

Física Experimental VI – 4300314

2º Semestre de 2017

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: Antonio Domingues dos Santos

E-mail: adsantos@if.usp.br

Fone: 3091.6886

Transformada de Fourier

Para uma imagem **a** e sua transformada de Fourier **A**.

1) Domínio espacial => Domínio de frequências

Direta -

$$A = \mathcal{F}\{a\}$$

2) Domínio de frequências => Domínio espacial

Inversa -

$$a = \mathcal{F}^{-1}\{A\}$$

A transformada de Fourier é uma operação inversível:

$$a = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{a\}\} \quad \text{and} \quad A = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{A\}\}$$

As suas fórmulas específicas são:

Em 2D, espaço contínuo:

Direta -

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

Inversa -

$$a(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(u, v) e^{+j(ux+vy)} du dv$$

Em 2D, espaço discreto:

Direta -

$$A(\Omega, \Psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[m, n] e^{-j(\Omega m + \Psi n)}$$

Inversa -

$$a[m, n] = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\Omega=-\infty}^{+\infty} \sum_{\Psi=-\infty}^{+\infty} A(\Omega, \Psi) e^{+j(\Omega m + \Psi n)}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma função complexa. Pode ser expressa em termos de magnitudes e fases.

$$A(u, v) = |A(u, v)|e^{j\varphi(u, v)} \quad A(\Omega, \Psi) = |A(\Omega, \Psi)|e^{j\varphi(\Omega, \Psi)}$$

* Um sinal 2D pode ser complexo e também ser descrito em termos de magnitudes e fases.

$$a(x, y) = |a(x, y)|e^{j\vartheta(x, y)} \quad a[m, n] = |a[m, n]|e^{j\vartheta[m, n]}$$

* Se o sinal 2D é real, a transformada de Fourier possui simetrias.

$$A(u, v) = A^*(-u, -v) \quad A(\Omega, \Psi) = A^*(-\Omega, -\Psi)$$

$$|A(u, v)| = |A(-u, -v)| \quad \varphi(u, v) = -\varphi(-u, -v)$$

$$|A(\Omega, \Psi)| = |A(-\Omega, -\Psi)| \quad \varphi(\Omega, \Psi) = -\varphi(-\Omega, -\Psi)$$

* Se o sinal 2D é real e par, a sua transformada é real e par.

$$A(u, v) = A(-u, -v) \quad A(\Omega, \Psi) = A(-\Omega, -\Psi)$$

* A transformada e sua inversa são operações lineares.

$$\mathbf{F}\{w_1 a + w_2 b\} = \mathbf{F}\{w_1 a\} + \mathbf{F}\{w_2 b\} = w_1 A + w_2 B$$

$$\mathbf{F}^{-1}\{w_1 A + w_2 B\} = \mathbf{F}^{-1}\{w_1 A\} + \mathbf{F}^{-1}\{w_2 B\} = w_1 a + w_2 b$$

* A energia E é:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a[m, n]|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi-\pi}^{+\pi+\pi} \int |A(\Omega, \Psi)|^2 d\Omega d\Psi$$

* Dados 3 sinais a , b e c e suas transformadas A , B e C :

$$c = a \otimes b \quad \overset{\text{F}}{\leftrightarrow} \quad C = A \bullet B$$

and

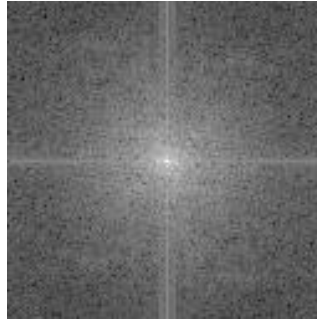
$$c = a \bullet b \quad \overset{\text{F}}{\leftrightarrow} \quad C = \frac{1}{4\pi^2} A \otimes B$$

convolução no domínio espacial é equivalente a multiplicação no domínio de frequências e vice-versa.

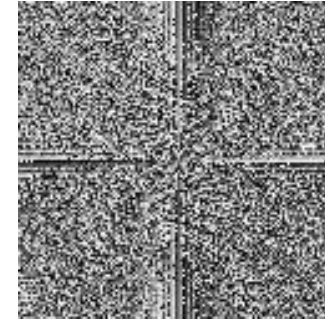
Importância da fase e magnitude



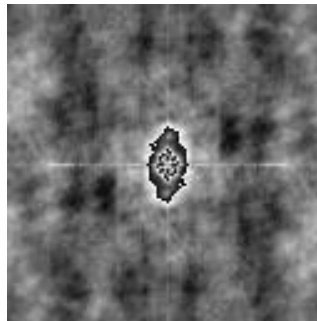
Original



$\log(|\text{Amplitude}|)$



fase



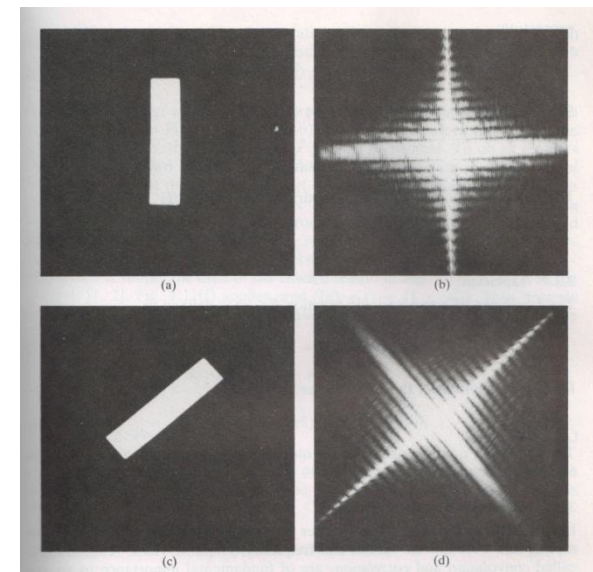
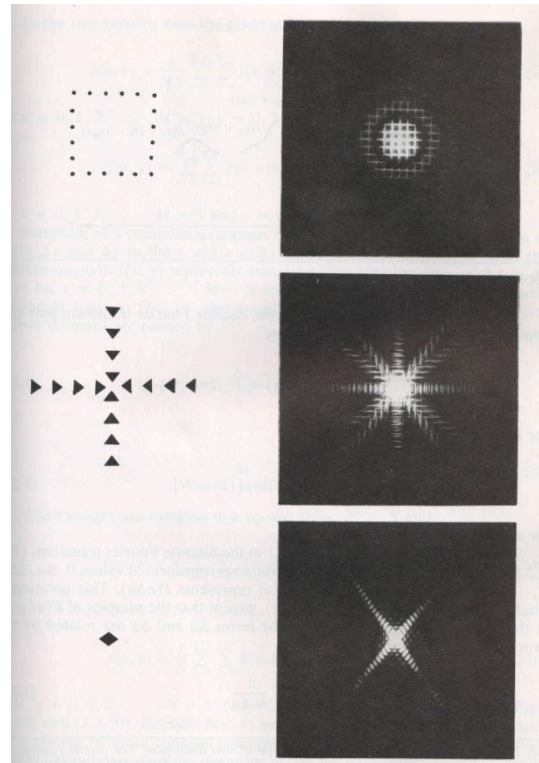
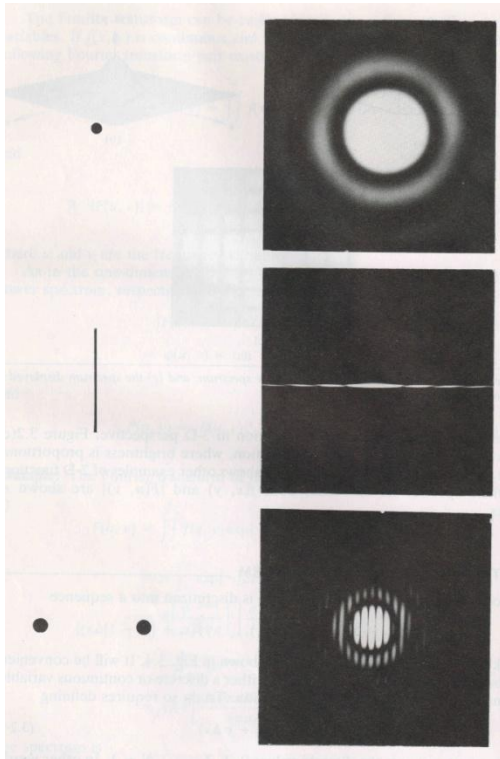
Inversas com:

fase= 0

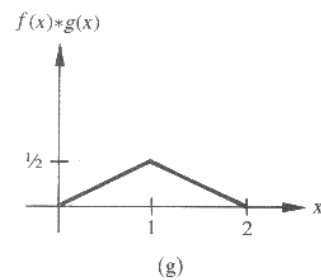
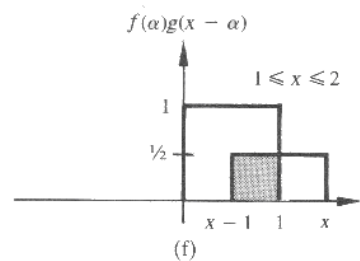
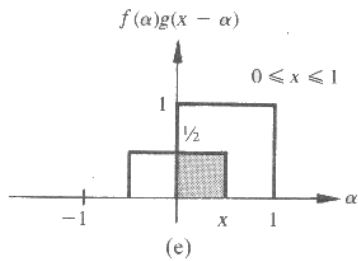
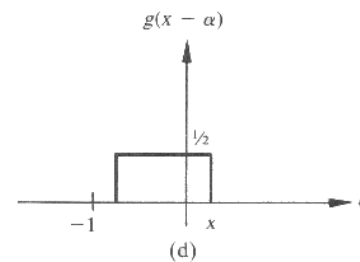
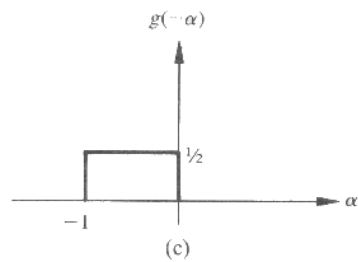
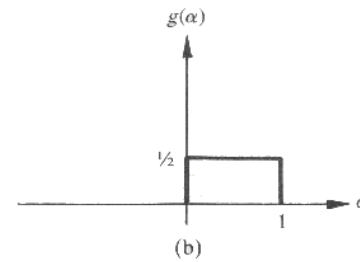
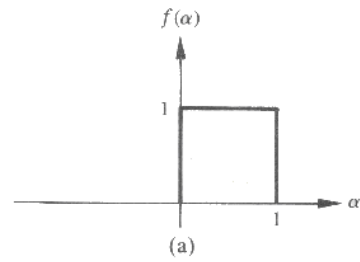


$|\text{Amplitude}| = \text{cte}$

**Apenas a magnitude ou a fase não é suficiente para recuperar a imagem.
A imagem obtida a partir da magnitude é irreconhecível !!!**



Exemplo de Convolução



FFT Submenu

Os comandos neste submenu suportam a apresentação, edição e processamento no domínio de frequências. Eles são baseados em uma implementação da (contribuição de Arlo Reeves).

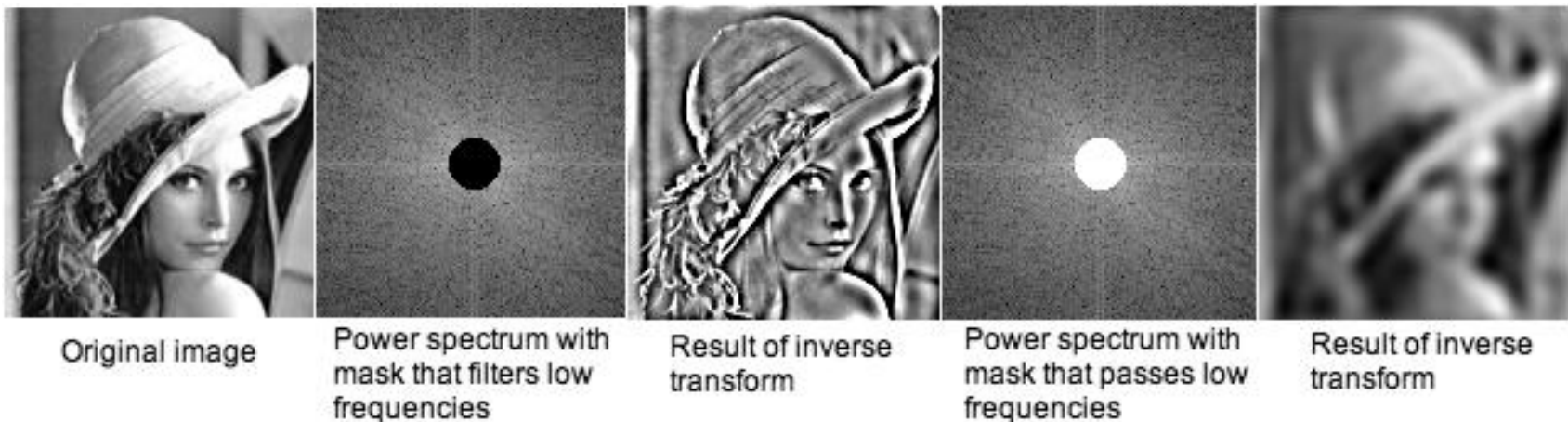
FFT

Calcula a transformada de Fourier e apresenta o seu espectro de potência. A imagem no domínio de frequências é guardada como 32-bit float FHT. Os comandos neste submenu, como *Inverse FFT*, operam sobre a 32-bit FHT e não sobre o espectro de potências(8-bit).

Todos os outros comandos do ImageJ agem sobre o espectro de potências.

Inverse FFT

Calcula a transformada inversa de Fourier. É possível filtrar ou mascarar partes da imagem com a transformada e então através da transformada inversa, produzir uma imagem com as frequências de interesse ou então com a supressão das frequências marcadas. Use os comandos fill/clear para indicar as seleções. Áreas pretas (pixel value=0) causam a supressão das frequências e áreas brancas (pixel value=255) indicam áreas a serem mantidas. Use apenas branco ou preto para indicar a seleção.



Redisplay Power Spectrum

Recalcula o espectro de potências a partir da imagem 32-bit FHT. Este comando permite se recuperar de operações erradas sobre o espectro de potências (8-bit image).

Bandpass Filter..

Plugin criado por Joachim Walter.

Custom Filter..

Este comando permite o uso de uma imagem fornecida pelo usuário para a filtragem no domínio de frequências.

FD Math..

Este comando correlaciona, convolui ou desconvolui duas imagens. Ele as convertem para o domínio de frequências e realiza uma operação de multiplicação pelo conjugado, multiplicação ou divisão com elas. Em seguida, converte para o domínio espacial o resultado.