*(x) \cdot \psi(x)$$

$$\psi^*(x) \cdot \psi(x) = C^* C e^{-2k_2 x}$$

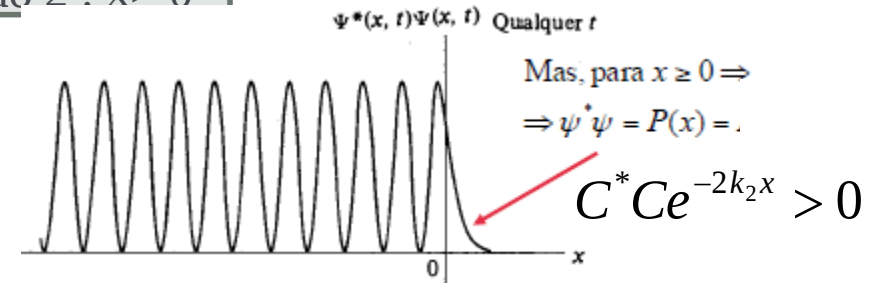
$$\psi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$

Região 1

Região 2 : $x > 0$

$$\psi_2(x) = C e^{-k_2 x}$$

Região 2



Nesta região temos $E < V_0$ e portanto energia cinética seria negativa

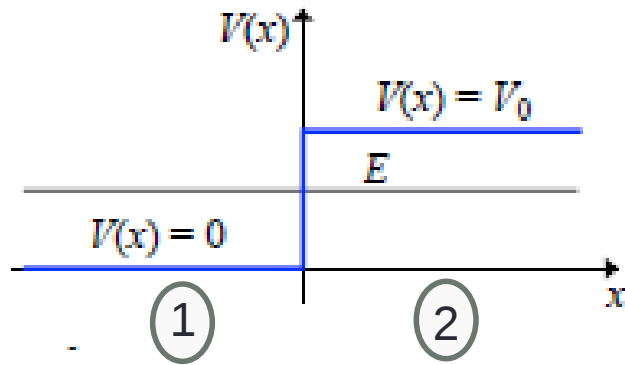
- classicamente esta é uma região proibida para as partículas
- Quanticamente pode-se encontrar a partícula nesta região, sendo que cada vez menos provável encontrar a partícula com o aumento de x .
- A penetração da partícula na região proibida (por intervalo muito pequenos) é possível devido ao princípio de incerteza
- A profundidade de penetração é pequena



$$\delta = \frac{1}{k_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} \quad \text{Região 2}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{C}{2} \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{ik_1x} + \frac{C}{2} \left(1 - i \frac{k_2}{k_1} \right) e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : } x < 0 \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{C}{2} \left(\alpha (\cos k_1x + i \operatorname{sen} k_1x) + \alpha^* (\cos k_1x - i \operatorname{sen} k_1x) \right)$$

$$C \left(\cos k_1x - \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sen} k_1x \right)$$

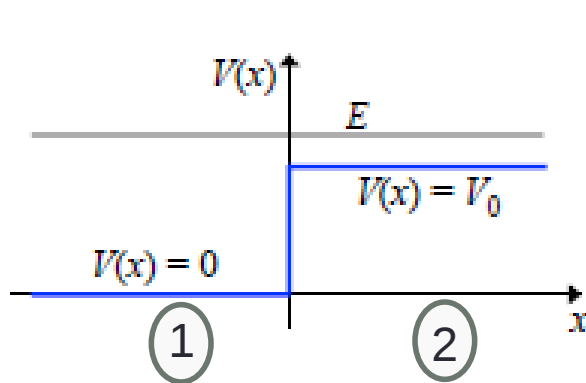
$$\alpha = \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right)$$

$$e^{ik_1x} = \cos k_1x + i \operatorname{sen} k_1x$$

$$\psi(x) = \begin{cases} C \cos k_1x - C \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sen} k_1x & \text{Região 1 : } x < 0 \\ Ce^{-k_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

1) Condição de finitude $x \rightarrow \infty, \psi(x) \rightarrow 0$
 $x > 0$ região 2

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x}$$

D=0 A onda não volta

2) Condição de continuidade a função e da derivada

$$\psi_{1(x=0)} = \psi_{2(x=0)}$$

$$Ae^0 + Be^0 = C$$

$$A + B = C$$

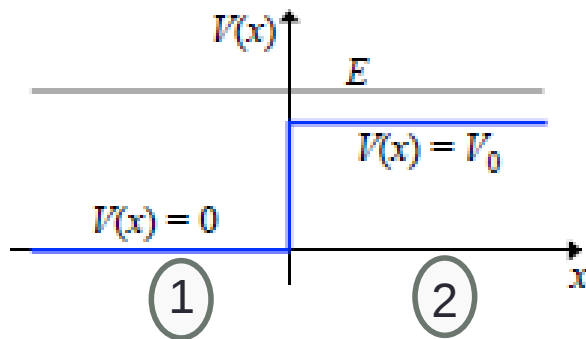
$$\frac{d}{dx} \psi_{1(x=0)} = \frac{d}{dx} \psi_{2(x=0)}$$

$$Aik_1e^0 - Bik_1e^0 = Cik_2e^0$$

$$A - B = \frac{k_2}{k_1} C$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\textcircled{1} \longrightarrow \textcircled{2} \quad \frac{k_2}{k_1}(A + B) = A - B$$

$$A + B = C \quad \textcircled{1}$$

$$A - B = \frac{k_2}{k_1}C \quad \textcircled{2}$$

$$k_2(A + B) = k_1(A - B)$$

$$(k_1 + k_2)B = (k_1 - k_2)A$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A$$

Substituindo em 1

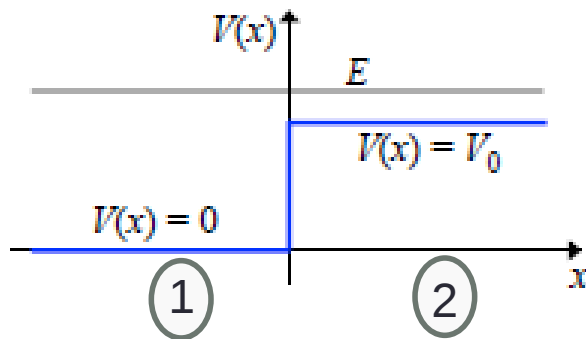
$$\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} + 1\right)A = C$$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + A\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : } x < 0 \\ A\frac{2k_1}{k_1 + k_2}e^{ik_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”

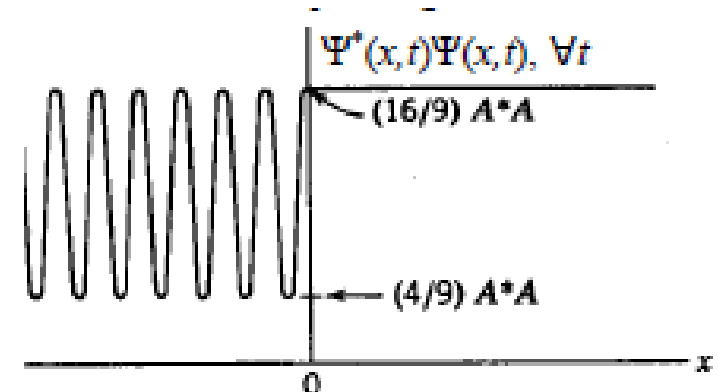


$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1} \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{Região 2} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

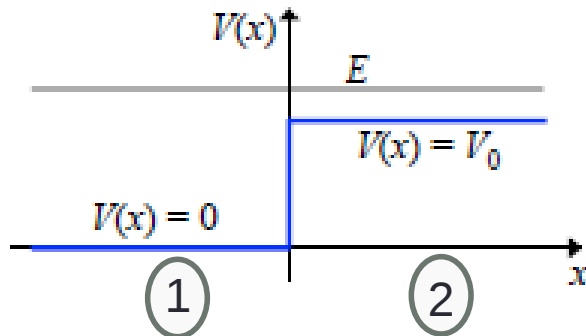
$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + A \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) e^{-ik_1x} & \text{Região 1 : } x < 0 \\ A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{ik_2x} & \text{Região 2 : } x > 0 \end{cases}$$

Caso de $k_1 = 2k_2$



Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”



Coeficiente de Reflexão e Transmissão:

Vamos definir fluxo de probabilidade (j)

$$j_{\text{incidente}} = v_{\text{inc}} A^* A$$

$$j_{\text{refletido}} = v_{\text{ref}} B^* B$$

$$j_{\text{transmitido}} = v_{\text{tran}} C^* C$$

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{Região 1}$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{Região 2}$$

reflexão:

$$R = \frac{j_{\text{refletido}}}{j_{\text{incidente}}} = \frac{v_{\text{ref}} B^* B}{v_{\text{inc}} A^* A}$$

$$v_{\text{inc}} = \frac{p_{\text{inc}}}{m} = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$v_{\text{ref}} = \frac{p_{\text{ref}}}{m} = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$v_{\text{trans}} = \frac{p_{\text{trans}}}{m} = \frac{\hbar k_2}{m}$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A$$

transmissão:

$$T = \frac{j_{\text{transmitido}}}{j_{\text{incidente}}} = \frac{v_{\text{trans}} C^* C}{v_{\text{inc}} A^* A}$$

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

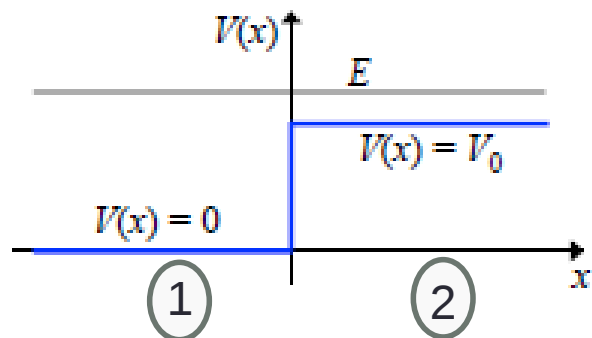
$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2$$

Mecânica Quântica – Equação de Schrödinger

“Potencial Degrau”

Coeficiente de Reflexão e Transmissão:



$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2$$

reflexão:

+

transmissão:

$$R + T = \frac{4k_2k_1}{(k_1 + k_2)^2} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = 1$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

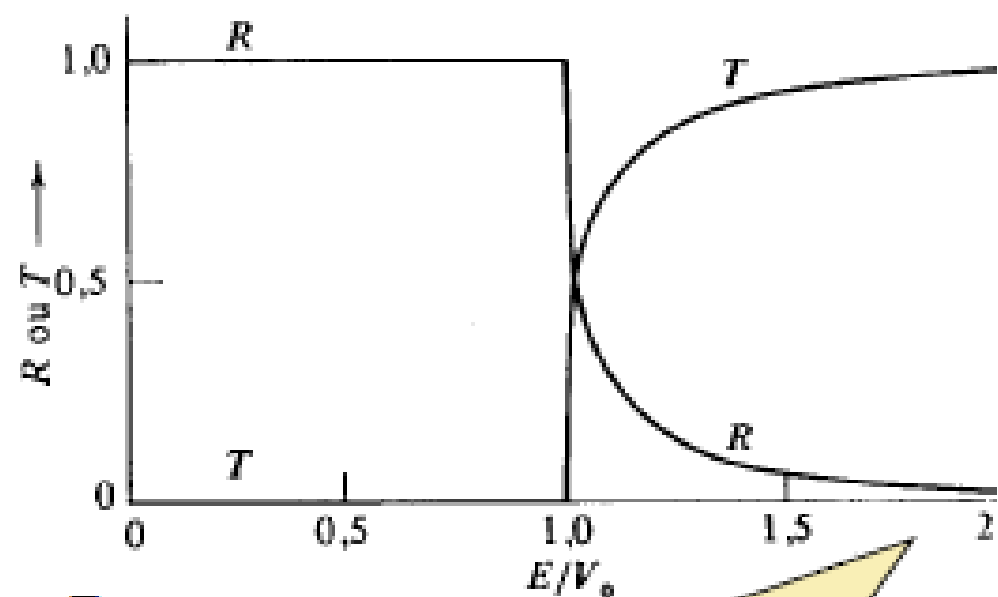
$$R = 1 - T = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}} \right)^2$$

$$E > V_0$$

$$R = 1 - T = 1$$

$$E < V_0$$

Como $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$ e $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ temos que $R + T = 1$



$$R = 1 - T = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2, \text{ se } \frac{E}{V_0} > 1$$

Fazer Ex. 6-3, pág. 257 (Eisberg)

R e T são simétricos pela troca $k_1 \leftrightarrow k_2$. Portanto, em termos de coeficientes de reflexão e transmissão, tanto faz se a partícula sobe ou desce o degrau.