

Teoremas Básicos de Equações a Diferenças Lineares

(Chiang e Wainwright – Capítulos 17 e 18)

Caracterização Geral de Equações a diferenças Lineares:

Seja a seguinte especificação geral de uma equação a diferença linear de ordem k :

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = c(t)$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_k$ são parâmetros constantes e $c(t)$ uma dada e conhecida função na variável tempo t .

Se $c(t)$ é uma função constante, ou seja, não depende de tempo ($c(t) = c$), dizemos que a equação a diferença é do tipo **Autônoma**:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = c$$

Se $c(t) = 0$, dizemos que a equação a diferença é **Homogênea**:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = 0$$

Por outro lado, dada uma equação a diferença linear qualquer:

$$a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_k x_{t-k} = g(t)$$

Podemos associar a ela o que se denomina de a sua **equação homogênea correspondente**, obtida impondo-se que $g(t) = 0$:

$$a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + \dots + a_k x_{t-k} = 0$$

Dada uma equação a diferença linear qualquer:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = c(t)$$

diz-se que a sua **equação homogênea correspondente** é dada por: (impondo-se que $c(t) = 0$)

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = 0$$

Teoremas Básicos:

Teorema 1: Considere uma equação a diferença linear de ordem k , homogênea:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = 0$$

Se a função $y(t)$ é uma solução dessa equação, então $y'(t) = A \cdot y(t)$ também é uma solução da mesma equação, para qualquer escalar constante não nulo A .

Teorema 2: Considere uma equação a diferença linear de ordem k , homogênea:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = 0$$

Se as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções distintas (ou seja, linearmente independentes) dessa equação, então $y'(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ também é uma solução da mesma equação, onde A_1 e A_2 são duas constantes arbitrárias.

Teorema 3: A solução geral de qualquer equação a diferenças linear e homogênea de ordem k é dada por:

$$y(t, A_1, A_2, \dots, A_k) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t) + \dots + A_k y_k(t)$$

onde as funções $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ são k soluções distintas ou linearmente independentes daquela equação, e $A_1, A_2, \dots, A_k$ são constantes arbitrárias.

Teorema 4: Considere qualquer equação a diferenças linear de ordem k :

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = c(t) \quad (1)$$

Seja $y_p(t)$ uma solução particular qualquer dessa equação e $y_c(t, A_1, \dots, A_k)$ a solução geral da equação homogênea correspondente, ou a função complementar. Então a solução geral da equação (1) acima é dada por:

$$y(t) = y_c(t, A_1, \dots, A_k) + y_p(t)$$

Método Geral de Solução de Equações a diferenças Lineares:

Dada qualquer equação a diferenças linear de ordem k:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_k y_{t-k} = c(t) \quad (1)$$

Pode-se resolvê-la através dos seguintes passos:

1º Passo: Impondo-se $c(t) = 0$, obtém-se a solução geral da sua equação homogênea correspondente $y_c(t) = y(t, A_1, \dots, A_k)$, a partir das k soluções que podem ser encontradas para o parâmetro λ , propondo-se a especificação genérica para $\tilde{y}(t) = \lambda^t$.

Obs.: A solução $y_c(t)$ é também conhecida por Função Complementar

2º Passo: Encontrar uma solução particular $y_p(t)$ da equação analisada (1), através do seguinte procedimento geral:

Propõe-se como especificação de $y_p(t)$, a mesma especificação da parte da equação (1) $c(t)$. Por exemplo:

- Se $c(t) = c$ propõe-se $y_c(t) = \mu$
- Se $c(t) = a + bt$ propõe-se $y_c(t) = \alpha + \beta t$
- Se $c(t) = ae^t$ propõe-se $y_c(t) = \alpha e^t$

Obs.: Se devido aos valores dos parâmetros, a função proposta não funcionar, simplesmente modifica-se a especificação da função proposta, multiplicando-a por t

3º Passo: Soma-se as duas soluções encontradas nos dois passos anteriores para obter a solução geral da equação analisada (1):

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$$

4º Passo: Se as k condições iniciais $y(0) = v_0$, $y(1) = v_0$,, $y(k-1) = v_{k-1}$ forem conhecidas, calcula-se a solução específica da equação analisada (1), obtendo-se os valores dos k parâmetros arbitrários envolvidos em $y_c(t)$. Isso é feito calculando-se os valores de $A_1, \dots, A_k$, através do sistema de k equações definidos por:

$$v_0 = y(t=0) ; v_1 = y(t=1) ; \dots; v_{k-1} = y(t=k-1)$$

Exemplo de Equação a Diferença Linear de Primeira Ordem

Modelo da Teia de Aranha (Cobweb)

Modelo de Mercado Teia de Aranha (Cobweb)

Hipóteses:

- Mercado de um produto cujo período de produção é relativamente longo, sendo que o resultado desse processo só ocorre no período seguinte ao da decisão de quanto produzi-lo;
- Suponha que esse mercado pode ser representado pelas seguintes funções de demanda e oferta:

$$\begin{aligned}Q_t^d &= a - bP_t \\ Q_t^o &= c + dP_{t-1} \\ Q_t^d &= Q_t^o\end{aligned}$$

onde **a**, **b**, **c**, **d** são parâmetros positivos (É suposto que todas as demais variáveis que também afetam a demanda e a oferta do produto estão fixadas e agregadas, respectivamente, nos parâmetros **a** e **c**).

Equilíbrio de curto prazo nesse mercado:

$$a - b.P_t = c + d.P_{t-1}$$

ou

$$P_t = \alpha + \beta.P_{t-1} \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{c-a}{b} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{d}{b}$$

Questão: Qual o comportamento do preço de mercado desse produto ao longo do tempo? Em particular, na medida em que o tempo passa, esse preço tende a estacionar em algum nível, ou seja, existe algum preço de equilíbrio de longo prazo nesse mercado?

Solução pelo Método de Resolução de Equações a Diferenças:

Dada a equação a diferença $P_t - \beta \cdot P_{t-1} = \alpha$, tem-se que a equação homogênea correspondente é dada por

$$P_t - \beta \cdot P_{t-1} = 0$$

Vamos propor como solução dessa equação $\tilde{P}(t) = \lambda^t$

Substituindo na expressão acima temos:

$$\lambda^t - \beta \lambda^{t-1} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^{t-1}(\lambda - \beta) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \beta$$

Portanto, a solução geral da homogênea correspondente é:

$$\tilde{P}(t) = A \cdot \beta^t = A \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^t$$

Solução particular para a equação $P_t - \beta \cdot P_{t-1} = \alpha$:

Dado que $g(t) = \alpha$, ou seja, uma constante, podemos tomar como uma solução particular dessa equação a expressão

$$\bar{P}(t) = \mu \quad \text{para todo } t$$

Substituindo-se essa solução na equação a diferença, tem-se que:

$$\mu - \beta \cdot \mu = \alpha \quad \text{ou seja} \quad \mu = \frac{\alpha}{1 - \beta} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{c - a}{b + d}$$

Portanto, tem-se que uma solução particular da equação analisada é dada por

$$\bar{P}(t) = \frac{c-a}{b+d} \quad \text{para todo } t$$

OBS.: Note que essa solução tem uma interpretação muito clara: é a solução estacionária da equação, ou seja, o preço de equilíbrio de longo prazo do mercado analisado. Vamos então denominá-lo de

$$\bar{P}(t) = P^* = \frac{c-a}{b+d}$$

Solução Geral da Equação:

$$P(t) = \tilde{P}(t) + \bar{P}(t) = A \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^t + P^*$$

Dada a condição inicial de que o preço em $t = 0$ é conhecido e igual a P_0 , tem-se que o valor da constante arbitrária A é dado por:

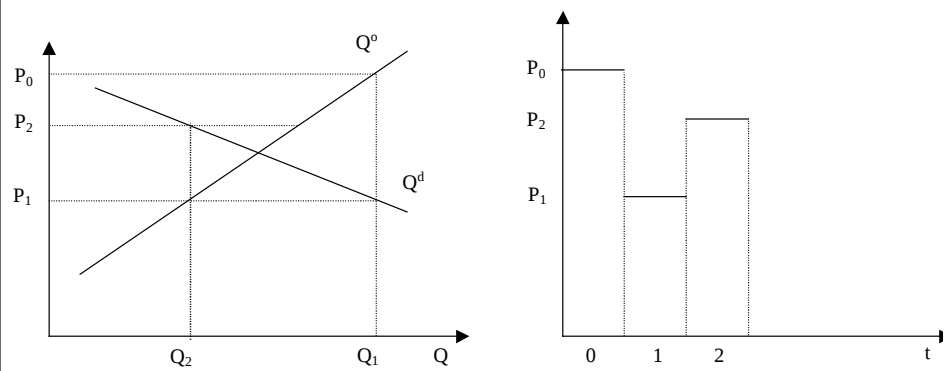
$$P_0 = P(t=0) = A \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^0 + P^* \quad \text{ou} \quad A = P_0 - P^*$$

Portanto, tem-se que a solução particular da equação analisada é dada por:

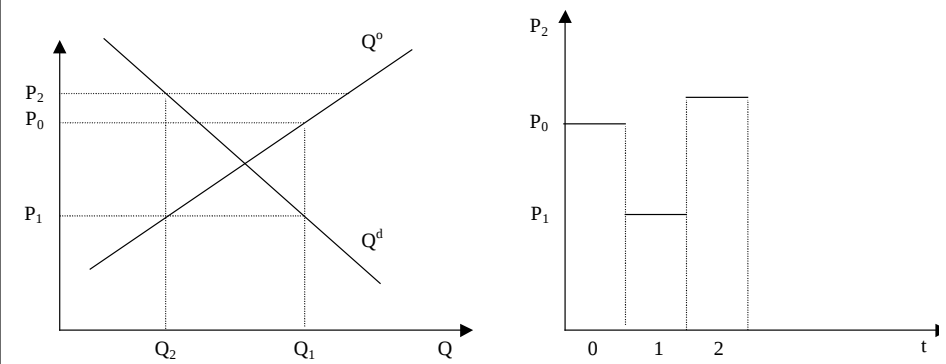
$$P(t) = P^* + (P_0 - P^*) \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^t$$

Esboço Gráfico das Possibilidades:

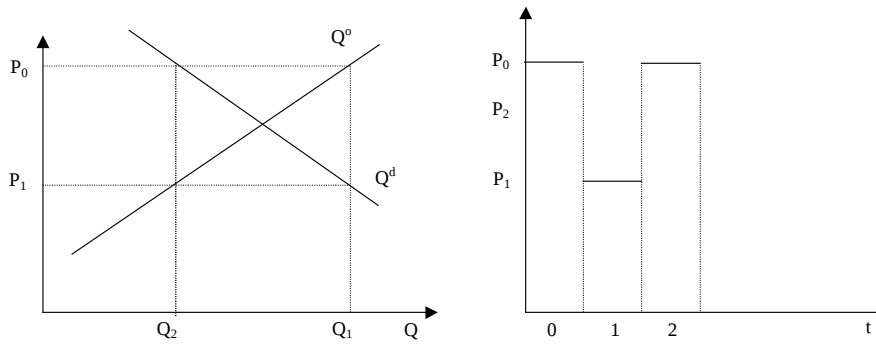
Possibilidade 1 : $d < b$



Possibilidade 2 : $d > b$



Possibilidade 3 : $d = b$



Exemplo de Equação a Diferença Linear de Segunda Ordem

Modelo Macroeconômico Keynesiano com
Acelerador

Exemplo 1: Modelo Keynesiano com Acelerador

Considere o seguinte modelo keynesiano simplificado de uma economia fechada:

$$C_t = a + bY_{t-1}$$

$$I_t = v \cdot \Delta Y_{t-1} = v \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

$$G_t = G \quad \text{para todo } t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Equação reduzida desse modelo:

$$Y_t - (b + v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = G + a$$

Hipóteses sobre os Valores dos Parâmetros:

- Parâmetros: $a = 50$; $b = 0,75$; $v = 2,5$; e $G = 100$.
- Condições Iniciais: $Y_0 = 200$; $Y_1 = 230$

Nesse caso, temos que:

$$Y_t - 3,25Y_{t-1} + 2,5Y_{t-2} = 150$$

a) **Solução Particular dessa Equação:**

Dado que $c(t) = \text{constante}$, propomos $Y_p(t) = Y^*$, para todo t :

$$Y^* - 3,25Y^* + 2,5.Y^* = 150$$

ou

$$Y^* = \frac{150}{1 - 3,25 + 2,50} = 600$$

Logo, a solução particular é dada por

$$Y_p(t) = Y^* = 600 \quad \text{para todo } t$$

b) **Solução Geral da Homogenea Correspondente:**

$$Y_t - 3,25Y_{t-1} + 2,5.Y_{t-2} = 0$$

Propondo-se que $Y_c(t) = \lambda^t$, devemos determinar o valor do parâmetro desconhecido λ tal que:

$$\lambda^t - 3,25\lambda^{t-1} + 2,5\lambda^{t-2} = 0 \quad \text{para todo } t$$

ou

$$\lambda^{t-2}(\lambda^2 - 3,25\lambda + 2,5) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Ou seja, λ necessita ser a raiz da equação do segundo grau:

$$\lambda^2 - 3,25\lambda + 2,5 = 0$$

Resolvendo essa equação encontramos as raízes:

$$\lambda_1 = 1,25 \text{ e } \lambda_2 = 2,00$$

Logo, a solução geral da equação homogênea correspondente à equação analisada é dada por:

$$Y_c(t) = A_1(1,25)^t + A_2(2)^t$$

Temos finalmente que a solução geral da equação analisada é então dada por:

$$Y(t) = Y_c(t) + Y_p(t) = A_1(1,25)^t + A_2(2)^t + 600$$

c) **Uma Solução Específica da Equação Analisada:**

Dadas as duas condições iniciais, temos que:

$$Y(t=0) = A_1(1,25)^0 + A_2(2)^0 + 600 = 200$$

e

$$Y(t=1) = A_1(1,25) + A_2(2) + 600 = 230$$

Resolvendo-se esse sistema linear de duas equações a duas incógnitas, temos que $A_1 = -573,33$ e $A_2 = 173,33$

Assim sendo, temos então a seguinte equação que descreve o comportamento do nível de produto da economia analisada:

$$Y_t = 600 - 573,33(1,25)^t + 173,33(2)^t$$

Gráfico 1

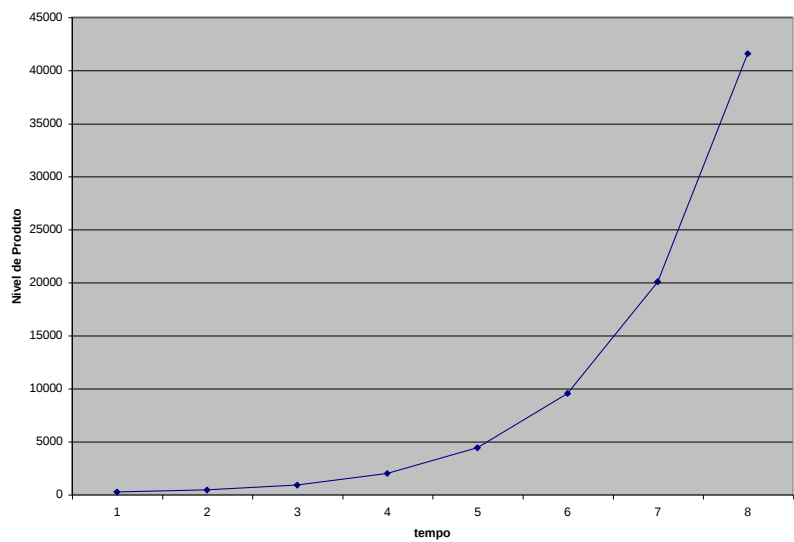


Ilustração com outros valores dos parâmetros

Gráfico 2

Caso 2: $Y_t = 600 + 3.500(-1,25)^t + 2.200(1,35)^t$

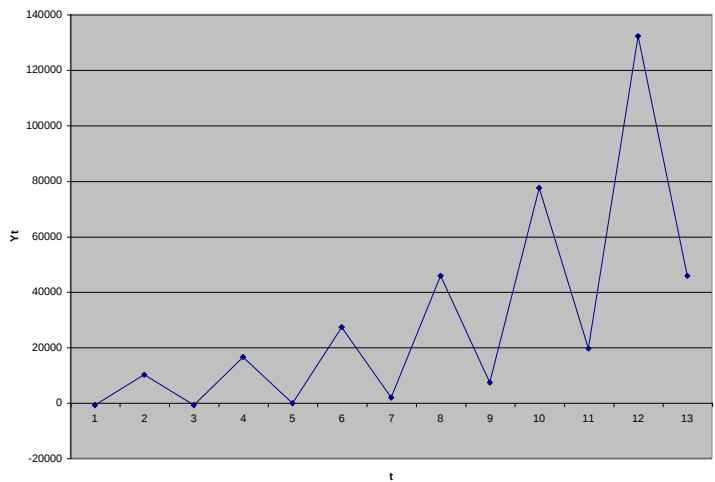
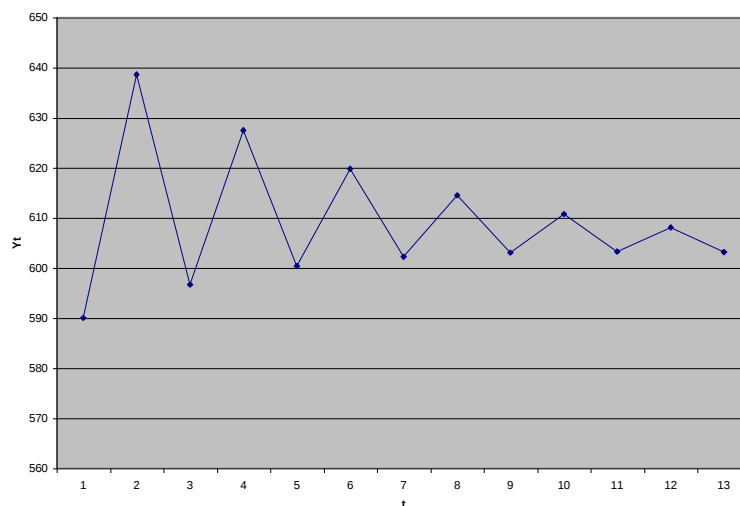


Gráfico 3

Caso 3: $Y_t = 600 + 35(-0,8)^t + 20(0,9)^t$



Exemplo 2: Equação a Diferenças com Raízes Complexas

Considere a seguinte equação a diferenças de 2ª ordem:

$$y_t - \sqrt{3} \cdot y_{t-1} + y_{t-2} = 100$$

a) Solução Particular dessa Equação:

Propondo $y_p(t) = \mu$, para todo t , temos que:

$$\mu - \sqrt{3} \cdot \mu + \mu = 100$$

ou

$$\mu = \frac{100}{2 - \sqrt{3}} \simeq 373,21$$

Logo, a solução particular é $y_p(t) = 373,21$, para todo t

b) Solução Geral da Homogenea Correspondente:

$$y_t - \sqrt{3} \cdot y_{t-1} + y_{t-2} = 0$$

Propondo-se a forma $y_c(t) = \lambda^t$, tem-se que:

$$\lambda^{t-2}(\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1) = 0$$

ou seja, a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0$$

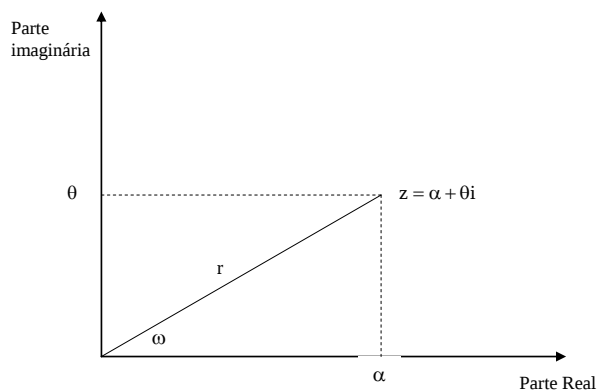
Que resulta nas seguintes duas raízes complexas:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Como tratar casos de Equações a Diferenças que apresentam raízes complexas

Para analisar os casos de Equações a Diferenças (e também de Equações Diferenciais) cujas soluções apresentam raízes complexas, vamos fazer um breve resumo sobre representação gráfica e Polar de números complexos e também o uso de alguns resultados existentes na matemática sobre esses números

Representação Gráfica e Polar de um N° Complexo



Representação Polar: $z = r \cdot \cos \omega + r \cdot \text{sen} \omega \cdot i = r(\cos \omega + \text{sen} \omega \cdot i)$

Portanto, as duas raízes da equação característica para obtenção da solução complementar podem ser representadas por

$$\lambda_1 = r(\cos \omega + i \cdot \text{sen} \omega) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = r(\cos \omega - i \cdot \text{sen} \omega)$$

Assim, a solução geral da equação homogênea correspondente ou seja, a solução complementar pode ser escrita como:

$$Y_c(t) = A_1 [r(\cos \omega + i \cdot \text{sen} \omega)]^t + A_2 [r(\cos \omega - i \cdot \text{sen} \omega)]^t$$

ou

$$Y_c(t) = r^t \left\{ [A_1 (\cos \omega + i \cdot \text{sen} \omega)^t] + [A_2 (\cos \omega - i \cdot \text{sen} \omega)^t] \right\}$$

Por outro lado, na matemática dos números complexos existe o chamado **Teorema de Moivre**, que estabelece que:

$$(\cos \omega \pm i \cdot \text{sen} \omega)^t = [\cos(\omega \cdot t) \pm i \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]$$

Considerando isso, podemos reescrever a solução complementar como:

$$Y_c(t) = r^t \left\{ [A_1 (\cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t))] + [A_2 (\cos(\omega t) - i \cdot \text{sen}(\omega t))] \right\}$$

Para realizar o último passo que envolve a eliminação do número imaginário **i** dessa função complementar, tornando-a uma função de números reais, vamos lembrar que A_1 e A_2 são duas constantes **arbitrárias**, podendo então ser quaisquer números. Vamos então tomar para elas, os seguintes dois números complexos conjugados arbitrários: **$(a \pm bi)$**

Substituindo-as na solução complementar temos então que:

$$Y_c(t) = r^t \left\{ [(a + bi)(\cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t))] + [(a - bi)(\cos(\omega t) - i \cdot \text{sen}(\omega t))] \right\}$$

Fazendo as multiplicações dentro de cada colchete na expressão acima tem-se que:

$$Y_c(t) = r^t \left\{ a \cos(\omega t) + i a \text{sen}(\omega t) + i b \cos(\omega t) - b \text{sen}(\omega t) + a \cos(\omega t) - i a \text{sen}(\omega t) - i b \cos(\omega t) - b \text{sen}(\omega t) \right\}$$

Ou, finalmente que:

$$Y_c(t) = r^t \{ B_1 \cos(\omega t) + B_2 \text{sen}(\omega t) \} \quad \text{onde} \quad B_1 = 2a \text{ e } B_2 = -2b$$

Voltando para o nosso exemplo que estávamos analisando, as duas raízes obtidas foram:

$$\text{Raízes: } \lambda = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Nessas duas raízes complexas conjugadas $\alpha \pm \theta i$ temos que:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \theta^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\theta = r \cdot \sin \omega \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \sin \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = 30^\circ$$

$$\alpha = r \cdot \cos \omega \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \omega$$

Substituindo-as na solução complementar temos então que:

$$Y_c(t) = 1^t \left\{ B_1 \cos(30^\circ \cdot t) + B_2 \sin(30^\circ \cdot t) \right\}$$

c) **Solução Geral e Específica da Equação Analisada**

$$Y(t) = Y_c(t) + Y_p(t)$$

$$Y(t) = B_1 \cos(30^\circ \cdot t) + B_2 \sin(30^\circ \cdot t) + 373,21$$

Dadas as condições iniciais $Y(t=0) = 0$ e $Y(t=1) = 100$, tem-se que:

$$Y(0) = B_1 \cos(0^\circ) + B_2 \sin(0^\circ) + \frac{100}{2 - \sqrt{3}} = 0$$

e

$$Y(1) = B_1 \cos(30^\circ) + B_2 \sin(30^\circ) + \frac{100}{2 - \sqrt{3}} = 100$$

Sabendo-se que:

$$\cos(0^\circ) = 1; \sin(0^\circ) = 0; \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

tem-se que:

$$B_1 + \frac{100}{2 - \sqrt{3}} = 0$$

$$B_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + B_2 \frac{1}{2} + \frac{100}{2 - \sqrt{3}} = 100$$

Portanto, $B_1 = -\frac{100}{2 - \sqrt{3}}$

e

$$\left(\frac{-100}{2 - \sqrt{3}} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + B_2 \frac{1}{2} + \frac{100}{2 - \sqrt{3}} = 100$$

ou

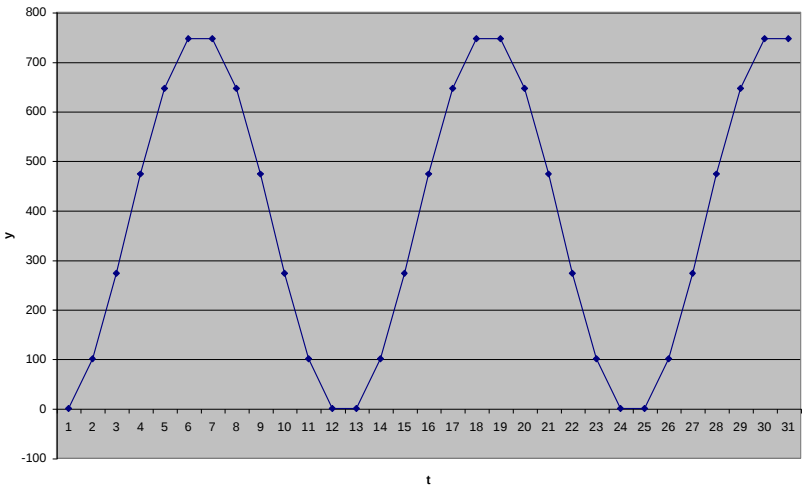
$$B_2 = 2 \left(\frac{200 - 100\sqrt{3} + 50\sqrt{3} - 100}{2 - \sqrt{3}} \right) = 2 \left(\frac{100 - 50\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) = 100 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) = 1$$

Portanto, temos finalmente que:

$$y(t) = +100.\text{sen}(30^\circ.t) + 373,21[1 - \cos(30^\circ.t)]$$

Para visualizar o comportamento dessa função, considere a sua simulação numérica e gráfico, através da planilha Excel:

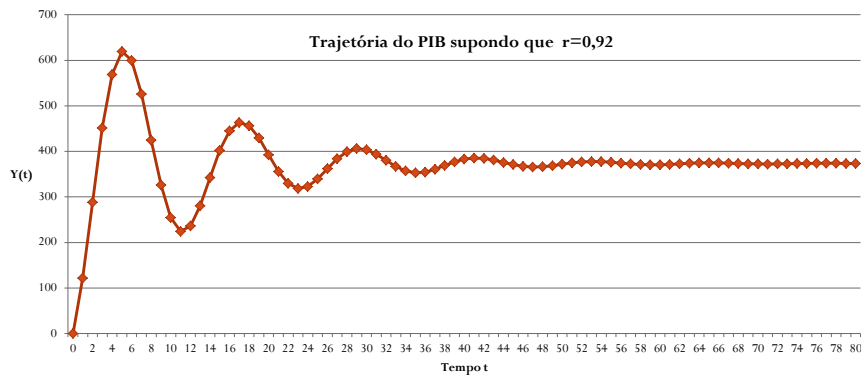
t		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ω.t	Graus	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
	Radianos	0	0.523599	1,047198	1.570796	2.094395	2.617994	3.141593	3,665191	4.18879	4,712389	5,235988	5,759587	6,283185
Coseno		1	0,866025	0.5	0	-0.5	-0,86603	-1	-0,86603	-0.5	0	0.5	0,866025	1
Seno		0	0.5	0,866025	1	0,866025	0.5	0	-0.5	-0,86603	-1	-0,86603	-0.5	0
y(t)		0.0	100.0	273.2	473.2	646.4	746.4	746.4	646.4	473.2	273.2	100.0	0.0	0.0



Se supormos que no exemplo analisado, apenas o valor de r tivesse sido diferente e igual a 0,92, a solução teria sido:

$$Y(t) = 0,92^t \left[-373,21 \cos(30^\circ \cdot t) + 100 \sin(30^\circ \cdot t) \right] + 373,21$$

E o gráfico da trajetória do PIB $Y(t)$ seria:



Fim