
Física Moderna II

Aula 07

Marcelo G. Munhoz

munhoz@if.usp.br

Edifício HEPIC, sala 202

ramal 916940

Como podemos descrever teoricamente o núcleo atômico?

- A princípio, temos que resolver a equação de Schrödinger para todos os nucleons que constituem um núcleo:

$$H\psi = E\psi,$$

$$H = \sum_{i=1}^A \left[\frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{j=1}^{A-1} v_{ij} \right] \text{ onde } v_{ij} \text{ é o potencial de interação entre os nucleons } i \text{ e } j.$$

Como podemos descrever teoricamente o núcleo atômico?

- Este é um problema de muitos corpos de resolução extremamente difícil
- Além disso, não conhecemos o potencial de interação entre os nucleons, diferentemente do que acontece no eletromagnetismo, por exemplo
- Portanto, precisamos simplificar nosso problema através de aproximações e a criação de modelos

Modelos nucleares

- Modelos são simplificações de sistemas físicos que devem:
 - Descrever dados previamente observados
 - Prever o resultado de novas medidas
- Veremos três modelos diferentes:
 - Modelo de gás de Fermi
 - Modelo de camadas
 - Modelos coletivos

Modelos nucleares: o potencial médio

- Assumimos que existe um potencial “médio”, que é o resultado de todas as interações entre os nucleons, que age sobre cada nucleon independentemente
- Portanto, dizemos que cada nucleon é **independente** e sofre a ação apenas desse potencial médio
- O próximo passo nesse tipo de modelo é determinar a melhor “forma” para esse potencial médio

Sistemas ligados na mecânica quântica

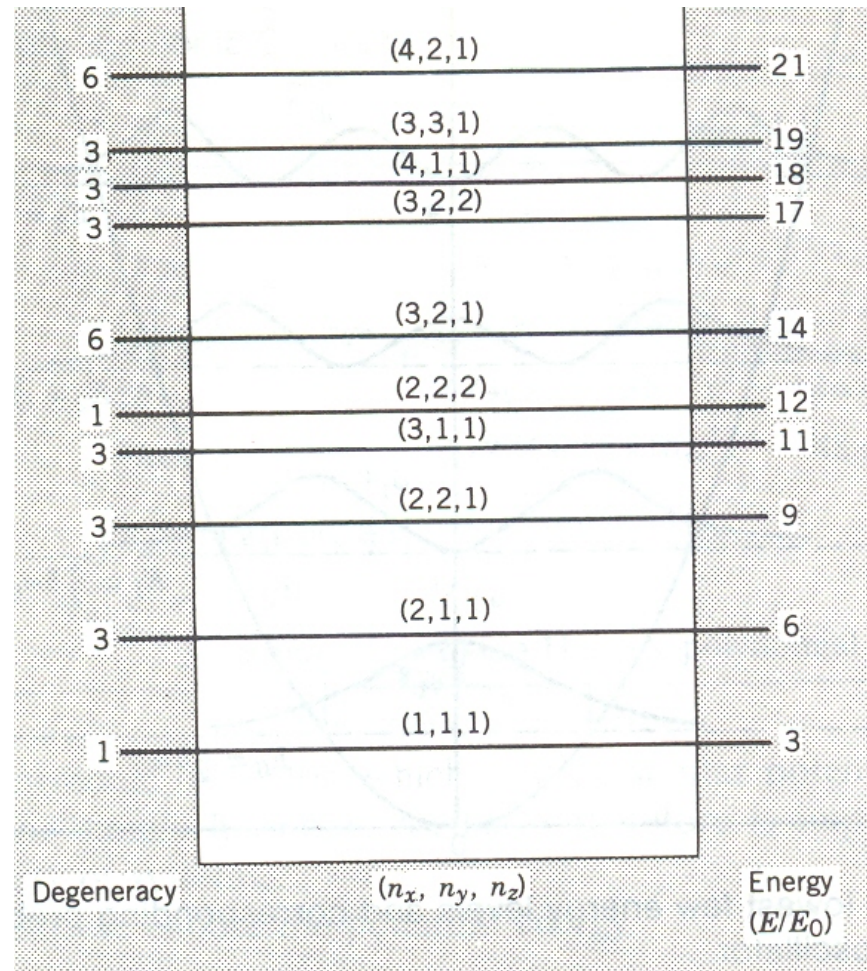
- O núcleo é um sistema ligado de Z prótons e $N (=A-Z)$ nêutrons
- Isso significa que:
 - Esse sistema está restrito a um certo volume no espaço, ou seja, possui auto-estados de energia discretos
 - Existe um potencial que mantém esses nucleons ligados
 - A energia desses estados é negativa, ou seja, é necessário dar energia ao sistema para separar as suas partes
 - A ocupação desses estados deve obedecer o Princípio de Exclusão de Pauli

Modelo de gás de Fermi

- Hipóteses do modelo:
 - ❑ Os nucleons estão confinados em um volume das dimensões do núcleo
 - ❑ Os nucleons movem-se livremente dentro desse volume. A única interação dos nucleons se dá com as paredes do volume de confinamento
 - ❑ Considerando-se prótons e nêutrons como férmions, o tratamento dos sistema é puramente estatístico, como em um gás

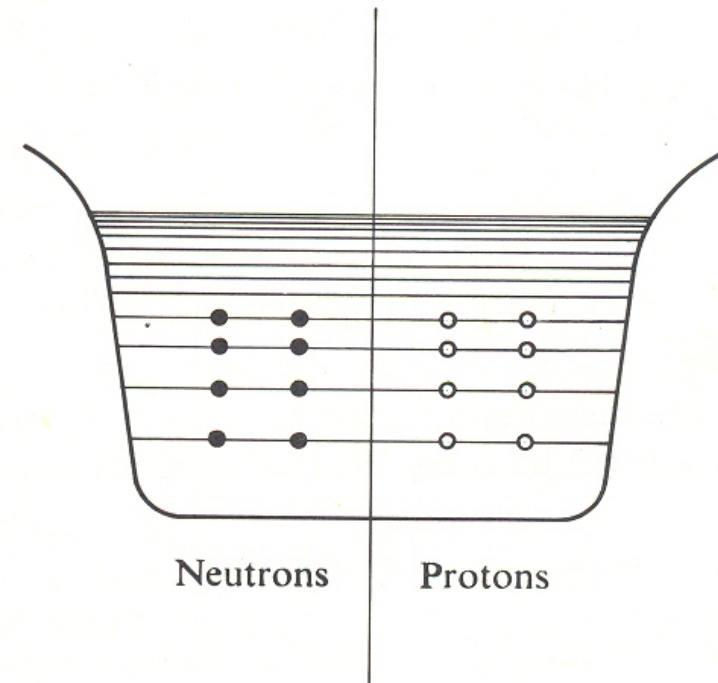
Potencial: poço infinito tridimensional cartesiano

$$V(x,y,z) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq x \leq L \\ & 0 \leq y \leq L \\ & 0 \leq z \leq L \\ \infty, & x < 0, x > L \\ & y < 0, y > L \\ & z < 0, z > L \end{cases}$$

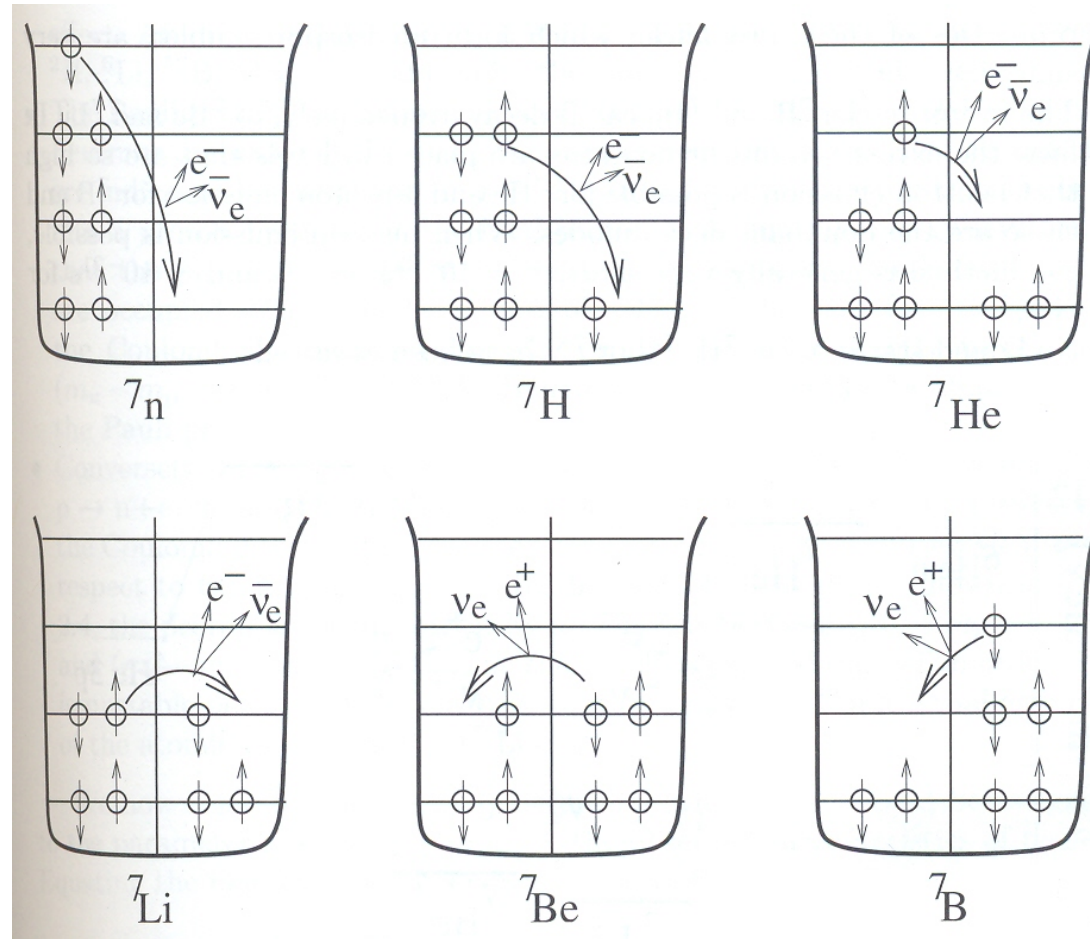


Modelo de gás de Fermi

- Resolução do modelo:
 - Podemos resolver este modelo usando um caixa cúbica com um potencial atrativo V_0 em seu interior e infinito no seu exterior
 - Em seguida, preenchemos os níveis de energia respeitando o princípio de exclusão de Pauli

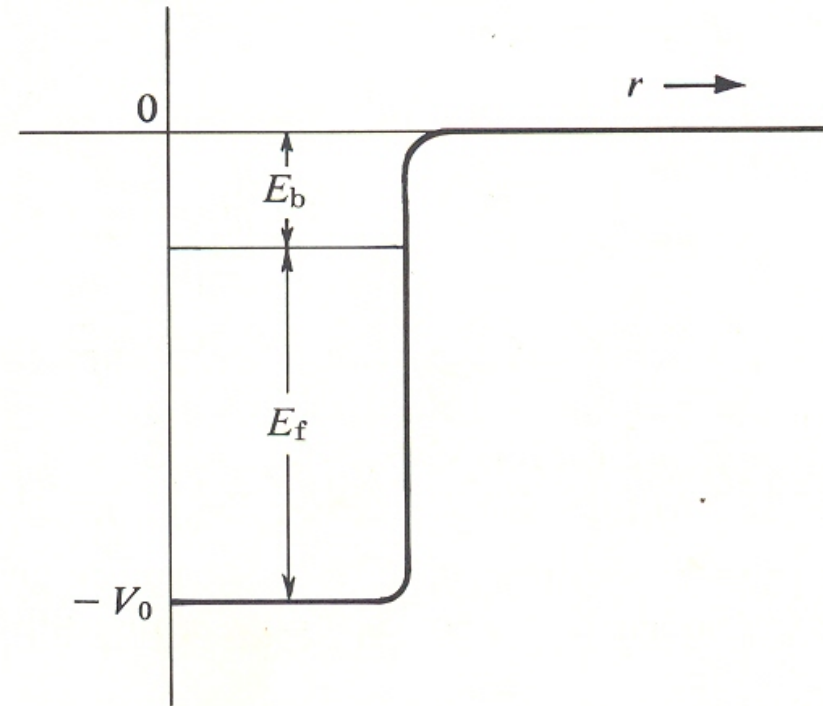


Aplicações do modelo: estabilidade dos núcleos



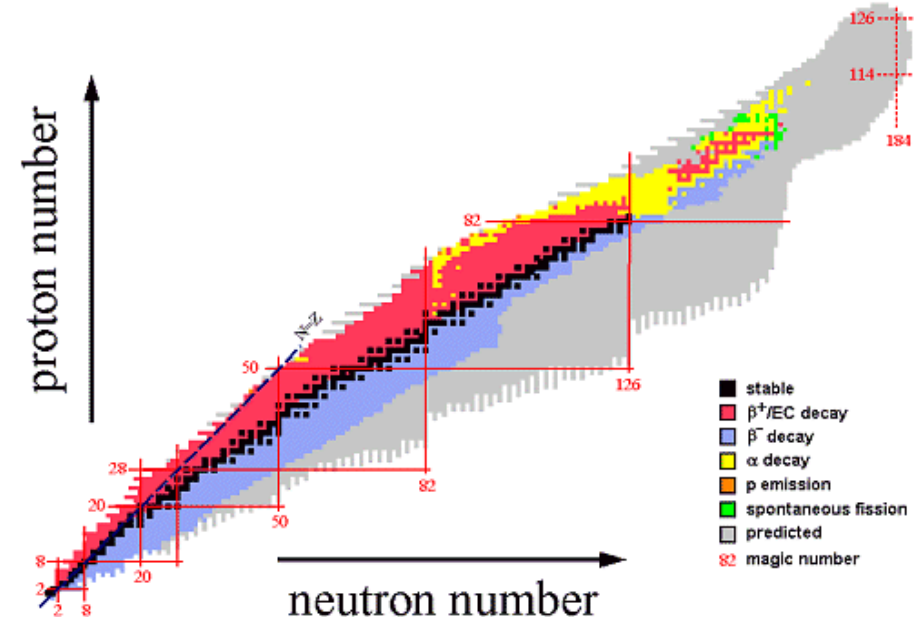
Aplicações do modelo: cálculo “fundo do poço”

- Através deste modelo, podemos obter a profundidade do potencial nuclear, considerando a energia de ligação ($E_b = 8 \text{ MeV}$) e a máxima energia que pode assumir um nucleon (E_f).



Aplicações do modelo: termo de paridade no modelo da gota líquida

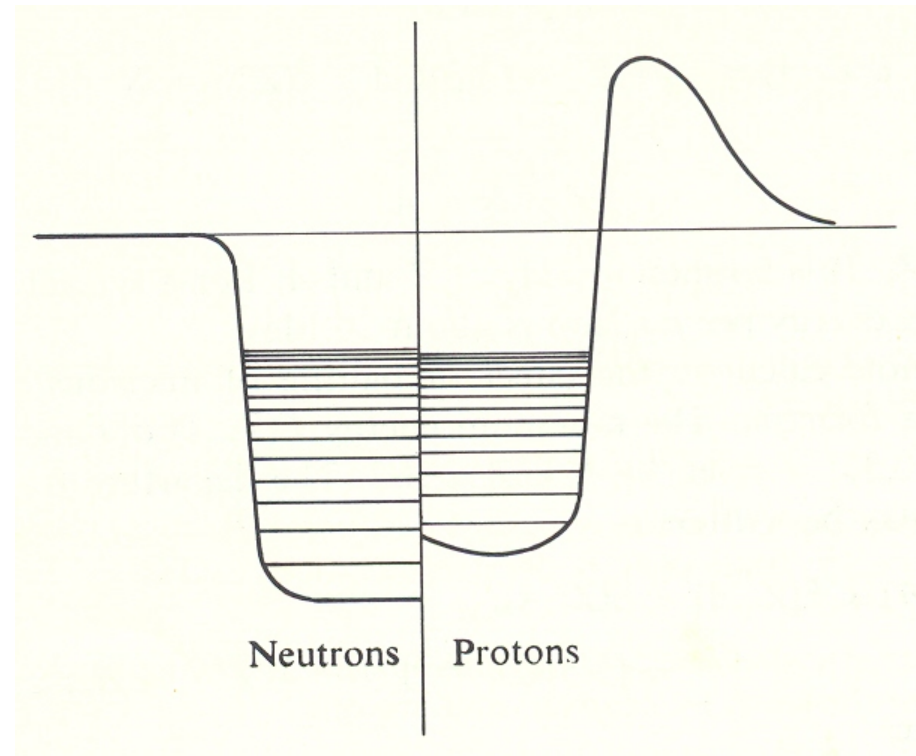
- Núcleos estáveis tendem a apresentar $Z \sim A/2$;
- Essa deve ser uma condição de estabilidade que deve aumentar B ;
- Portanto, podemos acrescentar outro termo proporcional a $(A-2Z)^2/A$ pois esse efeito deve diminuir com o aumento de A .



Aplicações do modelo:

$N > Z$ para núcleos estáveis

- A repulsão Coulombiana diminui a profundidade do poço de potencial para prótons;
- Como a energia máxima é igual, há menos estados para prótons do que para nêutrons.

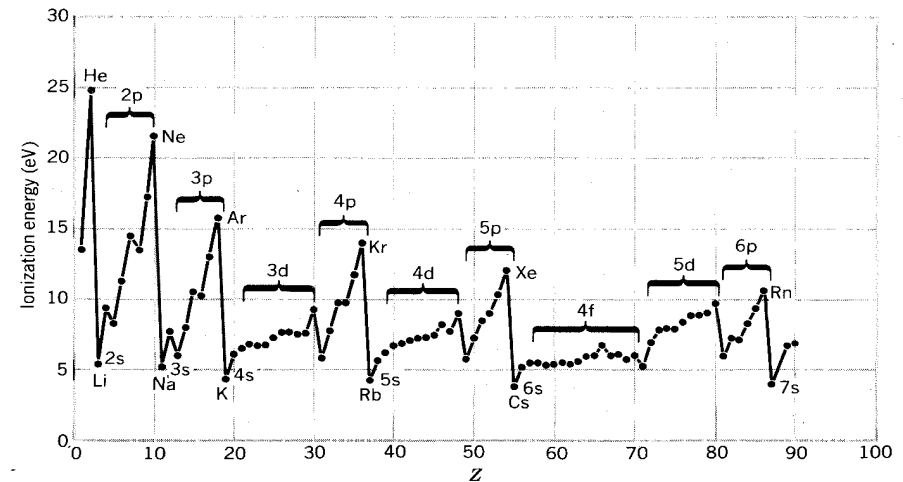
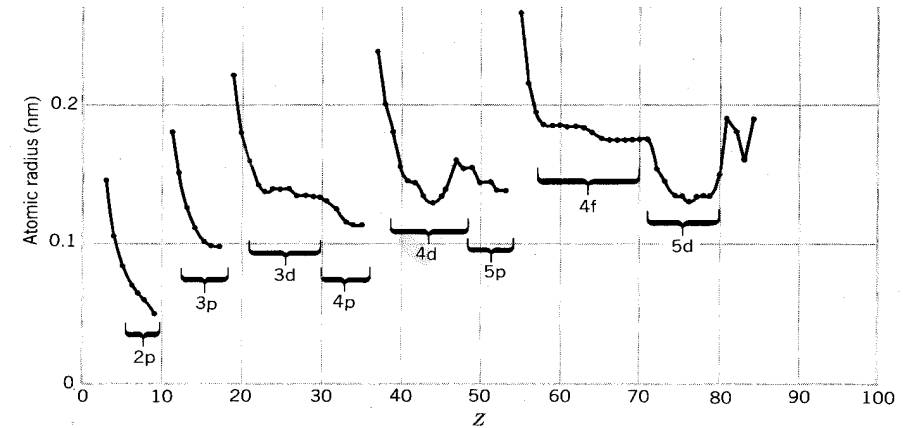


Modelos nucleares

- Modelos são simplificações de sistemas físicos que devem:
 - Descrever dados previamente observados
 - Prever o resultado de novas medidas
- Veremos três modelos diferentes:
 - Modelo de gás de Fermi
 - **Modelo de camadas**
 - Modelos coletivos

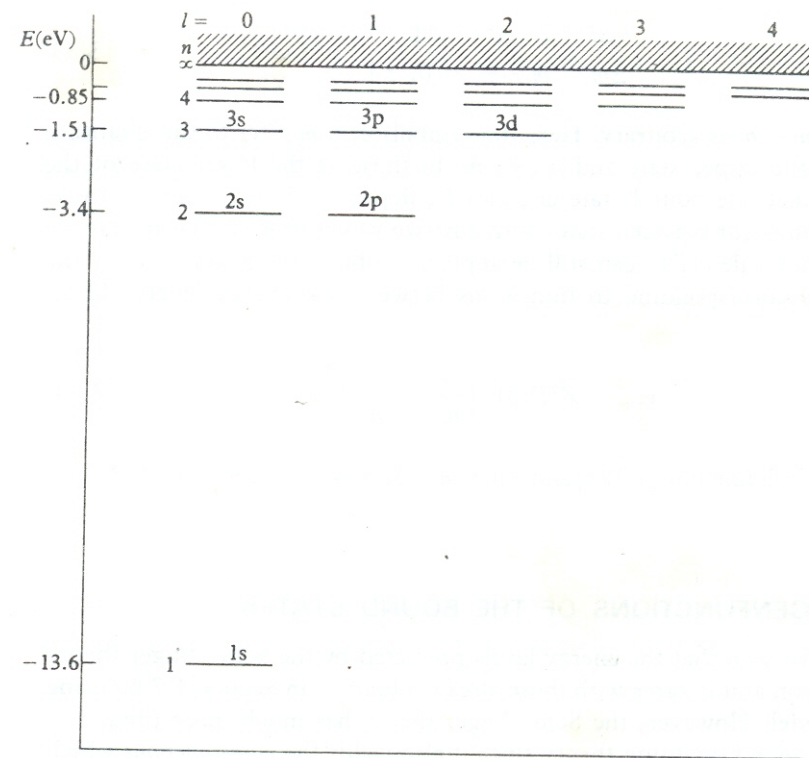
Modelo atômico

- Ao observarmos o comportamento dos elétrons nos átomos, encontramos várias evidências da existência de “camadas”



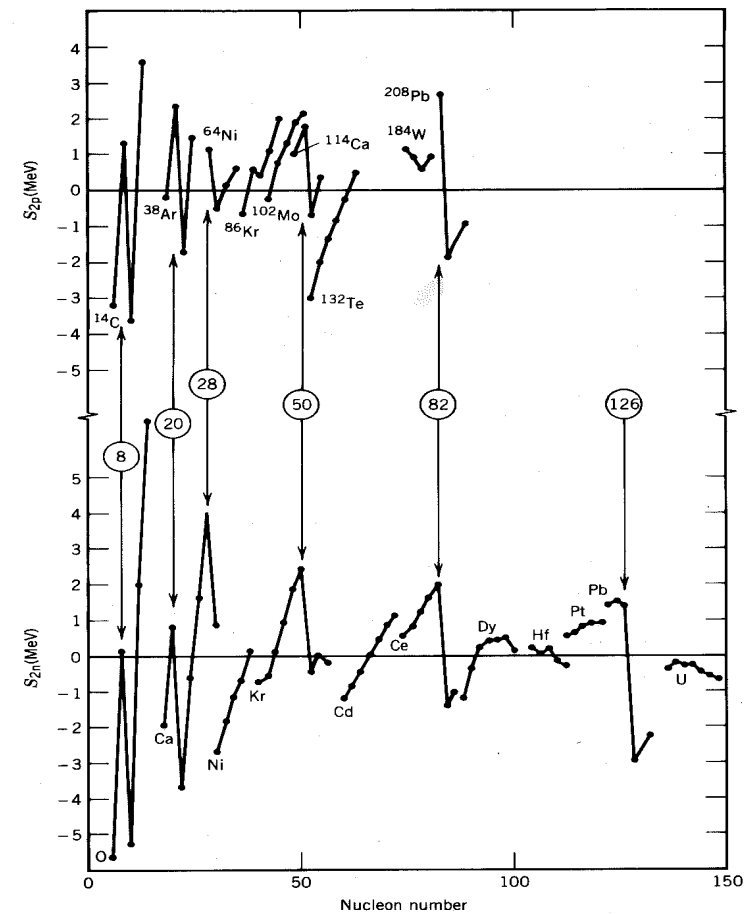
Modelo atômico

- Ao resolvermos a equação de Schrödinger para um potencial Coulombiano (central), obtemos vários níveis de energia no átomo que são preenchidos pelos elétrons segundo o princípio de exclusão de Pauli



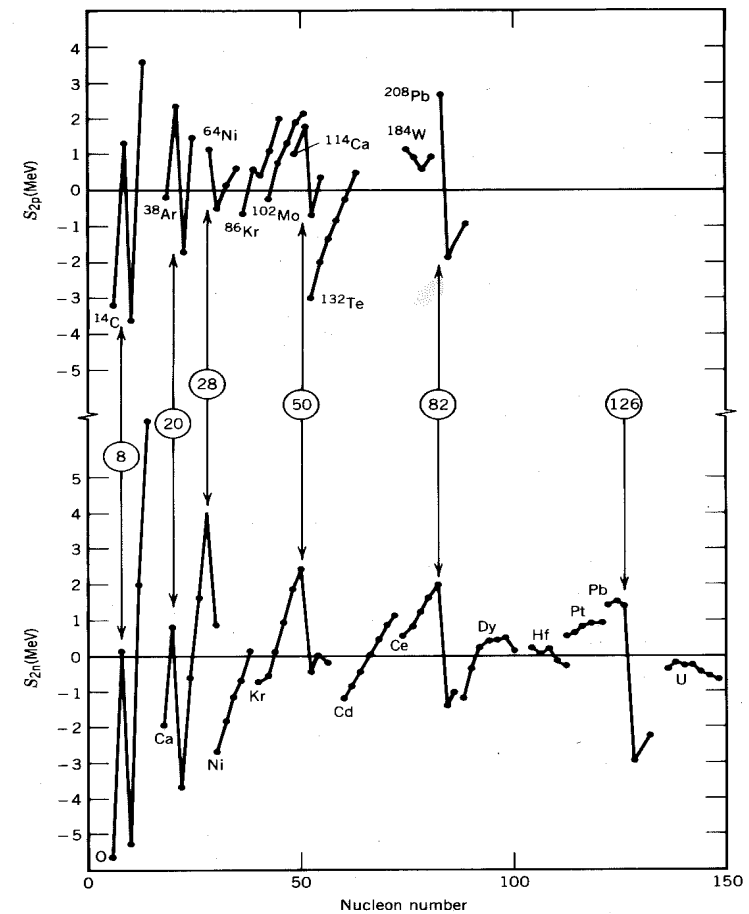
Evidências experimentais para um modelo de camadas para o núcleo

- Para o núcleo, também observamos evidências da existência de camadas
- Um exemplo disso, é a presença de “números mágicos” em algumas propriedades do núcleo



Evidências experimentais para um modelo de camadas para o núcleo

- Duas diferenças cruciais colocam em dúvida a analogia do caso atômico com o nuclear:
 - No átomo, existe um agente externo (o núcleo) gerando o potencial central
 - Os elétrons apresentam órbitas, devido ao alto valor do livre caminho médio



O Modelo de Camadas

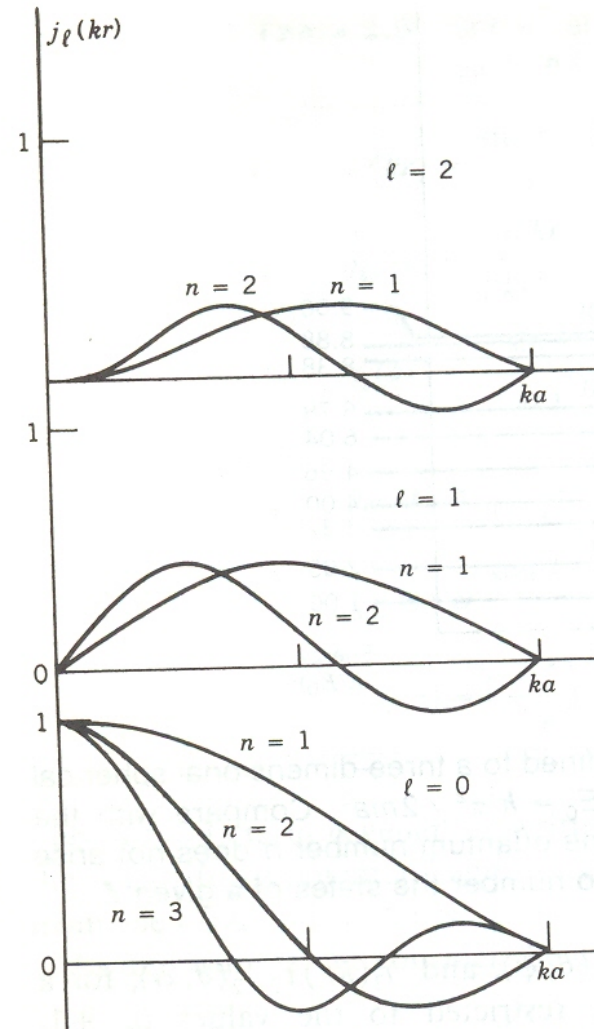
- Apesar desses questionamentos, podemos estender esse modelo para o núcleo e verificar os resultados
- A hipótese básica deste modelo diz que existe um potencial “médio” gerado por todos os nucleons que age sobre cada nucleon individualmente
- Portanto, o primeiro passo nesse modelo é determinar a forma desse potencial médio considerando apenas potenciais centrais

Potencial: poço infinito tridimensional esférico

- Caso mais simples:

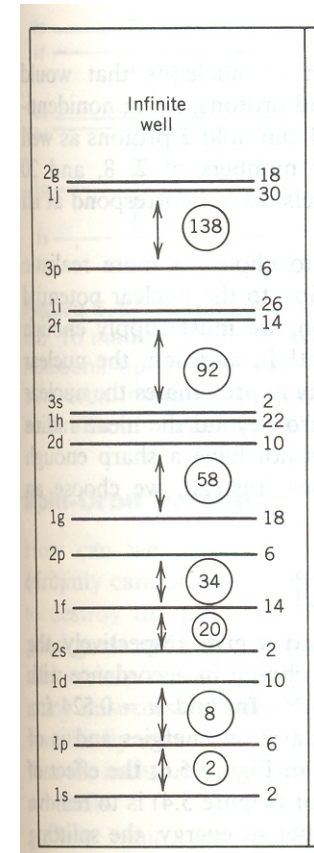
$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

- Para cada n (ordem do zero da função de Bessel), tem-se um nível de energia diferente



Degenerescência do poço esférico infinito

- A degenerescência surge devido:
 - às projeções do momento angular m_l , que apresentam $2l+1$ valores
 - ao spin dos nucleons, que possui 2 valores
- Portanto, a degenerescência total é dada por $2(2l+1)$



Números mágicos

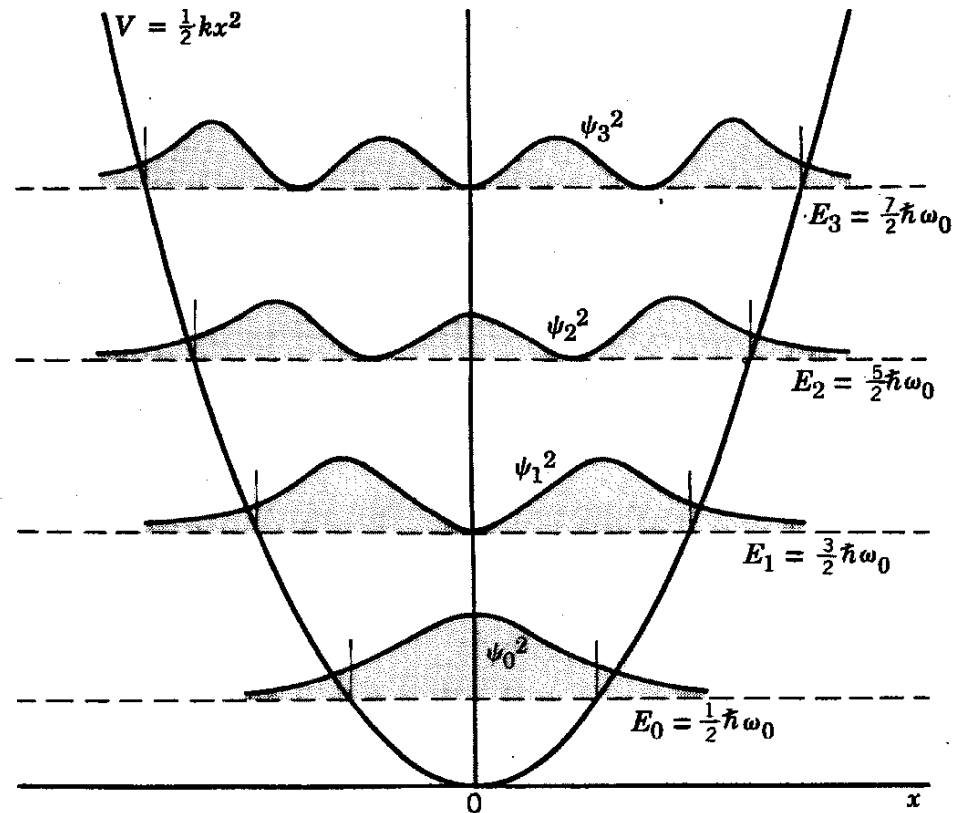
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...

Potencial: oscilador harmônico tridimensional esférico

- O “preferido” dos físicos:

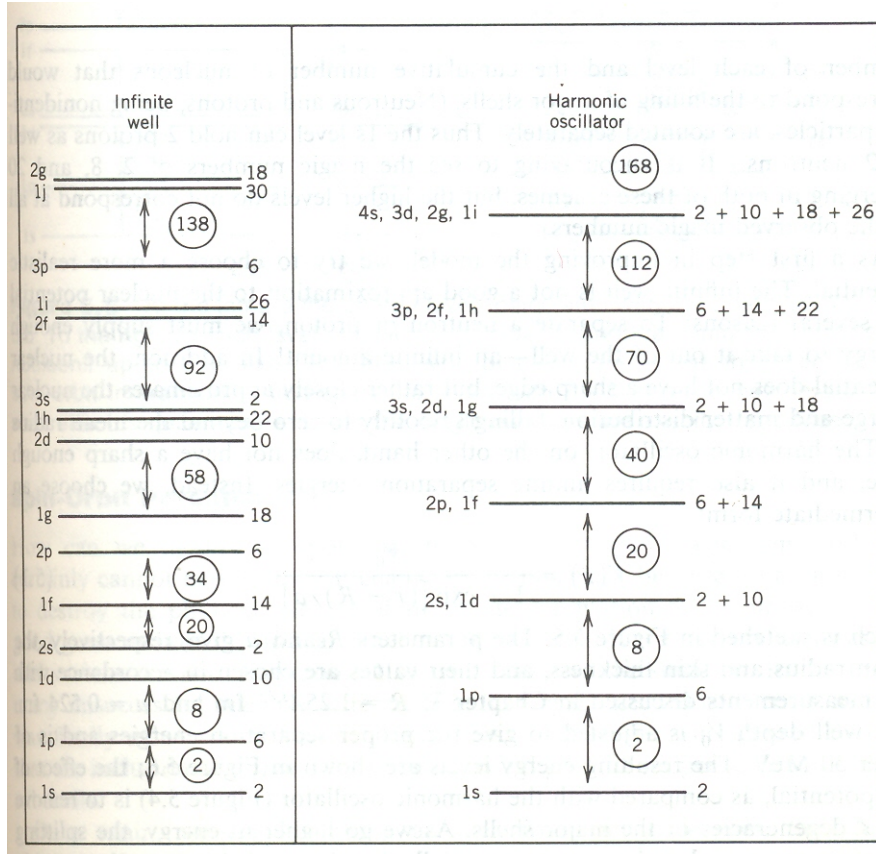
$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

- Para cada n tem-se um nível de energia diferente



Degenerescência do oscilador harmônico

- A degenerescência surge devido:
 - aos valores permitidos de l que são os valores pares para n par e os valores ímpares para n ímpar
 - às projeções do momento angular m_l , que apresentam $2l+1$ valores
 - ao spin dos nucleons, que possui 2 valores

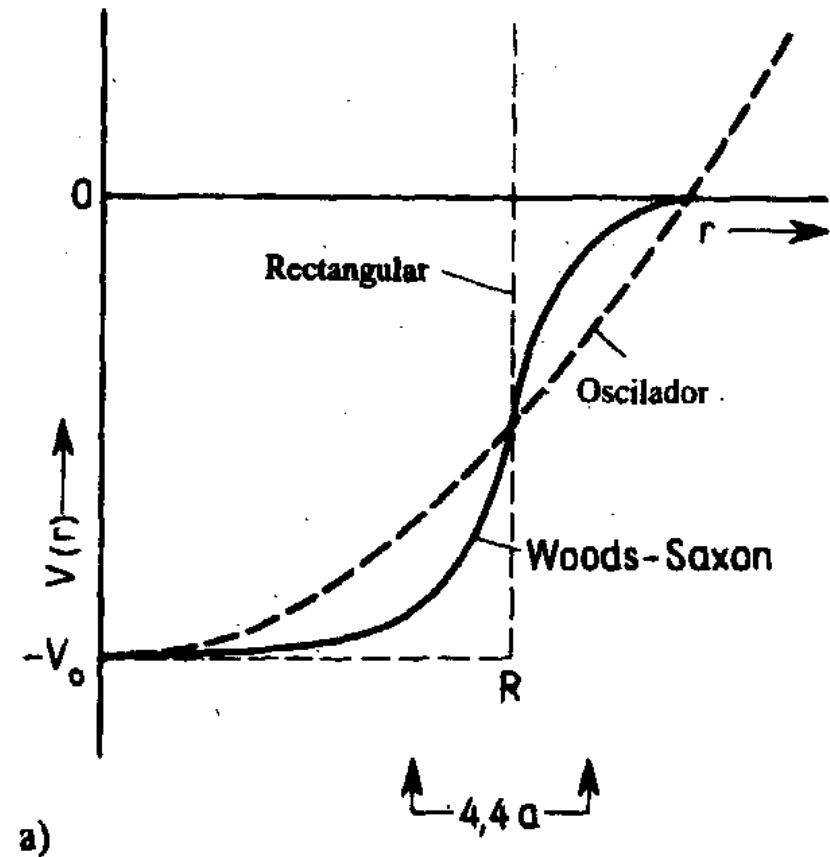


Números mágicos
 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...

Potencial: uma forma intermediária

- Uma forma intermediária entre um poço quadrado e um oscilador harmônico:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]}$$

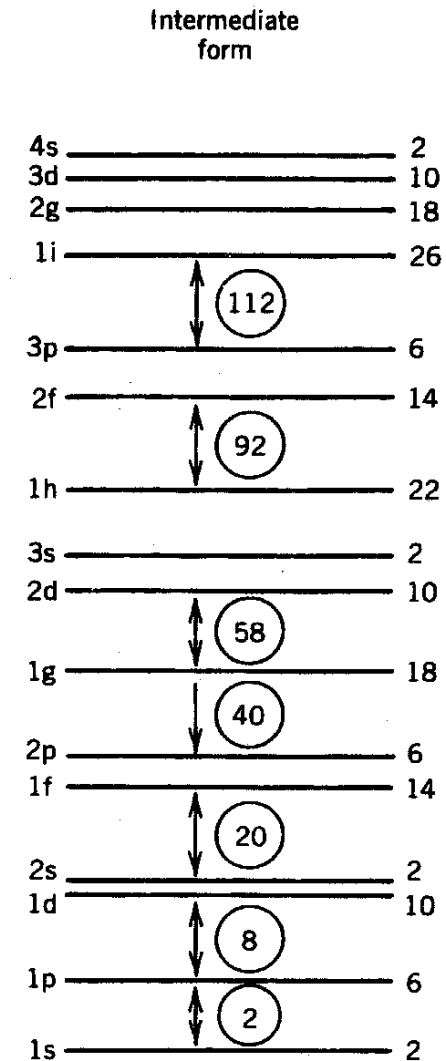


Degenerescência da forma intermediária

- Resolvendo a equação de Schrödinger para um potencial com essa forma, se obtém os estados de energia degenerados ao lado

Números mágicos

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...



Potencial: termo spin-órbita

- Assim como no caso atômico, também devemos considerar a interação do spin dos nucleons com seu momento angular orbital:

$$H' \propto \vec{l} \cdot \vec{s}$$

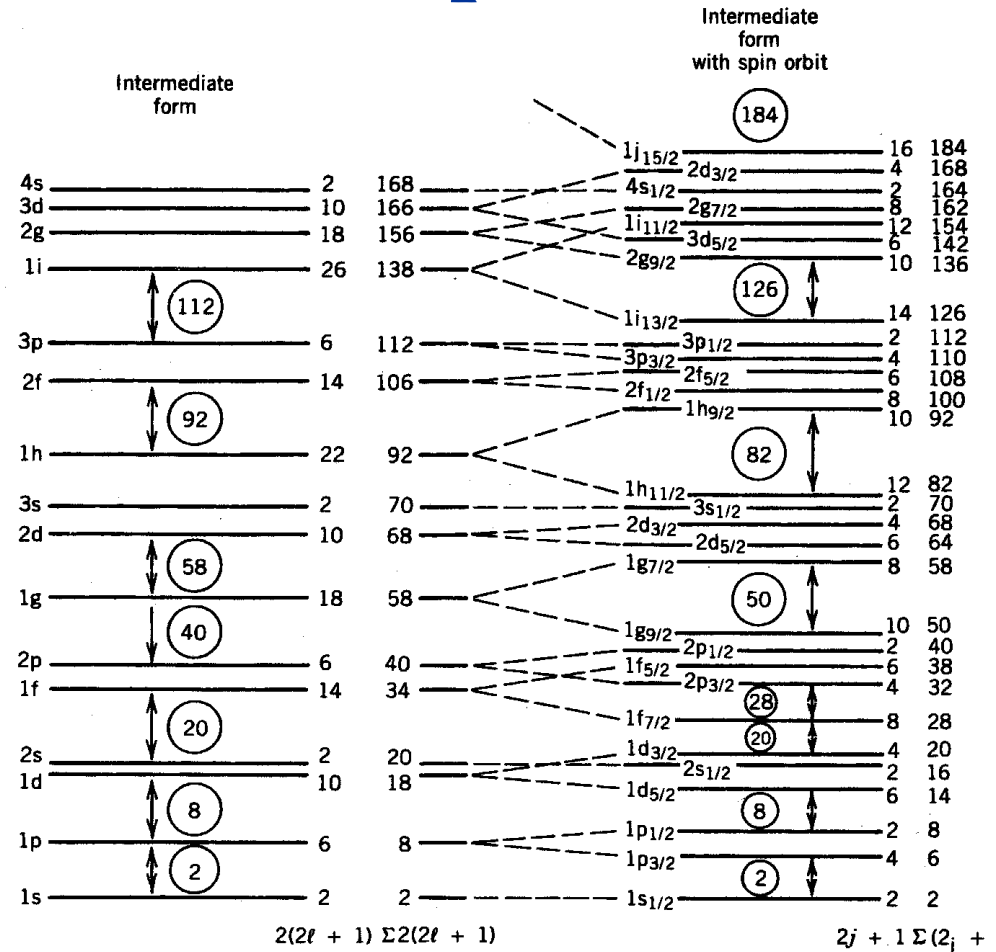
- O efeito deste termo adicional na hamiltoniana é quebrar a degenerescência dos estados, que passam a depender de j e m_j

Degenerescência da forma intermediária com o termo spin-órbita

- A degenerescência surge devido aos vários valores de m_j que são $(2j + 1)$
- E a separação entre os estados depende do valor de l o que faz com que alguns níveis se aproximem e outros se afastem.

Números mágicos

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...



Modelo de Camadas

- Portanto, o modelo de camadas explica bem os números mágicos incluindo o termo de spin-órbita
- Quais outras grandezas obtidas experimentalmente podem ser satisfatoriamente explicadas pelo modelo de camadas?

Momento angular dos **nucleons**

- Prótons e nêutrons possuem **spin** (s) assim como elétrons
- Prótons e nêutrons devem se mover dentro do núcleo, portanto devem ter **momento angular orbital** (l) também
- Esses dois momentos devem se combinar, formando um momento angular total (j):

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

Momento angular dos nucleons

- O momento angular total segue a regra de acoplamento de momentos angulares, ou seja, os valores de j devem estar entre $|l-s|$ e $l+s$.
- Como todo momento angular, podemos definir j^2 e j_z simultaneamente:

$$j^2 \psi_{jm_j} = j(j+1)\hbar^2 \psi_{jm_j} \quad \text{e} \quad j_z \psi_{jm_j} = m_j \hbar \psi_{jm_j}$$

$$\text{com } m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Momento angular do núcleo

- No núcleo, temos um conjunto de prótons e nêutrons, e o momento angular dos vários nucleons se combinam produzindo o **momento angular total do núcleo** (I):

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{l}_i + \vec{s}_i) = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{L} = \sum_{i=1}^A \vec{l}_i \\ \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{s}_i \end{array} \right.$$

Medidas de momento angular do núcleo

- Todo núcleo com número par de prótons e nêutrons apresentam $I = 0$
- Para núcleos com A ímpar - número par de prótons (nêutrons), número ímpar de nêutrons (prótons) – o momento angular é semi-inteiro, com valores entre $1/2$ e $9/2$
- Para núcleos com número ímpar de prótons e nêutrons, o momento angular é inteiro e não-nulo, com valores entre 1 e 7

Paridade

- Corresponde a propriedade de se refletir as coordenadas do sistema através da origem:

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$$

- Se o potencial é central, tem-se:

$$V(\vec{r}) = V(-\vec{r}) \Rightarrow |\psi(\vec{r})|^2 = |\psi(-\vec{r})|^2$$

- Portanto, devemos ter uma função de onda com paridade definida:

$$\psi(-\vec{r}) = \pm\psi(\vec{r})$$

onde, quando tem-se + a paridade é positiva e – paridade é negativa.

Paridade

- Para o caso do potencial central, como:

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

a paridade será definida pela parte angular, pela expressão $(-1)^l$.

- Por outro lado, quando temos:

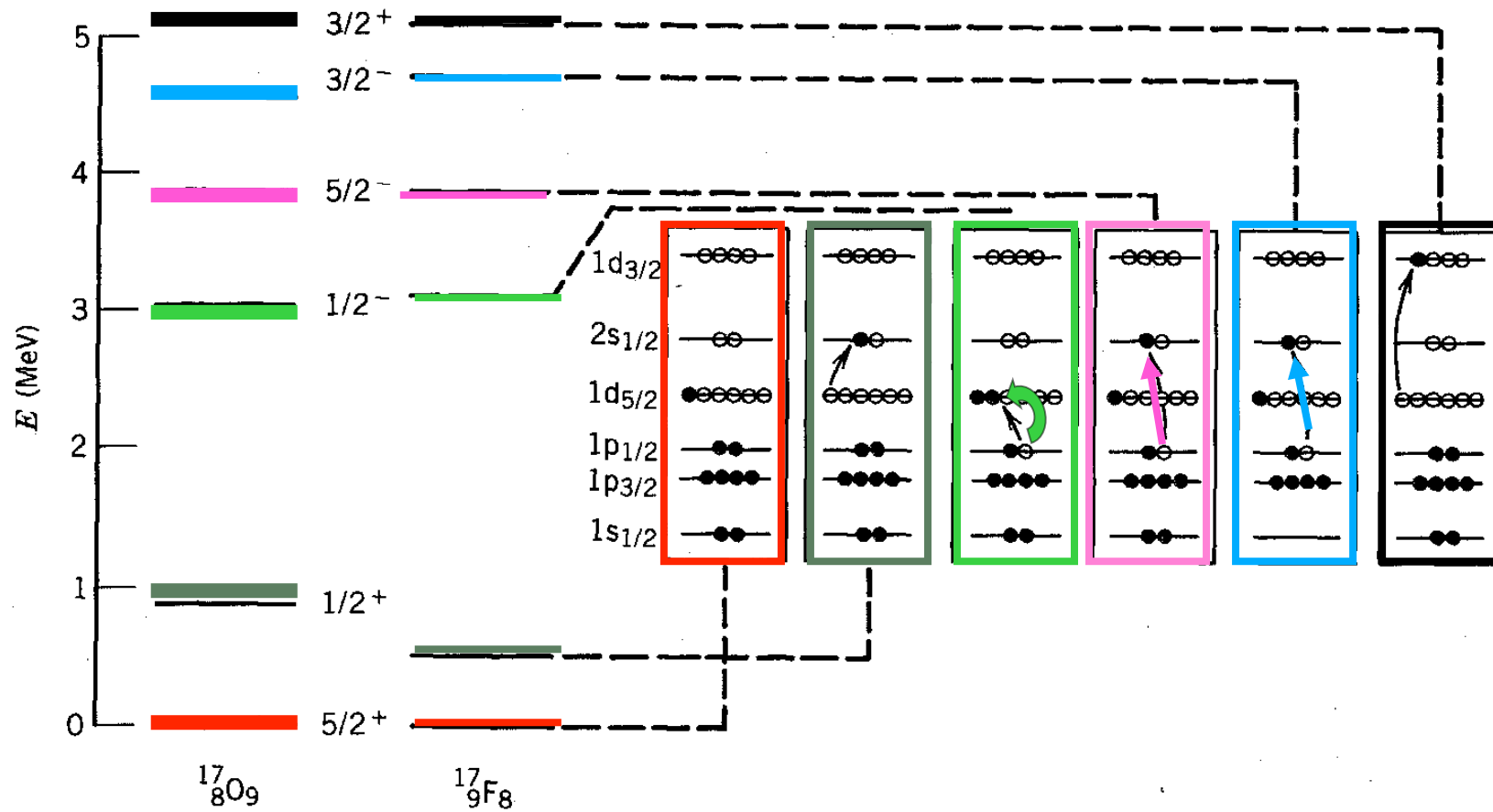
$$|\psi(\vec{r})|^2 \neq |\psi(-\vec{r})|^2 \Rightarrow V(\vec{r}) \neq V(-\vec{r})$$

ou seja, o sistema não tem paridade definida e não é invariante por paridade.

Nucleons de Valência

- Como o modelo de camadas explica esses valores?
- Em núcleos com número par de prótons E nêutrons, forma-se pares de nucleons com spins opostos (por quê?) que se cancelam
- Nos núcleos com número ímpar de prótons OU de nêutrons, o nucleon “que sobra” é o que determina o momento angular e paridade do núcleo

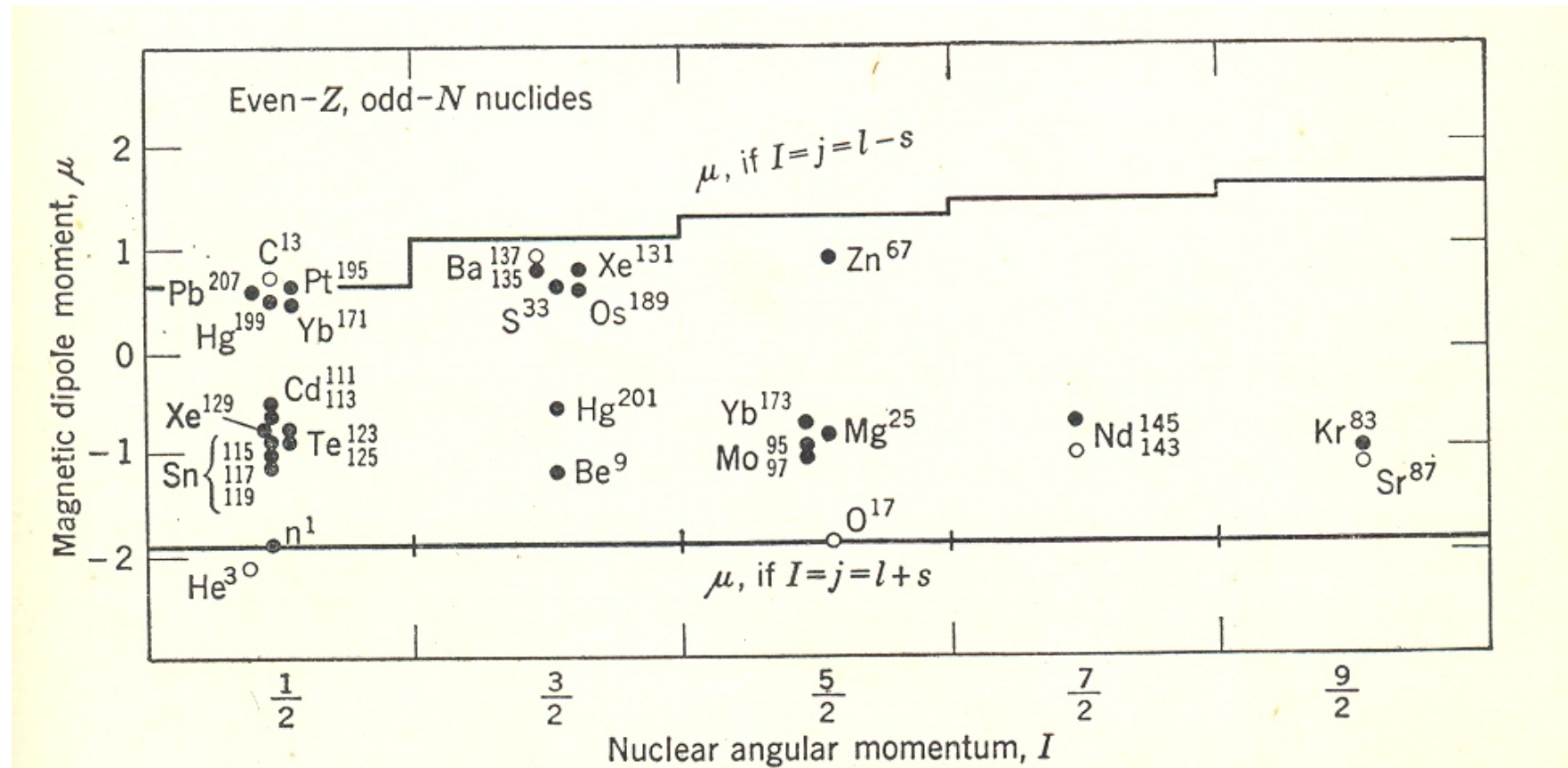
Momento angular e paridade: nucleons de valência



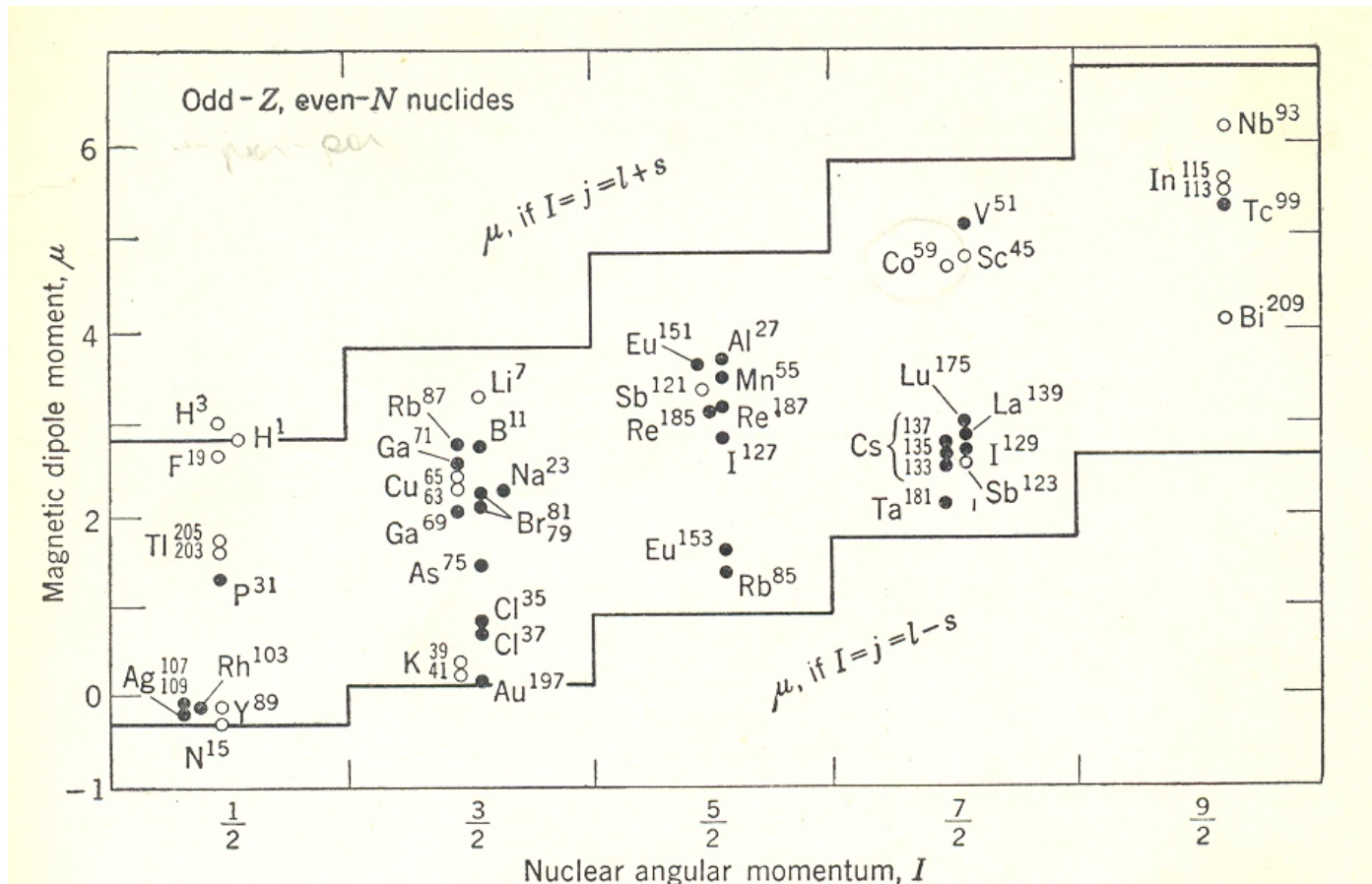
Momentos de dipolo magnético

- Assumindo que o momento de dipolo magnético do núcleo será determinado pelas propriedades do nucleon de valência, podemos estimar o valor do momento de dipolo magnético do núcleo a partir do número quântico j do nível de energia ocupado pelo nucleon de valência

Medidas do momento de dipolo magnético do núcleo

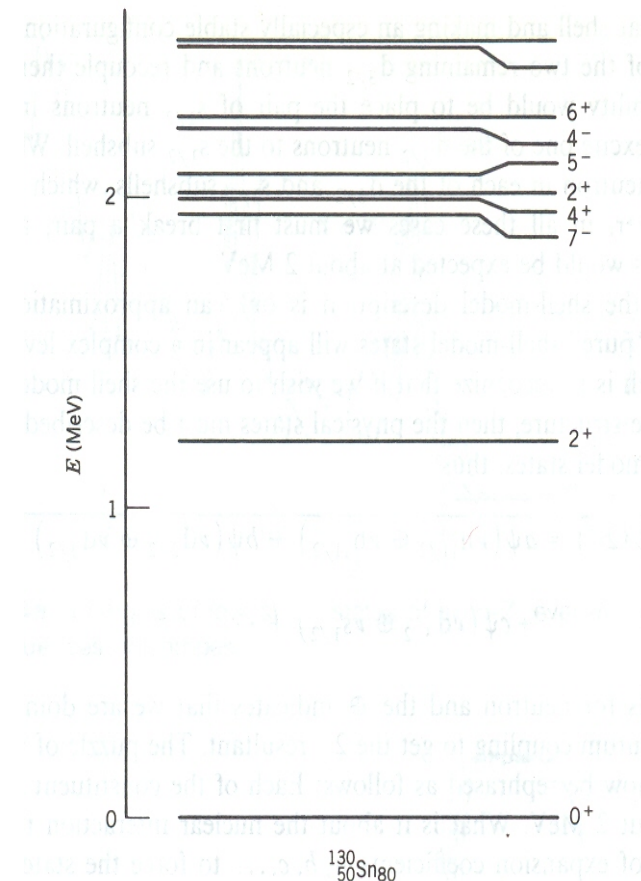


Medidas do momento de dipolo magnético do núcleo



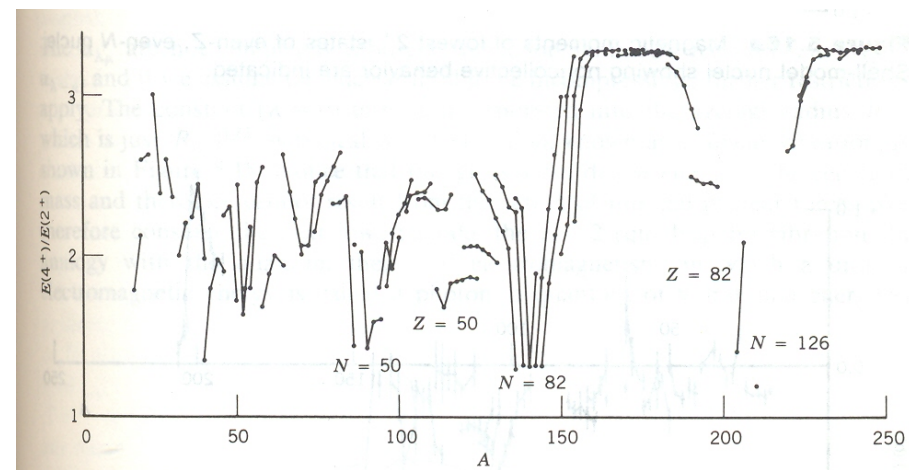
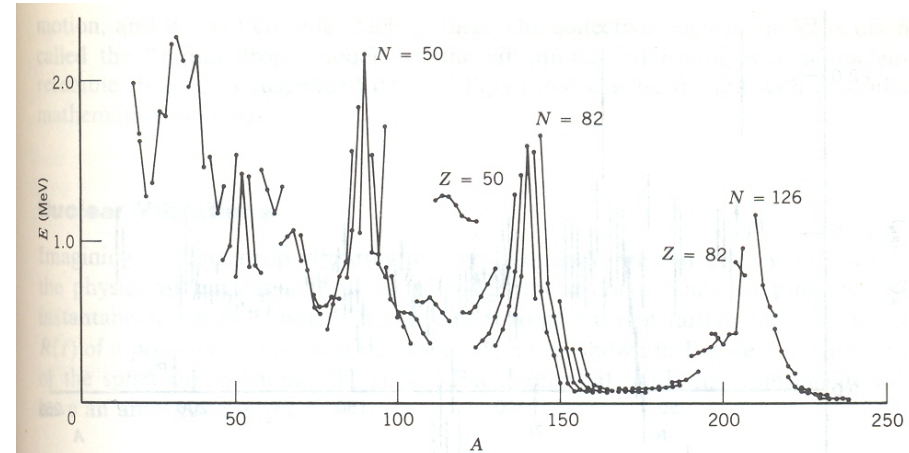
Nucleons de valência explicam tudo?

- Exemplo: ^{130}Sn
- Praticamente, todos os núcleos par-par apresentam um estado 2^+ de baixa energia
- Como explicar esses estados?
 - Considerando efeitos coletivos no núcleo



Que tipo de efeitos coletivos podemos considerar?

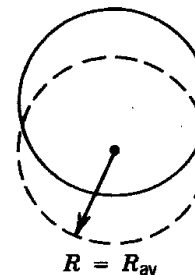
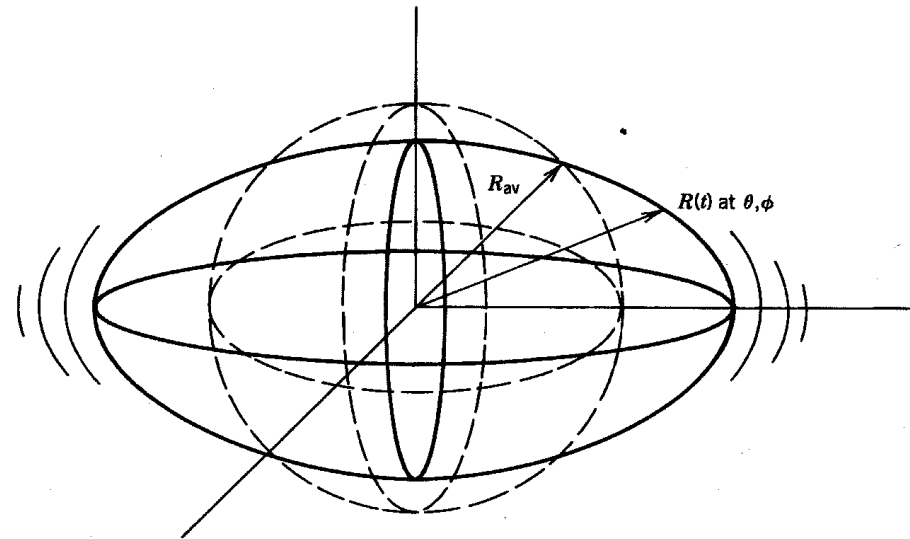
- Observando-se algumas características dos núcleos par-par, como o nível de energia mais baixo $E(2^+)$ e a razão $E(4^+)/E(2^+)$ notamos duas regiões distintas:
 - $A < 150$
 - $150 < A < 190$ e $A > 220$



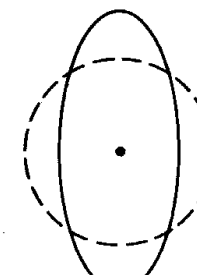
Vibração nuclear

- Um dos efeitos a serem considerados é o da vibração do núcleo em torno de uma forma esférica, que pode ser descrita pela expressão:

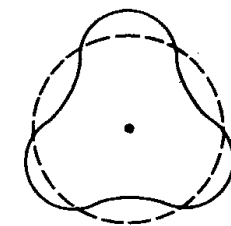
$$R(t) = R_{av} + \sum_{\lambda \geq 1} \sum_{\mu = -\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$$



$\lambda = 1$
(Dipole)



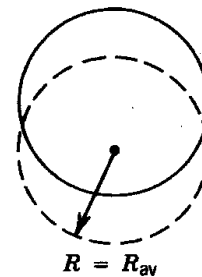
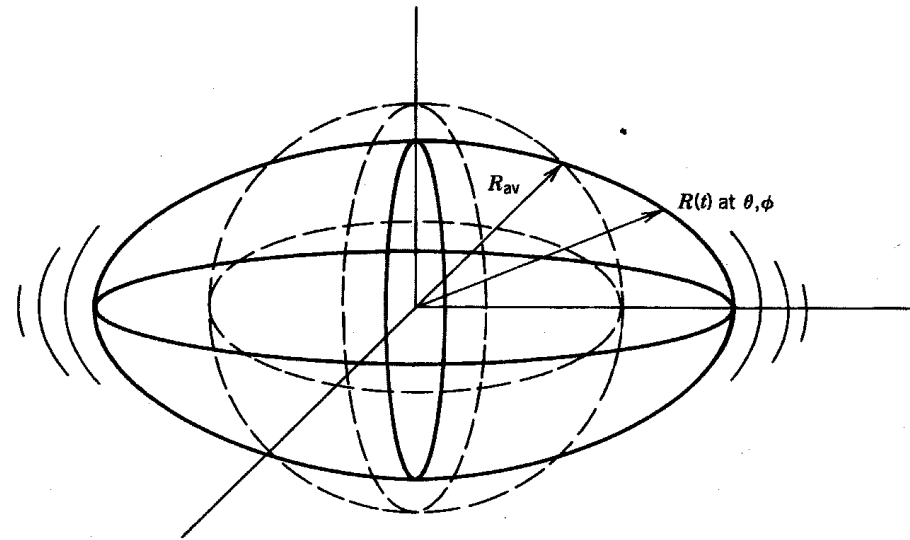
$\lambda = 2$
(Quadrupole)



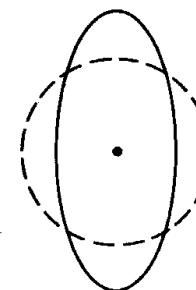
$\lambda = 3$
(Octupole)

Vibração nuclear

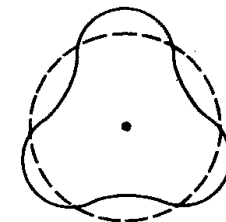
- Cada modo de vibração pode ser encarado como um quantum de energia vibracional, chamado de fônon
- Cada fônon carrega um momento angular igual a λ e paridade dada por $(-1)^\lambda$



$\lambda = 1$
(Dipole)



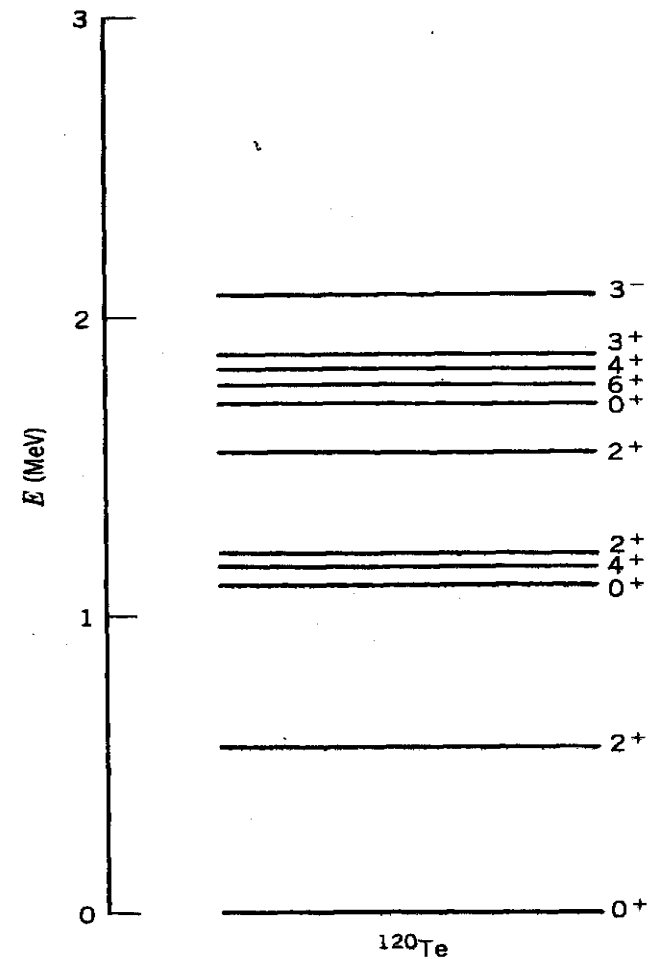
$\lambda = 2$
(Quadrupole)



$\lambda = 3$
(Octupole)

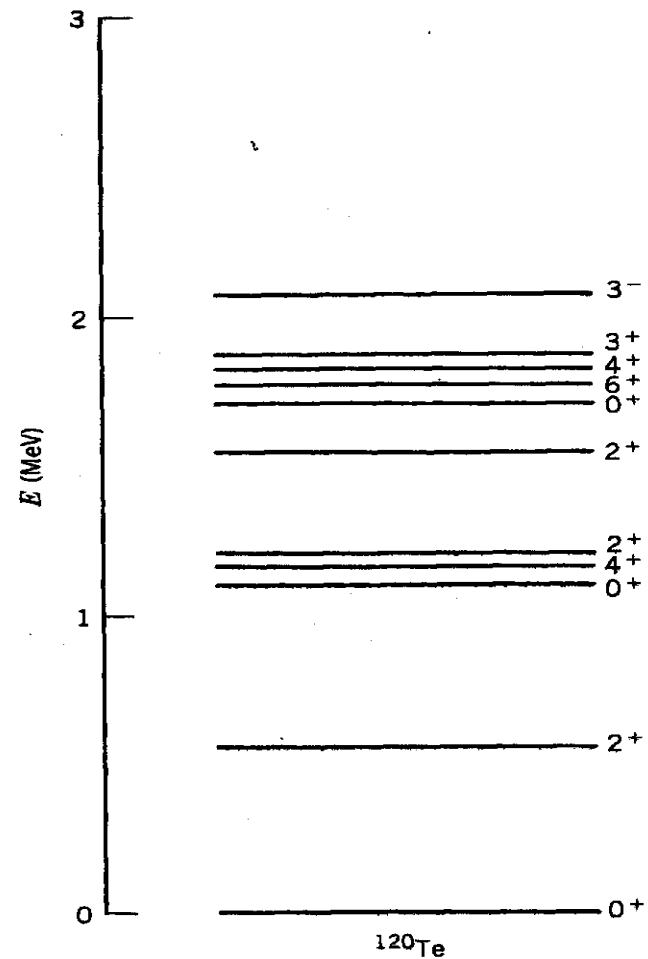
Vibração nuclear

- Ao adicionar **um fônon** com um certo λ ao núcleo em seu estado fundamental, um nível de energia com momento angular λ e paridade $(-1)^\lambda$ deve ser criado



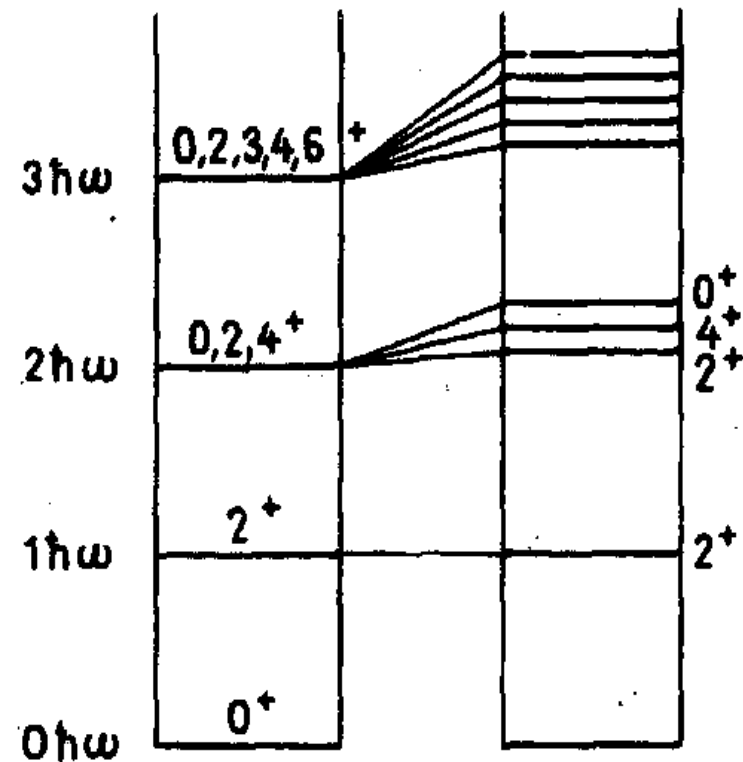
Vibração nuclear

- Ao adicionar **dois fônons** da mesma ordem λ ao núcleo em seu estado fundamental, três níveis de energia com momento angular entre $(\lambda-\lambda)$ e $\lambda+\lambda$ e paridade $(-1)^\lambda$ devem ser criados com o dobro de energia correspondente a um fônon



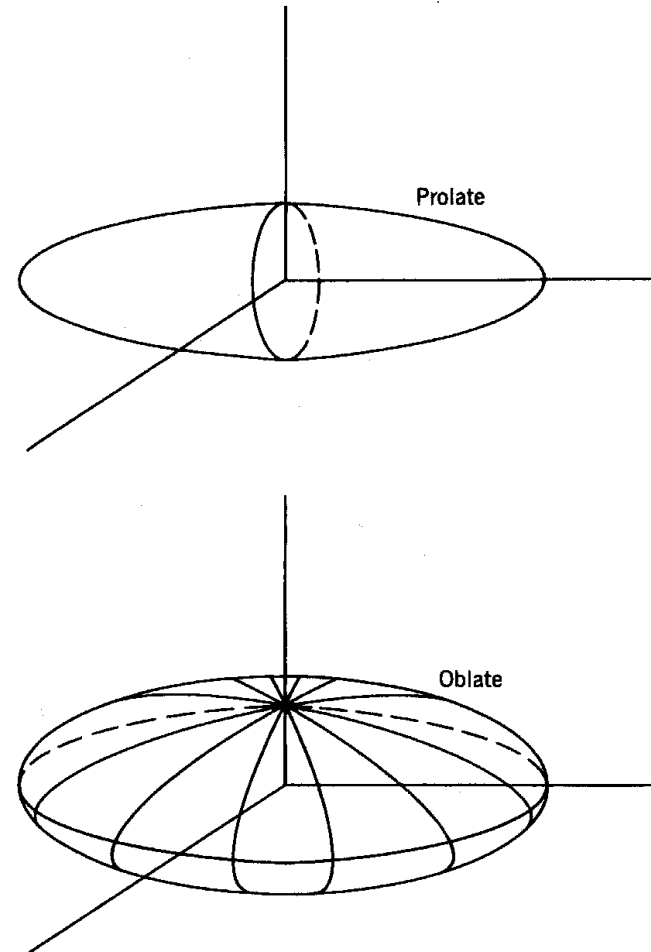
Vibração nuclear

- Ao adicionar **dois fônons** da mesma ordem λ ao núcleo em seu estado fundamental, três níveis de energia com momento angular entre $(\lambda-\lambda)$ e $\lambda+\lambda$ e paridade $(-1)^\lambda$ devem ser criados com o dobro de energia correspondente a um fônon



Rotação nuclear

- Núcleos de massas maiores ($150 < A < 190$ e $A > 220$) apresentam uma forma não-esférica
- Portanto, eles podem apresentar níveis de energia devido ao movimento rotacional



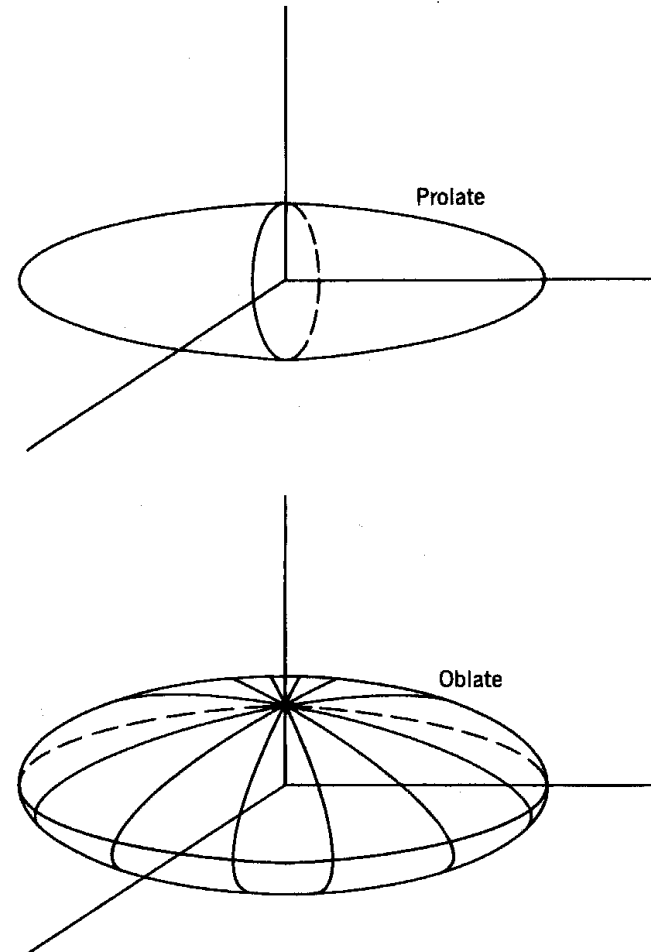
Rotação nuclear

- A forma de uma núcleo deformado com uma simetria elipsoidal, pode ser escrito como:

$$R(\theta, \phi) = R_{\text{médio}} [1 + \beta \cdot Y_{20}(\theta, \phi)]$$

onde β é o fator de deformação do núcleo, dado por:

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_{\text{médio}}}$$



Rotação nuclear

$$R(\theta, \phi) = R_{\text{médio}} [1 + \beta \cdot Y_{20}(\theta, \phi)]$$

- Portanto, ao adicionar energia ao sistema (que estava no estado fundamental 0^+) devido ao movimento rotacional, cria-se estados com momentos angulares par

12^+	_____	2082,7 keV
10^+	_____	1518,1
8^+	_____	1024,6
6^+	_____	614,4
4^+	_____	299,5
2^+	_____	91,4
0^+	=====	0

Rotação nuclear

- E, como a energia cinética de rotação é dada por:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I + 1)$$

se o núcleo tiver um momento de inércia fixo, a energia de cada nível é dada pela expressão acima

12 ⁺	_____	2082,7 keV
10 ⁺	_____	1518,1
8 ⁺	_____	1024,6
6 ⁺	_____	614,4
4 ⁺	_____	299,5
2 ⁺	_____	91,4
0 ⁺	=====	0

Rotação nuclear

$$E(0^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 0(0+1) = 0$$

$$E(2^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 2(2+1) = 6 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

$$E(4^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 4(4+1) = 20 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

$$E(6^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 6(6+1) = 42 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

$$E(8^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 8(8+1) = 72 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}$$

12 ⁺	_____	2082,7 keV
10 ⁺	_____	1518,1
8 ⁺	_____	1024,6
6 ⁺	_____	614,4
4 ⁺	_____	299,5
2 ⁺	_____	91,4
0 ⁺	=====	0

Rotação nuclear

$$E(0^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 0(0+1) = 0$$

$$E(2^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 2(2+1) = 6 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} = 91,4 \text{ keV}$$

$$E(4^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 4(4+1) = 20 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} = 305 \text{ keV}$$

$$E(6^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 6(6+1) = 42 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} = 640 \text{ keV}$$

$$E(8^+) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} 8(8+1) = 72 \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} = 1097 \text{ keV}$$

12 ⁺	_____	2082,7 keV
10 ⁺	_____	1518,1
8 ⁺	_____	1024,6
6 ⁺	_____	614,4
4 ⁺	_____	299,5
2 ⁺	_____	91,4
0 ⁺	=====	0

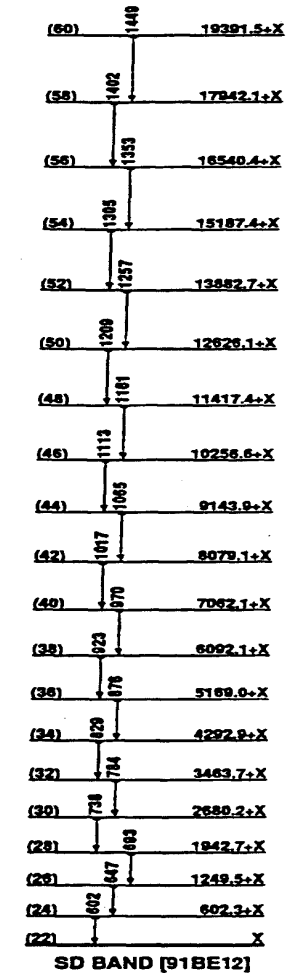
Rotação nuclear

- Em termos da radiação γ que é medida devido a transições entre esses dados, tem-se:

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} I(I + 1)$$

$$E_{I+2} = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} (I + 2)(I + 3)$$

$$E_\gamma = E_{I+2} - E_I = \frac{\hbar^2}{\mathfrak{I}} (2I + 3)$$



¹⁵²₆₆Dy Rotational Band

Rotação nuclear

- Portanto, o espectro de energia da radiação γ apresentará picos eqüidistantes:

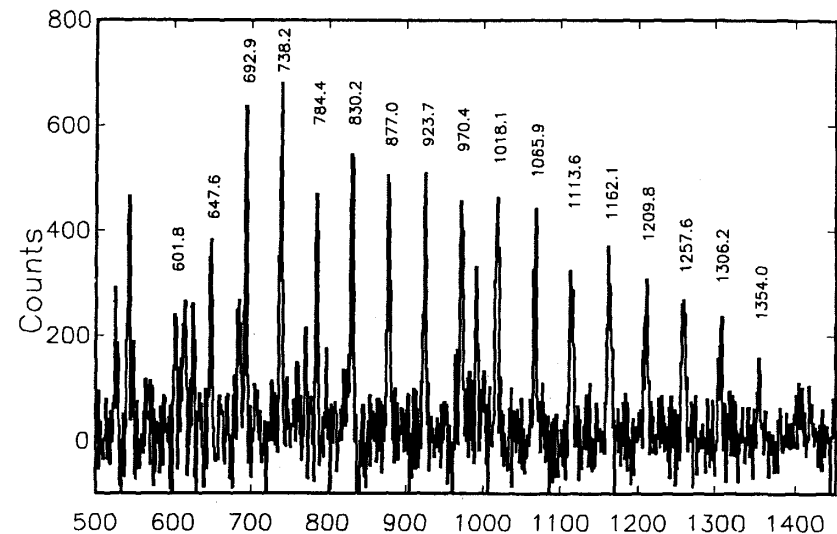
$$E_{\gamma} = E_{I+2} - E_I = \frac{\hbar^2}{\mathcal{I}} (2I + 3)$$

$$\Delta E_{\gamma} = E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2}$$

$$= \frac{\hbar^2}{\mathcal{I}} [(2(I + 2) + 3) - (2I + 3)]$$

$$= 4 \frac{\hbar^2}{\mathcal{I}}$$

152Dy SD Band



A estrutura nuclear

- A estrutura de níveis de energia do núcleo (chamada de estrutura nuclear) pode ser explicada em grande parte através dessas três abordagens, o que representa um grande sucesso no entendimento do núcleo atômico

