Mecânica Estatística - IFUSP - 11/10/2017
quinta série de exercícios

"Why is it that particles with half-integral spin are Fermi particles whose amplitudes add with the minus sign, whereas particles with integral spin are Bose particles whose amplitude add with positive sign? We apologize for the fact that we cannot give you an elementary explanation. An explanation has been worked out by Pauli from complicated arguments of quantum field theory and relativity. He has shown that the two must necessarily go together, but we have not been able to find a way of reproducing his arguments on an elementary level ... This probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental principle involved ..."

Feynman Lectures on Physics ...

1- Utilize o limite clássico das expressões quânticas no ensemble grande canônico para obter a forma da entropia de um gás ideal monoatômico de partículas de spin nulo. Expresse o resultado final em termos da temperatura, da pressão e do número de partículas. Compare com a expressão obtida por Sackur e Tetrode nos artigos publicados em 1911 nos Annalen der Physik (ver APS News, agosto-setembro de 2009).

2- Considere um gás de N elétrons livres dentro de um recipiente de volume V. Obtenha expressões para a energia interna, a pressão e a compressibilidade no estado fundamental (que também é conhecido como estado "completamente degenerado"). Utilize dados para o sódio, que é um metal alcalino, a fim de obter valores numéricos para a temperatura de Fermi e a pressão (em atmosferas) exercida pelos elétrons de condução sobre a rede cristalina em que eles estão contidos. Compare o valor da compressibilidade desse modelo de elétrons livres no estado fundamental com os dados experimentais para a compressibilidade do sódio a temperatura ambiente.

3- Mostre que o potencial químico de um gás clássico ideal de N partículas monoatômicas ocupando um volume V, a temperatura T, pode ser escrito na forma

$$\mu = k_B T \ln\left(\frac{\gamma\lambda^3}{v}\right),$$

em que $v = V/N$ é o volume específico, $\gamma = (2S+1)$ é a multiplicidade do spin, e $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ é o comprimento de onda térmico. Esboce um gráfico de $\mu/k_B T$ contra T. Obtenha agora a primeira correção quântica deste resultado. Isto é, mostre que o potencial químico de um gás ideal quântico pode ser expandido em termos do fator λ^3/v,

$$\frac{\mu}{k_B T} - \ln\left(\frac{\gamma\lambda^3}{v}\right) = A\left(\frac{\lambda^3}{v}\right) + B\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 + \cdots.$$

Obtenha explicitamente os coeficientes A e B para férmions e para bósons.

Faça um esboço do comportamento de $\mu/k_B T$ contra T (ou contra λ^{-2}, que é a temperatura em unidades convenientes) para férmions, bósons e partículas clássicas.

4- Considere um gás de N elétrons livres, dentro de um recipiente de volume V, no regime ultra-relativístico. O espectro de energia é dado por

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \hbar c k, \qquad k = \left|\vec{k}\right|,$$

em que $\hbar$ é a constante de Planck (dividida por 2π) e c é a velocidade da luz. Esse tipo de espectro de energia, pelo menos para valores pequenos de k, encontrou uma aplicação recente nas análises do “novo material” grafeno!

(i) Obtenha a energia de Fermi desse sistema.

(ii) Qual a energia interna U e a pressão p no estado fundamental? Mostre que

$$pV = \alpha U.$$

Qual o valor da constante α?

(iii) Para $T << T_F$, qual é a dependência assintótica com a temperatura do calor específico a volume constante?

(iv) Obtenha o limite clássico da grande função de partição. Calcule expressões no limite clássico para a energia interna e o calor específico a volume constante.

5- Considere agora o mesmo sistema do problema anterior, na presença de um campo magnético externo $\vec{H}$. Desprezando os efeitos magnéticos orbitais, o espectro de energia é dado por

$$\epsilon_{\vec{k},\sigma} = c\hbar k - \mu_B H \sigma,$$

onde μ_B é o magneton de Bohr e $\sigma = \pm 1$.

(a) Para campos fracos, mostre que a energia de Fermi desse sistema pode ser escrita na forma

$$\epsilon_F = A + BH^2 + O\left(H^4\right).$$

Calcule expressões para os prefatores A e B;

(b) Mostre que a magnetização no estado fundamental pode ser escrita na forma

$$M = CH + O\left(H^3\right).$$

Obtenha uma expressão para a constante C;

(c) Calcule a susceptibilidade a campo nulo no estado fundamental.

6- O número de partículas de um gás ideal de bósons, com spin nulo, dentro de um recipiente de volume V, é dado pela expressão

$$N = \frac{z}{1-z} + \sum_{j\neq 0} \frac{1}{z^{-1}\exp\left(\beta\epsilon_j\right) - 1},$$

em que $\beta = \left(k_B T\right)^{-1}$ é o inverso da temperatura absoluta, z é a fugacidade, e

$$\epsilon_j = \epsilon_{\overrightarrow{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

é o espectro de energia.

(i) A densidade de partículas no condensado é obtida a partir do limite apropriado da expressão

$$n_0 = \frac{1}{V}\frac{z}{1-z},$$

quando $V \to \infty$ e $\mu \to 0-$ (isto é, $z \to 1-$). Faça gráficos de n_0 contra z (com $0 < z < 1$) para valores crescentes do volume V. O que acontece no limite $V \to \infty$?

(ii) Mostre que não há condensação de Bose-Einstein num sistema de bósons livres em duas dimensões.

(iii) Suponha agora que o gás de bósons livres esteja num regime ultra-relativístico, isto é, que o espectro de energia seja dado por

$$\epsilon_j = \epsilon_{\overrightarrow{k}} = c\hbar\left|\overrightarrow{k}\right|,$$

em que a constante c é a velocidade da luz. Acima de qual dimensão d há ocorrência de uma transição de Bose-Einstein? Calcule a temperatura da transição de Bose-Einstein para $d = 2$.

Exercício Suplementar

Há uma longa história associada à proposta da "distribuição de Bose-Einstein". O trabalho pioneiro de S. N. Bose, introduzindo uma nova contagem estatística para explicar a fórmula de Planck, foi inicialmente rejeitado pelo Philosophical Magazine. Logo depois, em 1924, foi traduzido para o alemão por Einstein, e publicado no Zeitschrift für Physik, seguido de um artigo do próprio Einstein com a aplicação da mesma estatística para a situação de partículas massivas. Não sei exatamente quando Einstein fez a proposta da "condensação no espaço dos momentos", mas esse trabalho foi analisado na tese de G. E. Uhlenbeck em Leiden, em 1927, que alegou ter encontrado um erro, descartando o fenômeno de transição. Cerca de dez anos depois, Uhlenbeck se retratou, e Fritz London voltou ao problema, em conexão com o fenômeno da transição superfluida no hélio líquido [ver F. London, On the Bose-Einstein Condensation, Phys. Rev. **54**, 947, 1938].

S2- Considere um sistema de bósons ideais, de spin nulo ($\gamma = 1$) e massa m, dentro de um recipiente de volume V.

(a) Mostre que a entropia acima da temperatura T_0 da condensação de Bose-Einstein é dada pela expressão

$$S = k_B \frac{V}{\lambda^3} \left[\frac{5}{2} g_{5/2}\left(z\right) - \frac{\mu}{k_B T} g_{3/2}\left(z\right) \right],$$

em que

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

é o comprimento de onda térmico de de Broglie e

$$g_\alpha\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}.$$

(b) Dados N e V, qual é a expressão da entropia abaixo de T_0? Qual é a entropia associada às partículas do condensado?

(c) Utilizando a expressão da entropia, mostre que o calor específico a volume constante, acima de T_0, é dado por

$$c_V = \frac{3}{4} k_B \left[5 \frac{g_{5/2}\left(z\right)}{g_{3/2}\left(z\right)} - 3 \frac{g_{3/2}\left(z\right)}{g_{1/2}\left(z\right)} \right].$$

(d) Abaixo de T_0, mostre que o calor específico a volume constante é dado por

$$c_V = \frac{15}{4} k_B \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}\left(1\right).$$

(e) Dado o volume específico v, esboce um gráfico de c_V/k_B contra T (ou contra λ^{-2}, que é a temperatura em unidades convenientes). Obtenha expressões assintóticas do calor específico para $T \to 0$ e $T \to \infty$ (ou seja, mostre que os seus resultados satisfazem tanto a Lei de Nernst quanto a forma clássica da equipartição da energia). Obtenha o calor específico para $T = T_0$. Compare o seu gráfico com a forma do calor específico experimental do hélio líquido nas vizinhanças da transição λ.