EAE 5706: Microeconomia II

2^o Semestre de 2017

Prova 1

Duração: 2 horas

Instruções: Leia os enunciados com atenção. Comece a resolver a prova pelas questões que tiver maior facilidade. Boa prova!

Parte I: Questões Curtas. Responda as seguintes questões.

1. Considere uma versão do modelo de Stackelberg em que três firmas escolhem quantidades (não-negativas) sequencialmente. A firma 1 ("Líder") escolhe o quanto produzir primeiro; em seguida, a firma 2 ("Seguidora A") observa a quantidade produzida pela firma 1 e realiza a sua decisão de produção; finalmente, a firma 3 ("Seguidora B") observa as quantidades produzidas pelas duas outras firma e decide o quanto produzir. Represente, de maneira esquemática, este jogo na forma extensiva e caracterize o conjunto das estratégias puras de cada firma. Justifique a sua resposta. (1,0 ponto)

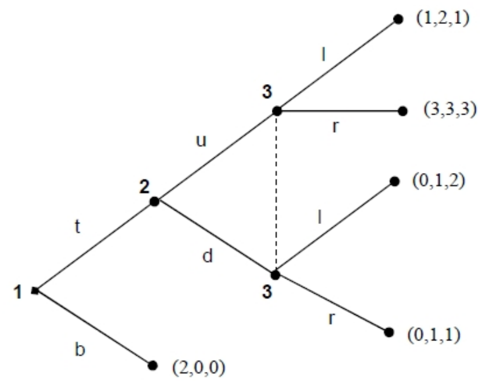
Resposta. Os conjuntos das estratégias puras das firmas são os seguintes:

$$S_1 = \mathbb{R}_+$$

$$S_2 = \{\text{funções } s_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\}$$

$$S_3 = \{\text{funções } s_3 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\}$$

2. Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



Represente este jogo na forma normal e caracterize o conjunto de todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras deste jogo. (1,0 ponto)

Resposta. A representação do jogo na forma normal é a seguinte:

Jogador 2

Jogador 1	ℓ	r
u	$1, 2, 1$	$3, 3, 3$
d	$0, 1, 2$	$0, 1, 1$

t

Jogador 3

Jogador 2

Jogador 1	ℓ	r
u	$2, 0, 0$	$2, 0, 0$
d	$2, 0, 0$	$2, 0, 0$

b

Jogador 3

Os equilíbrios de Nash são: (t, u, r) , (b, u, ℓ) , (b, d, ℓ) e (b, d, r) .

3. Seja $S_i^+ \subset S_i$ o conjunto das estratégias puras às quais o jogador i atribui probabilidade estritamente positiva no perfil de estratégias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$. Demonstre que se um perfil de estratégias mistas σ satisfaz as seguintes propriedades:

   i. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i, s_i^{'} \in S_i^+$;

   ii. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i})$ para todo $s_i \in S_i^+$ e $s_i^{'} \notin S_i^+$;

para todo $i = 1, ..., I$, então σ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. (1,0 ponto)

Resposta. Ver notas da aula 5 ou Proposição 8.D.1 (MWG).

4. Considere o seguinte jogo na forma normal:

		Bob C	D
Ann	C	$6, 6$	$3, 7$
	D	$7, 3$	$0, 0$

Caracterize o equilíbrio correlacionado que gera o maior payoff esperado para os jogadores. Restrinja a sua análise ao conjunto de equilíbrios simétricos, em que ambos os jogadores obtém o mesmo payoff esperado. Descreva o mecanismo utilizado na construção deste equilíbrio. (1,0 ponto)

Resposta. Considere um mecanismo de aleatorização privado baseado no lançamento de um dado de três faces, em que cada resultado é obtido com as seguintes probabilidades:

Face	Prob.
1	p
2	q
3	p

com $2p + q = 1$ e $p, q > 0$. O mecanismo "recomenda" Bob escolher D quando o resultado do lançamento é 1 e C quando o resultado é 2 ou 3; por outro lado, ele "recomenda" Ann jogar C quando o resultado do lançamento é 1 ou 2 e D quando o resultado é 3. Note que o mecanismo induz a seguinte distribuição de probabilidade sobre os resultados do jogo:

	C	D
C	q	p
D	p	0

O mecanismo ótimo maximiza a frequência (q) com que os jogadores coordenam no resultado (C, C). Note que um jogador possui incentivo para seguir a recomendação do mecanismo quando ele envia a mensagem "C" somente se a seguinte condição de incentivo for satisfeita:

$$\frac{p}{p+q}3 + \frac{q}{p+q}6 \geq \frac{p}{p+q}0 + \frac{q}{p+q}7 \;\Rightarrow\; q \leq 3p$$

Logo, o maior valor possível para q é $q = 3p$. Assim, temos que:

$$2p + 3p = 1 \;\Rightarrow\; p^* = \frac{1}{5}$$

e

$$q^* = \frac{3}{5}$$

Em equilíbrio, o payoff esperado dos jogadores é $\frac{1}{5}7 + \frac{3}{5}6 + \frac{1}{5}3 = 5,6$.

Parte II: Questões Disertativas.

Questão 1. Considere um leilão de 1^o preço em que dois participantes realizam lances por um objeto indivisível. Cada jogador conhece o valor que ele próprio atribui ao objeto, v_i, e sabe que o valor atribuido pelo seu concorrente, v_j, é uniformemente distribuido em $[0, \overline{v}]$. Caracterize o equilíbrio de Nash Bayesiano simétrico deste jogo em que cada jogador utiliza uma mesma estratégia $b^*(v)$ consistente em uma função linear $b^*(v_i) = (\alpha + \beta) + \beta v_i$. Encontre os valores de α e β em equilíbrio. (2,5 pontos)

Resposta. Dado o tipo do indivíduo i, $v_i \in [0, \overline{v}]$, e uma estratégia $b^*(v_j) = (\alpha + \beta) + \beta v_j$ para o jogador j, a probabilidade do jogador i vencer o leilão com um lance b_i é dada por:

$$\Pr[b_i > b^*(v_j)] = \Pr[b_i > (\alpha + \beta) + \beta v_j] = \Pr\left[v_j < \frac{b_i - (\alpha + \beta)}{\beta}\right] = \frac{b_i - (\alpha + \beta)}{\beta \overline{v}}$$

Logo, o problema de maximização do jogador i é dado por:

$$\max_{b_i} \left(\frac{b_i - (\alpha + \beta)}{\beta \overline{v}}\right)(v_i - b_i)$$

Assim, o lance ótimo é dado por:

$$b_i^*(v_i) = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2} v_i$$

Como o equilíbrio é simétrico e as estratégias são lineares, temos que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + \beta$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

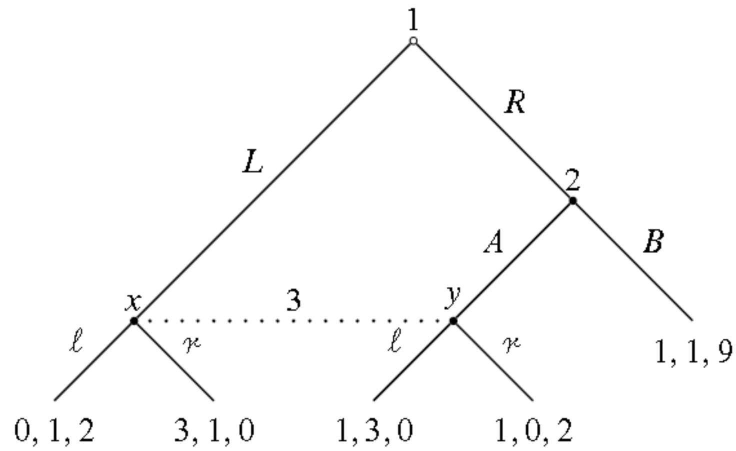
Note que para que este sistema tenha solução, devemos ter que:

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a estratégia ótima de ambos os jogadores é dada por:

$$b^*(v) = \frac{1}{2} v$$

Questão 2. Considere o seguinte jogo na forma extensiva:



Responda as seguintes questões:

a. Defina o conceito de weak Perfect Bayesian Equilibrium em um jogo na forma extensiva Γ_E. Discuta como o conceito de weak Perfect Bayesian Equilibrium se relaciona com o conceito de equilíbrio de Nash. (1,0 ponto).

b. Caracterize o conjunto de todos os weak Perfect Bayesian Equilibrium em estratégias puras e mistas deste jogo. Justifique a sua resposta. (2,5 pontos)

Respostas.

a. Ver notas da aula 9, bem como Definição 9.C.3 e Proposição 9.C.1 (MWG).

b. O único weak Perfect Bayesian Equilibrium deste jogo é um equilíbrio em estratégias mistas caracterizado por: $\sigma_1(L) = \frac{1}{2}$, $\sigma_2(A) = 1$, $\sigma_3(\ell) = \frac{2}{3}$, com $\mu(x) = \frac{1}{2}$.