Aula 01

Bibliografia: Apresentação

Cláudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Objetivos da Aula

Objetivos da Aula

1. Propriedades Desejáveis de um Sistema de Demanda
2. Modelos Neoclássicos de Demanda
   - Abordagem Diferencial e o Modelo de Rotterdam
   - Linear Expenditure System
   - Translog
   - AIDS

Objetivos da Aula

Propriedades Desejáveis de um Sistema de Demanda

- Em geral, a base para este tipo de características é o conceito de um sistema de demanda "teoricamente plausível". Entende-se um sistema de demanda teoricamente plausível se ele é consistente com o processo de maximização da utilidade do consumidor.
- Em especial, este conceito pode ser operacionalizado verificando-se as seguintes condições:
  - *Adding-up* (ou exaustão da restrição orçamentária): supõe-se que o valor das demandas por todos os bens exaure o valor da restrição orçamentária.
  $$\sum_k p_k h_k = \sum_k p_k x_k = w$$
  - Homogeneidade: as demandas hicksianas são homogêneas de grau zero nos preços, e as demandas Marshallianas no gasto total e nos preços, ou seja, para escalar $\theta > 0$,
  $$h_i(u, \theta \mathbf{p}) = h_i(u, \mathbf{p}) = x_i(\theta w, \theta \mathbf{p}) = x_i(w, \mathbf{p})$$

Propriedades Desejáveis (cont.)

- Simetria: As derivadas cruzadas das demandas Hicksianas são simétricas.
  - Negatividade: A matriz de derivadas $\bigtriangledown_p h(u, \mathbf{p})$ das demandas hicksianas com relação aos preços tem que ser negativa semidefinida. Esta propriedade pode ser testada por meio da nossa querida Equação de Slutsky.
- Nem todos os sistemas geralmente utilizados pela literatura são consistentes com estas hipóteses.
- Exemplo: Sistema de demanda log-linear – supondo $i \in N$ produtos:

$$\ln q_i = \alpha_i + e_i \ln w + \sum_k e_{ik} \ln p_k + u_i$$

Sistema de demanda log-linear:

- Esta função duplo log é muito comumente utilizada porque os coeficientes estimados nos dão diretamente as elasticidades.
- No entanto, ela coloca problemas nos valores das elasticidades e da exaustão da restrição orçamentária. Para entender isso melhor, vamos definir o logaritmo da participação no gasto como sendo $\ln s_i = \ln q_i + \ln p_i - \ln w$. Substituindo isso na equação acima, temos que:

$$\ln q_i = \alpha_i + (e_i - 1) \ln w + (e_{ii} + 1) \ln p_i + \sum_{k \neq i} e_{ik} \ln p_k$$

- Pela restrição de exaustão da restrição orçamentária, mencionada acima, temos que $\sum_k w_k e_k = 1$, o que indica que *ou tereemos todos as elasticidades renda iguais a um ou pelo menos uma delas tem que ser maior do que um*.

Sistema de demanda log-linear:

- Esta função duplo log é muito comumente utilizada porque os coeficientes estimados nos dão diretamente as elasticidades.
- No entanto, ela coloca problemas nos valores das elasticidades e da exaustão da restrição orçamentária. Para entender isso melhor, vamos definir o logaritmo da participação no gasto como sendo $\ln s_i = \ln q_i + \ln p_i - \ln w$. Substituindo isso na equação acima, temos que:

$$\ln q_i = \alpha_i + (e_i - 1) \ln w + (e_{ii} + 1) \ln p_i + \sum_{k \neq i} e_{ik} \ln p_k$$

- Pela restrição de exaustão da restrição orçamentária, mencionada acima, temos que $\sum_k w_k e_k = 1$, o que indica que *ou tereemos todos as elasticidades renda iguais a um ou pelo menos uma delas tem que ser maior do que um.*

1. Se o primeiro caso for verdade, o modelo não é muito interessante, uma vez que ele implica padrões de consumo iguais a todos os níveis de gasto, o que não é verdade.
2. Se o segundo caso for verdade, existe necessariamente um produto de luxo, para o qual $e_i > 1$ e um produto inferior para o qual $e_i < 1$.
3. O problema é que, neste caso, para alguns intervalos de renda o gasto é menor do que o orçamento e, em outras, a situação se reverte.

Modelo de Rotterdam

- Uma alternativa de modelagem empírica de demanda envolve aproximar diretamente a função demanda resultante do processo de maximização da utilidade do consumidor, que é o resultado do trabalho de Theil (1965)
- Desta forma, a equação fica sendo:

$$s_l d \log x_l = \theta_l d \log \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^{L} v_{lj} \left(d \log p_j - d \log P^f \right)$$

- Uma versão alternativa – chamada versão em preços relativos – desta equação é dada por:

$$s_l d \log x_l = \theta_l d \log \mathbf{Q} + \sum_{j=1}^{L} \pi_{lj} d \log p_j$$

Modelo de Rotterdam (II):

Para impormos as restrições tradicionais, precisamos que os coeficientes atendam às seguintes restrições:

- *Adding-Up*: $\sum_j \theta_j = 1$ e $\sum_l \pi_{lj} = 0$, para todos os l
- Homogeneidade: $\sum_j \pi_{lj} = 0$, em uma mesma equação
- Simetria da matriz de Slutsky: $\pi_{ij} = \pi_{ji}$
- Concavidade: a matriz de Slutsky precisa ser negativa semidefinida com posto $L - 1$.

Modelo de Rotterdam (III):

As elasticidades preço compensadas e elasticidade renda são:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{s_i}$$

$$\epsilon_{w} = \frac{\theta_{I}}{s_I}$$

LES

- Começaremos pelo *Linear Expenditure System*. Este modelo é de Klein e Rubin, nos seus papers de 1947 e 1948, e começa com a seguinte função de utilidade indireta:

$$v(\mathbf{P}, w) = \frac{w - \sum p_k b_k}{\prod_k p_k^{a_k}}$$

- Usando a Identidade de Roy, chegamos às seguintes formas funcionais para as equações:

$$s_i = \frac{p_i b_i}{w} + a_i \left[1 - \frac{\sum_k p_k b_k}{w}\right]$$

- O legal deste modelo é que os parâmetros possuem interpretações comportamentais. Uma família cujo sistema de demanda é LES começa comprando quantidades "comprometidas" de cada um dos bens $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, e depois dividindo o excedente, $w - \sum_k p_k b_k$ entre os bens em proporções fixas $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

LES - Elasticidades

- As elasticidades deste sistema de equações são dadas por:

$$
\begin{aligned}
e_{ii} &= \frac{p_i b_i (1 - a_i)}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)} - 1 \\
e_{ij} &= \frac{-a_i b_j p_j}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)} \\
e_w &= \frac{a_i w}{p_i b_i + a_i \left(w - \sum_k p_k b_k\right)}
\end{aligned}
$$

Translog

- O paper de Christensen, Jorgenson e Lau (1975) partem da seguinte função de utilidade indireta:

$$\ln(v(\mathbf{P}, w)) = \alpha_0 + \sum \alpha_i \ln \frac{p_i}{w} + \frac{1}{2} \sum \sum \beta_{ij} \ln \frac{p_i}{w} \ln \frac{p_j}{w}$$

- A vantagem desta função de utilidade indireta é que ela aproxima os valores das primeiras e segundas derivadas da função "verdadeira" de utilidade indireta em torno da média amostral dos dados.
- Usando a nossa querida Identidade de Roy, eles chegam no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{\alpha_j + \sum \beta_{ji} \ln \frac{p_i}{w}}{\alpha_M + \sum \beta_{Mi} \ln \frac{p_i}{w}} \\ \alpha_M &= \sum \alpha_k \\ \beta_{Mi} &= \sum \beta_{ki} \end{aligned}$$

Translog – Continuação

- Normalizando α_M para ser igual a -1. Vamos calcular as elasticidades, e para isso iremos fazer a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha_j + \sum \beta_{ji} \ln \frac{p_j}{w} \\ \mathbf{B} &= \alpha_M + \sum \beta_{Mi} \ln \frac{p_j}{w} \end{aligned}$$

- Com isto, podemos definir a quantidade demandada como sendo:

$$x_i = \frac{w}{p_i} \left[\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} \right]$$

Translog – Elasticidades

- Elasticidade-Cruzada:

$$e_{ij} = \left[\frac{\beta_{ji}}{\mathbf{A}} - \frac{\beta_{Mj}}{\mathbf{B}}\right]$$

- Elasticidade-Preço:

$$e_{ii} = \left[\frac{\beta_{ji}}{\mathbf{A}} - \frac{\beta_{Mj}}{\mathbf{B}}\right] - 1$$

- Elasticidade-Renda:

$$e_{w} = \left[-\frac{\sum \beta_{ji}}{\mathbf{A}} + \frac{\sum \beta_{Mj}}{\mathbf{B}}\right] + 1$$

AIDS (Almost Ideal Demand System)

- Este sistema se baseia na seguinte função utilidade indireta:

$$v(\mathbf{P}, w) = G(\mathbf{P})[\ln w - \ln g(\mathbf{P})]$$

- Sendo que a função $G(\mathbf{P})$ é homogênea de grau zero nos preços, e a $g(\mathbf{P})$ é homogênea de grau 1.
- A classe geral deste tipo de função de utilidade indireta é denominada PIGLOG ("Price Independent Generalized Linearity", PIGL em forma Logaritmica).
- Na verdade, esta condição se relaciona com a relação entre os preços relativos e a curva de Engel. No caso específico da demanda AIDS, temos que:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{P}) &= \Pi_k p_k^{-\gamma_k} \\ \ln g(\mathbf{P}) &= \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln p_K + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \beta_{kj} \ln p_k \ln p_j \end{aligned}$$

AIDS – Continuação:

- Aplicando a nossa amiga, a Identidade de Roy, nesta função de utilidade indireta e cozinhando vigorosamente, temos a seguinte forma para a equação demanda pelo produto na forma de *share de consumo*:

$$s_i = \alpha_i + \sum_i \beta_{ki} \ln p_k + \gamma_i \ln \left(\frac{w}{g(\mathbf{P})} \right)$$

- Deaton e Muellbauer, no seu paper da *AER*, mencionam que uma alternativa quando os preços dos diferentes produtos são muito colineares, é a utilização do seguinte índice de preços de Stone (1953) no lugar da função $g(\mathbf{P})$:

$$\mathbf{P}^* = \sum_k \bar{s}_k \ln p_k$$

- Em que $\bar{s}$ seria a média das participações de mercado. Outra vantagem desta aproximação (conhecida por LA-AIDS) é que a estimação do sistema de equações envolve apenas equações lineares, o que facilita a implementação computacional do modelo.

AIDS – Elasticidades:

- As elasticidades preço e cruzadas do modelo são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\beta_{ii} - \gamma_i s_i}{s_i} - 1 \\ e_{ij} &= \frac{\beta_{ij} - \gamma_i s_j}{s_i} \\ e_w &= 1 + \frac{\gamma_i}{s_i} \end{aligned}$$

Agregação e Separabilidade:

- Podemos notar que uma característica comum a todos os modelos acima mostrados é a sua dependência dos preços de todos os outros produtos envolvidos.
- Especialmente para o caso de produtos diferenciados e/ou com um número grande de produtores, podemos imaginar que o número de coeficientes a ser estimados rapidamente exaure a informação contida na amostra, por maior que ela seja.
  - Por exemplo, com 9 produtos temos 81 coeficientes de preços, mais 9 coeficientes de renda, NO MÍNIMO.
- A principal solução para este problema passa pela agregação do processo de tomada de decisões

Agregação na Tomada de Decisões

- Segundo Green (1964), a agregação pode ser definida como um processo segundo o qual uma parte da informação disponível para a solução de um problema é descartada com o fim de tornar o problema mais gerenciável.
- A agregação será utilizada para simplificar o processo de cálculo das elasticidades-preço e cruzadas da demanda ao supormos a separabilidade nas decisões de demanda.
- A separabilidade nas decisões de demanda está relacionada com a separabilidade na função utilidade.

Separabilidade e Aditividade na Função Utilidade

- Do ponto de vista de separabilidade, podemos assumir que um ordenamento de preferências é diretamente aditivo se ele pode ser representado por uma função da forma:

$$U(X) = T(v_i(x_i))$$

- Nada garante que precisamos ter apenas um bem no vetor x_i. Neste caso, teríamos algo análogo a uma árvore de utilidade, em que são escolhidos os gastos nos níveis mais elevados primeiro e, em segundo lugar, são escolhidos nos mais baixos. Esta é a idéia de *orçamento em dois estágios*.

Orçamento em Dois Estágios – Cont.

- No primeiro estágio, a alocação é possível com o conhecimento do gasto total e dos valores de "índices de preços" definidos para cada um dos subgrupos.
- No segundo estágio, as despesas individuais são definidas com base nos gastos dentro do grupo e os valores dos preços de cada bem dentro do grupo.
- Note-se que a separabilidade, como mostramos acima, é condição necessária e suficiente para o segundo estágio do orçamento em dois estágio.
- Neste caso, de 81 coeficientes, precisamos de 36 (3 pacotes de 9 coeficientes nos estágios inferiores mais um pacote com 9 coeficientes no estágio superior), além dos de renda.

Orçamento em Dois Estágios – Exemplo:

- Vamos fazer um exemplo, supondo que exista um estágio superior em que são determinados os consumos agregados de um produto, e em um nível inferior são determinados os gastos em cada uma das marcas de um produto.
- No nível inferior iremos supor que as demandas para cada produto sejam dadas pelo modelo AIDS, na sua versão linearizada:

$$s_i = \alpha_i + \sum_i \beta_{ki} \ln p_k + \gamma_i \ln \left(\frac{w}{\mathbf{P}*} \right)$$

- Vamos supor adicionalmente que no nível superior tenhamos uma demanda log-linear (desconsiderando as restrições que mencionei mais acima):

$$\ln Q = \alpha_N + \beta \ln W + \Gamma \ln \mathbf{P}^* + etc$$

Elasticidades-Preço e Cruzadas

- Neste caso, as elasticidades-preço e renda terão os componentes que mencionamos acima, mas terão um elemento adicional, que representa o efeito da mudança dos preços sobre a alocação determinada no estágio superior. Desta forma, temos as seguintes elasticidades-preço e elasticidades cruzadas:

$$
\begin{aligned}
e_{ii} &= \frac{\beta_{ii} - \gamma_i \bar{s}_i}{s_i} - 1 + \left(1 + \frac{\gamma_i}{s_i}\right)(1+\Gamma)\bar{s}_i \\
e_{ij} &= \frac{\beta_{ij} - \gamma_i \bar{s}_j}{s_i} + \left(1 + \frac{\gamma_i}{s_i}\right)(1+\Gamma)\bar{s}_j
\end{aligned}
$$