Mecânica Quântica — 7600022

Quarta Lista — para praticar para a prova do dia 26/9/2017

Nesta lista, o estado fundamental do oscilador harmônico, com energia $\hbar\omega/2$, será denotado $|0\rangle$, o primeiro estado excitado será denotado $|1\rangle$ e assim por diante.

1. Quando o operador *de abaixamento* a age sobre um autoestado $|n\rangle$ do Hamiltoniano do oscilador harmônico, o resultado é proporcional a $|n-1\rangle$. Encontre a constante de proporcionalidade. *Dica: chame* $a|n\rangle$ *de* $|\alpha\rangle$, *e calcule* $\langle\alpha|\alpha\rangle$.

2. Quando o operador *de levantamento* $a^\dagger$ age sobre um autoestado $|n\rangle$ do Hamiltoniano do oscilador harmônico, o resultado é proporcional a $|n-1\rangle$. Encontre a constante de proporcionalidade. *Dica: chame* $a^\dagger|n\rangle$ *de* $|\beta\rangle$, *e calcule* $\langle\beta|\beta\rangle$ *com ajuda da igualdade* $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$.

3. Calcule o valor médio esperado $\langle n|X|n\rangle$

   (a) Com base em argumentos gerais, sem fazer contas;

   (b) Calculando o elemento de matriz a partir da igualdade

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger).$$

4. Calcule o valor médio esperado $\langle n|X^2|n\rangle$

5. Calcule o valor médio esperado $\langle n|P^2|n\rangle$, a partir da igualdade

$$P = \frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(a - a^\dagger).$$

6. A função de onda do estado fundamental ($|0\rangle$) do oscilador harmônico é

$$\phi_0(x) = \alpha e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

   Encontre a constante de normalização α. É dado que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

7. Sabe-se que a energia de um autoestado qualquer do Hamiltoniano do oscilador harmônico se divide igualmente entre energia cinética e energia potencial. Aproveite essa informação para calcular o valor médio esperado $\langle n|X^2|n\rangle$. Para conferir o resultado, escolha $n = 0$ e compare com o resultado da questão 4.

8. Calcule o valor médio esperado $\langle n|P^2|n\rangle$.

9. Encontre a função de onda associada ao primeiro estado excitado ($|1\rangle$), inclusive constante de normalização.

10. Um elétron está sujeito ao potencial de um oscilador harmônico com frequência ω. No instante $t = 0$, o elétron está no estado quântico dado pela igualdade

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big).$$

   (a) Desenhe esquematicamente a função de onda $\psi(x, t = 0)$;

   (b) Encontre $|\psi\rangle_t$;

   (c) Encontre o valor médio esperado ${}_t\langle\psi|X|\psi\rangle_t$.*Dica: empregue a igualdade no problema 3(b).*

Mecânica Quântica - Lista 4

1) $a|n\rangle \propto |n-1\rangle$

podemos chamar a constante de proporcionalidade de α, então

$a|n\rangle = \alpha|n-1\rangle$

$(a|n\rangle)^* = \langle n|a^+ = \langle n-1|\alpha^*$

$\rightarrow \langle n|a^+a|n\rangle = |\alpha|^2\langle n-1|n-1\rangle = |\alpha|^2 \quad (1)$

notando que $a^+a = N$

$\rightarrow \langle n|a^+a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n \quad (2)$

de (1) e (2):

$\alpha = \sqrt{n}\,e^{i\phi}$, onde ϕ é uma fase que podemos definir como nula.

$\alpha = \sqrt{n}$

ou seja, $\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$

2) * é proporcional a $|n+1\rangle$

Aqui o procedimento é análogo a questão 1:

$$a^+|n\rangle = \beta|n+1\rangle$$

$$\rightarrow \langle n|a = \langle n+1|\beta^*$$

$$\langle n|aa^+|n\rangle = |\beta|^2 \langle n+1|n+1\rangle = |\beta|^2 \quad (1)$$

Agora, notando que

$$[a, a^+] = \mathbb{1} = aa^+ - a^+a = aa^+ - N$$

$$\rightarrow aa^+ = \mathbb{1} + N$$

$$\rightarrow \langle n|aa^+|n\rangle = \langle n|\mathbb{1} + N|n\rangle = 1\langle n|n\rangle + n\langle n|n\rangle = n+1 \quad (2)$$

de (1) e (2):

$\beta = \sqrt{n+1}\, e^{i\phi}$ (onde podemos definir a fase como nula)

$$\rightarrow \beta = \sqrt{n+1}$$

$$\boxed{a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$$

3) a) nulo, pois o potencial do oscilador harmônico é par.

b) $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^{+})$

$$\langle n | X | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n | a + a^{+} | n \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n}\,\cancelto{0}{\langle n | n-1 \rangle} + \sqrt{n+1}\,\cancelto{0}{\langle n | n+1 \rangle}\right]$$

$$= 0$$

4) $X = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^{+})$

$$\rightarrow X^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[a^2 + aa^{+} + a^{+}a + (a^{+})^2\right]$$

notando que os únicos termos que contribuem para $\langle n|X^2|n\rangle$ são os que mantém o estado $|n\rangle$ o mesmo, então apenas aa^{+} e $a^{+}a$ que destrói um estado e depois cria ou cria e depois destrói, respectivamente, contribuem para $\langle n|X^2|n\rangle$.

e notando que

$$aa^{+} = \mathbb{1} + N \qquad ; \quad a^{+}a = N$$

então

$$\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\, aa^{+} + a^{+}a\,|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\, 1 + 2N\,|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(1 + 2n)\langle n|n\rangle$$

$$\cancel{\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar(1+2n)}{2m\omega}}$$

$$\boxed{\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}$$

5) $P = \frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(a - a^{+})$

$$P^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[a^2 - aa^{+} - a^{+}a + (a^{+})^2\right]$$

notando que apenas os termos aa^{+} e $a^{+}a$ contribuem para $\langle n|P^2|n\rangle$

e $aa^{+} = \mathbb{1} + a^{+}a = \mathbb{1} + N$

$$\to \langle n|P^2|n\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|\,aa^{+} + a^{+}a\,|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|\,\mathbb{1} + 2N\,|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)\langle n|n\rangle$$

$$\boxed{\langle n|P^2|n\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)}$$

6)

$$\langle 0|0\rangle = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx = |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} d\left(\sqrt{\frac{m\omega x^2}{\hbar}}\right)$$

$$= |\alpha|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = |\alpha|^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi}$$

$= 1$ (normalização)

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}$$ (a menos de uma fase)

7) $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

onde $E_n = \underset{\text{cinética}}{T_n} + \underset{\text{potencial}}{V_n}$

e $T_n = V_n$

$\Rightarrow E_n = 2T_n = 2V_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

$\Rightarrow \langle n|V|n\rangle = V_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

notando que

$V = \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$

$\Rightarrow \langle n|V|n\rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle n|X^2|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

$$\Rightarrow \boxed{\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido na questão 4.

8) repetindo o procedimento da questão 7:

$$\langle n|V|n\rangle = \langle n|T|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

notando que

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \langle n|T|n\rangle = \frac{1}{2m}\langle n|p^2|n\rangle = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle n|p^2|n\rangle = m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido na questão 5.

g) da questão 6

$$\phi_0(x) = \alpha e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

onde $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

notando que

$$a^+|0\rangle = |1\rangle$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}P\right)$$

$$\Rightarrow \phi_1(x) = \langle X|1\rangle = \langle x|a^+|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\cancel{X} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}\cdot\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dX}\right)\phi_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,\phi_0(x) - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\phi_0(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,\phi_0(X) + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,\phi_0(x)\right)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\,\phi_0(X)$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} x\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\boxed{\phi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3\right)^{1/4} x\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}}$$

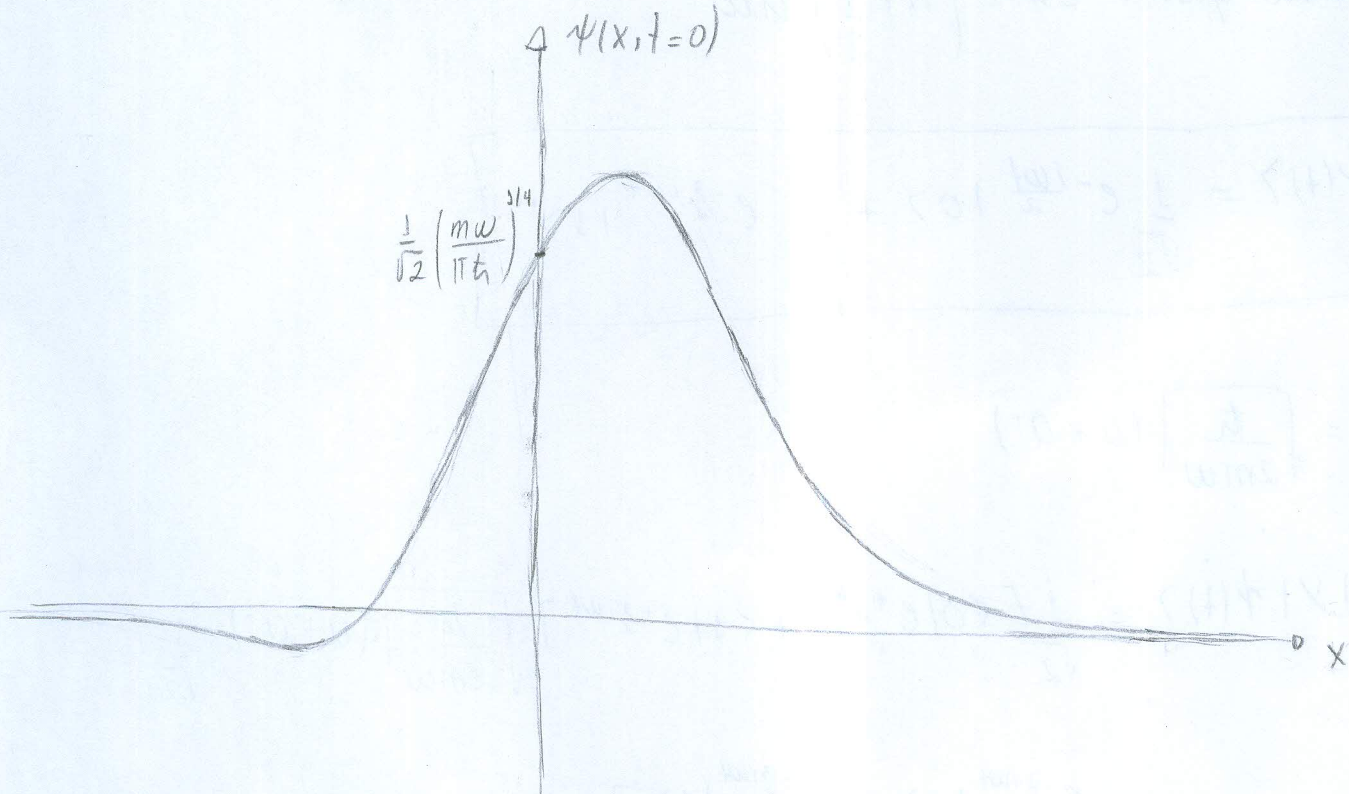
(já está normalizado)

10) a) da questão 9, temos:

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3\right)^{1/4} x\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_0(x) + \phi_1(x)\right)$$



$$|0\rangle|1\rangle|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(t=0)\rangle$$

$$= \sum_n e^{-iHt/\hbar}|n\rangle\langle n|\psi(t=0)\rangle$$

$$= e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

notando que $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}i\omega t}|1\rangle}$$

c) $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+)$

$$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle 0|e^{+\frac{1}{2}i\omega t} + \langle 1|e^{+\frac{3}{2}i\omega t}\right]\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|0\rangle + e^{-\frac{3}{2}i\omega t}|1\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle 0|e^{+\frac{1}{2}i\omega t} + \langle 1|e^{+\frac{3}{2}i\omega t}\right]\left[e^{-\frac{1}{2}i\omega t}|1\rangle + e^{-\frac{3}{2}i\omega t}|0\rangle\right]$$

+ termos que ñ contribuem

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\right]$$

$$\boxed{\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t)}$$