

1

GABARITO DA 1ª PROVA

QUESTÃO 1 (TURMA A)

EM TERMOS MATRICIAIS O SISTEMA APRESENTADO FICA:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO O DETERMINANTE DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES TEMOS QUE:

$$\Delta = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -4(3 - 16 + 36 + 2) = -100$$

O SISTEMA ENTÃO APRESENTA SOLUÇÃO ÚNICA PARA AS VARIÁVEIS x_1, x_2, x_3 e x_4 .

APLICANDO A REGRA DE CRAMER TEMOS QUE:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4(-12 + 32)}{-100}$$

$$x_1 = \frac{-160}{-100} = 1,6$$

(2)

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{-4 \cdot (-12)}{-100}$$

$$x_2 = \frac{48}{-100} = -0,48$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4(-12 - 16 + 6 + 36)}{-100}$$

$$= \frac{56}{-100} \Rightarrow x_3 = -0,56$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{4(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-100} = \frac{-4 \cdot 8}{-100}$$

$$x_4 = \frac{-32}{-100} = 0,32$$

QUESTÃO 1 (TURMA B)

EM TERMOS MATRICIAIS O SISTEMA APRESENTADO FICA:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO O DETERMINANTE DA MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES TEMOS QUE:

$$\Delta = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4(26 - 18) = -32$$

O SISTEMA ENTÃO APRESENTA SOLUÇÃO ÚNICA PARA AS VARIÁVEIS x_1, x_2, x_3 E x_4 .

APLICANDO A REGRA DE CRAMER PARA OBTENESSA SOLUÇÃO, TEMOS:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{4(-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{4(-16)}{-32}$$

$$\chi_3 = \frac{-64}{-32} = 2$$

4

$$\chi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{4 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{-4 \cdot (-8)}{-32}$$

$$\chi_2 = \frac{32}{-32} = -1$$

$$\chi_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{4 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{-32} =$$

$$= \frac{4(-8 - 16 + 6 + 24)}{-32} \Rightarrow \chi_3 = \frac{24}{-32} = -0.75$$

$$\chi_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{4(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{-4 \cdot 8}{-32}$$

$$\chi_4 = \frac{-32}{-32} = 1$$

(5)

QUESTÃO 2 (TURMAS A e B)

ESCRITO EM TERMOS MATRICIAIS, O SISTEMA APRESENTADO FICA:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO O DETERMINANTE DA MATRIZ DOS COEFICIENTES, TEMOS:

$$\Delta = a^2 - 1$$

PARA QUE ESSE SISTEMA APRESENTE SOLUÇÃO ÚNICA PARA x e y É NECESSÁRIO QUE

$$a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 1 \text{ ou } \boxed{a \neq \pm 1}$$

CALCULANDO A SOLUÇÃO PARA $a \neq \pm 1$, TEMOS

QUE
$$x = \frac{(1 - a^4)}{(1 - a^2)} = \frac{(1 + a^2)(1 - a^2)}{(1 - a^2)} = 1 + a^2$$

$$\boxed{x = 1 + a^2}$$

e
$$y = \frac{(a^3 - a)}{(1 - a^2)} = \frac{a(a^2 - 1)}{(1 - a^2)} \Rightarrow \boxed{y = -a}$$

VAMOS AGORA EXAMINAR O QUE OCORRE
PARA $a = \pm 1$.

Se $a = 1$ o sistema fica:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + y &= 1\end{aligned}$$

OU SEJA, UM SISTEMA COM APENAS UMA
EQUAÇÃO, COM DUAS VARIÁVEIS. PORTANTO
VAI EXISTIR INFINITAS SOLUÇÕES PARA
 x E y , OU SEJA, INFINITOS PARES DE (x, y)
TAIS QUE $x = 1 - y$

POR OUTRO LADO, PARA $a = -1$, O SISTEMA
FICA:

$$\begin{aligned}-x + y &= -1 \\x - y &= 1\end{aligned}$$

O QUE IMPLICA QUE TAMBÉM O SISTEMA
POSSUI UMA ÚNICA EQUAÇÃO: $x = 1 + y$
POSSUINDO PORTANTO, INFINITAS SOLUÇÕES.

CONCLUSÃO: O SISTEMA APRESENTA SEMPRE
APRESENTA SOLUÇÕES PARA QUALQUER VALOR
DE a : c) ÚNICA, SE $a \neq \pm 1$; e c) INFINITAS SOLUÇÕES, SE $a = \pm 1$

QUESTÃO 3 (TURMA A)

ESCRITA NA FORMA MATRICIAL, A FORMA QUADRÁTICA APRESENTADA FICA:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

PARA ANALISAR A NATUREZA DESSA FORMA QUADRÁTICA, VAMOS CALCULAR OS MENORES PRINCIPAIS DE ORDEM 1, 2 E 3 DA SUA MATRIZ:

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -102 < 0$$

DADA ESSA SEQUÊNCIA DOS SINAIS DOS MENORES PRINCIPAIS DE ORDEM 1, 2 E 3, CONCLUI-SE QUE A FORMA QUADRÁTICA É INDEFINIDA.

QUESTÃO 3 (TURMA B)

8

A FORMA QUADRÁTICA NA FORMA MATRICIAL É DADA POR

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

EXAMINANDO OS VALORES DOS MENORES PRINCIPAIS DE ORDEM 1, 2 E 3 DESSA MATRIZ, TEMOS:

$$|A_1| = |1| = 1 > 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 38 > 0$$

DADA ESSA SEQUENCIA DOS SINAIS DOS MENORES PRINCIPAIS DE ORDEM 1, 2 E 3, CONCLUI-SE QUE A FORMA QUADRÁTICA ANALISADA É INDEFINIDA.

QUESTÃO 4 (TURMA A)

9

PARA CALCULAR OS VALORES CARACTERÍSTICOS OU AUTOVALORES DA MATRIZ APRESENTADA, VAMOS CALCULAR O SEGUINTE DETERMINANTE:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 & 2 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 \\ -4 & 8 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 8 + 8(1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 8 + 8 - 8\lambda - 16 + 8\lambda = 0$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

PORTANTO, OS AUTOVALORES SÃO: $\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \text{ e } \boxed{\lambda_3 = 3}$$

CÁLCULO DOS RESPECTIVOS AUTOVETORES:

a) PARA $\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } 2v'_1 - 2v'_2 + 2v'_3 &= 2v'_1 \Rightarrow v'_2 = v'_3 \\ v'_2 + v'_3 &= 2v'_2 \Rightarrow v'_2 = v'_3 \\ -4v'_1 + 8v'_2 + 3v'_3 &= 2v'_3 \Rightarrow 4v'_1 = 8v'_2 + v'_3 \end{aligned}$$

COMO EXISTEM INFINITOS AUTOVETORES QUE SATISFAZEM ESSAS EQUAÇÕES, VAMOS TOMAR, POR EXEMPLO, $v'_2 = v'_3 = 1$, QUE RESULTA EM $v'_1 = 9$.

LOGO UM AUTOVETOR CORRESPONDENTE AO AUTOVALOR $\lambda_1 = 2$ É $v' = (9 \ 1 \ 1)$

b) PARA $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } 2v_1^2 - 2v_2^2 + 2v_3^2 = v_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2v_2^2 - 2v_3^2$$

$$v_2^2 + v_3^2 = v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_3^2 = 0}$$

$$-4v_1^2 + 8v_2^2 + 3v_3^2 = v_3^2 \Rightarrow 4v_1^2 = 8v_2^2$$

DENTRE OS INFINITOS AUTOVETORES POSSÍVEIS, VAMOS TOMAR, POR EXEMPLO, $v_2^2 = 1$, QUE RESULTA EM $v_1^2 = 2$. TEMOS ENTÃO QUE $v^2 = (2 \ 1 \ 0)$

c) PARA $\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } 2v_1^3 - 2v_2^3 + 2v_3^3 = 3v_1^3 \Rightarrow v_1^3 = -2v_2^3 + 2v_3^3$$

$$v_2^3 + v_3^3 = 3v_2^3 \Rightarrow v_3^3 = 2v_2^3$$

$$-4v_1^3 + 8v_2^3 + 3v_3^3 = 3v_3^3 \Rightarrow v_1^3 = 2v_2^3$$

ENTRE OS INFINITOS AUTOVETORES POSSÍVEIS, VAMOS TOMAR $v_2^3 = 1$, QUE RESULTA EM $v_1^3 = v_3^3 = 2$. TEMOS ENTÃO QUE $v^3 = (2 \ 1 \ 2)$.

CONCLUSÃO: COMO NÓS TEMOS 3 AUTOVALORES REAIS E DIFERENTES ENTRE SI, A MATRIZ A É DIAGONALIZÁVEL, SENDO ESSA DIAGONALIZAÇÃO FEITA ATRAVÉS DA MATRIZ DOS AUTOVETORES P:

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

DA SEGUINTE FORMA:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 5 (TURMA B)

ANALOGAMENTE À RESPOSTA DA TURMA A, OS AUTOVALORES SÃO CALCULADOS PELO DETERMINANTE:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 & 1 \\ -1 & (3-\lambda) & 1 \\ 0 & 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 - 2(1-\lambda) + 2(2-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 - 2 + 2\lambda + 4 - 2\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

OBTENDO-SE OS AUTOVALORES: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$

CÁLCULO DOS RESPECTIVOS AUTOVECTORES:

a) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v'_1 + 2v'_2 + v'_3 &= v'_1 \Rightarrow v'_3 = -2v'_2 \\ -v'_1 + 3v'_2 + v'_3 &= v'_2 \Rightarrow v'_1 = 2v'_2 + v'_3 \Rightarrow v'_1 = 0 \\ 2v'_2 + 2v'_3 &= v'_3 \Rightarrow v'_3 = -2v'_2 \end{aligned}$$

TOMANDO, POR EXEMPLO, $v'_2 = 1$ TEM-SE QUE $v'_3 = -2$.
PORTANTO, $v' = (0 \ 1 \ -2)$

b) $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \\ v''_3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \\ v''_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v''_1 + 2v''_2 + v''_3 &= 3v''_1 \Rightarrow v''_3 = 2v''_1 - 2v''_2 \\ -v''_1 + 3v''_2 + v''_3 &= 3v''_2 \Rightarrow v''_1 = v''_3 \\ 2v''_2 + 2v''_3 &= 3v''_3 \Rightarrow v''_3 = 2v''_2 \end{aligned}$$

TOMANDO, POR EXEMPLO, $v''_2 = 1$ TEM-SE QUE $v''_1 = v''_3 = 2$. PORTANTO $v'' = (2 \ 1 \ 2)$

$$c) \boxed{\Gamma_3 = 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{bmatrix}$$

$$v_1^3 + 2v_2^3 + v_3^3 = 2v_1^3 \Rightarrow v_1^3 = 2v_2^3 + v_3^3$$

$$-v_1^3 + 3v_2^3 + v_3^3 = 2v_2^3 \Rightarrow v_1^3 = v_2^3 + v_3^3$$

$$2v_2^3 + 2v_3^3 = 2v_2^3 \Rightarrow \boxed{v_2^3 = 0}$$

Tomando, por exemplo, $v_1^3 = 1$ tem-se que $v_3^3 = 1$
então, $v^3 = (1 \ 0 \ 1)$

CONCLUSÃO: CONSIDERANDO QUE OS TRÊS
AUTOVALORES SÃO REAIS E DIFERENTES ENTRE
SI, A MATRIZ A É DIAGONALIZÁVEL, DA
SEGUINTE FORMA:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ONDE

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$