SSC0503 - Introdução à Ciência de Computação II
Respostas da 3ª Lista
Professor: Claudio Fabiano Motta Toledo (`claudio@icmc.usp.br`)
Estagiário PAE: Jesimar da Silva Arantes (`jesimar.arantes@usp.br`)

Resposta pergunta 1:

- $T(n) = 2T(n/4) + 1$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 2$
  $b = 4$
  $f(n) = 1$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $1 = O(n^{log_4 2 - \epsilon})$
  $1 = O(n^{1/2-\epsilon})$
  Nesse caso para qualquer $0 < \epsilon < 1/2$ esse condição será satisfatória.
  Logo, $T(n) = \Theta(n^{1/2})$
  Nesse sentido não precisamos verificar os casos restantes.
  Apenas como teste faremos as outras verificações:
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $1 = \Theta(n^{log_4 2})$
  $1 = \Theta(n^{1/2})$
  O que é falso, pois não existem c_1 e c_2 que satisfaçam essa condição.
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
  $1 = \Omega(n^{log_4 2 + \epsilon})$
  $1 = \Omega(n^{1/2+\epsilon})$
  O que é falso, pois a função constante $f(n) = 1$ não domina nenhuma função.

- $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 2$
  $b = 4$
  $f(n) = \sqrt{n}$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método

mestre.
Verificando cada caso temos:
Caso 1:
$f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
$\sqrt{n} = O(n^{log_4 2 - \epsilon})$
$\sqrt{n} = O(n^{1/2 - \epsilon})$
Falso
Caso 2:
$f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
$\sqrt{n} = \Theta(n^{log_4 2})$
$\sqrt{n} = \Theta(n^{1/2})$
Verdade
Logo, $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot lg\ n) = \Theta(n^{1/2} \cdot lg\ n) = \Theta(\sqrt{n} \cdot lg\ n)$
Caso 3:
$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
$\sqrt{n} = \Omega(n^{log_4 2 + \epsilon})$
$\sqrt{n} = \Omega(n^{1/2 + \epsilon})$
Falso

- $T(n) = 2T(n/4) + n$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 2$
  $b = 4$
  $f(n) = n$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $n = O(n^{log_4 2 - \epsilon})$
  $n = O(n^{1/2 - \epsilon})$
  Falso
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n = \Theta(n^{log_4 2})$
  $n = \Theta(n^{1/2})$
  Falso
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
  $n = \Omega(n^{log_4 2 + \epsilon})$
  $n = \Omega(n^{1/2 + \epsilon})$
  Verdade para $\epsilon = 1/2$ ou $0 < \epsilon \leq 1/2$.

Precisamos ainda verificar a seguinte condição para $c < 1$
$af(n/b) \leq cf(n)$
$2f(n/4) \leq cf(n)$
$2n/4 \leq cn$
$c \geq 1/2$
Dessa forma, para $c \geq 1/2$, essa condição é atendida.
Logo, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$.

- $T(n) = 2T(n/4) + n^2$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 2$
  $b = 4$
  $f(n) = n^2$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $n^2 = O(n^{log_4 2 - \epsilon})$
  $n^2 = O(n^{1/2 - \epsilon})$
  Falso
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n^2 = \Theta(n^{log_4 2})$
  $n^2 = \Theta(n^{1/2})$
  Falso
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
  $n^2 = \Omega(n^{log_4 2 + \epsilon})$
  $n^2 = \Omega(n^{1/2 + \epsilon})$
  Verdade para qualquer $0 < \epsilon < 3/2$.
  Precisamos ainda verificar a seguinte condição para $c < 1$
  $af(n/b) \leq cf(n)$
  $2f(n/4) \leq cf(n)$
  $2n^2/16 \leq cn^2$
  $c \geq 1/8$
  Dessa forma, para $c \geq 1/8$, essa condição é atendida.
  Logo, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$.

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
  Aplicando o teorema mestre:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$
Nesse sentido temos:
$a = 9$
$b = 3$
$f(n) = n$
Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
Verificando cada caso temos:
Caso 1:
$f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
$n = O(n^{log_3 9 - \epsilon})$
$n = O(n^{2-\epsilon})$
Verdade para $0 < \epsilon < 1$
Logo, $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^{log_3 9}) = \Theta(n^2)$
Caso 2:
$f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
$n = \Theta(n^{log_3 9})$
$n = \Theta(n^2)$
Falso
Caso 3:
$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
$n = \Omega(n^{log_3 9 + \epsilon})$
$n = \Omega(n^{2+\epsilon})$
Falso.

- $T(n) = T(2n/3) + 1$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 1$
  $b = 3/2$
  $f(n) = 1$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $1 = O(n^{log_{3/2} 1 - \epsilon})$
  $1 = O(n^{0-\epsilon})$
  $1 = O(n^{-\epsilon})$
  Falso
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $1 = \Theta(n^{log_{3/2} 1})$

$1 = \Theta(n^0)$
$1 = \Theta(1)$
Verdade
Logo, $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot lg\ n) = \Theta(n^0 \cdot lg\ n) = \Theta(1 \cdot lg\ n) = \Theta(lg\ n)$
Caso 3:
$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
$1 = \Omega(n^{log_{3/2} 1 + \epsilon})$
$1 = \Omega(n^{0+\epsilon})$
$1 = \Omega(n^{\epsilon})$
Falso

- $T(n) = 3T(n/4) + n\ lg\ n$.
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 3$
  $b = 4$
  $f(n) = n\ lg\ n$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $n\ lg\ n = O(n^{log_4 3 - \epsilon})$
  $n\ lg\ n = O(n^{0,793 - \epsilon})$
  Como $0,793 - \epsilon < 1$ então.
  $n\ lg\ n = O(n^{0,793 - \epsilon})$
  Falso
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n\ lg\ n = \Theta(n^{log_4 3})$
  $n\ lg\ n = \Theta(n^{0,793})$
  Como $0,793 < 1$ então.
  $n\ lg\ n = \Theta(n^{0,793})$
  Falso
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
  $n\ lg\ n = \Omega(n^{log_4 3 + \epsilon})$
  $n\ lg\ n = \Omega(n^{0,793 + \epsilon})$
  Verdadeiro para $\epsilon \approx 0,207$. $n\ lg\ n = \Omega(n^1)$
  $n\ lg\ n = \Omega(n)$
  Mas precisamos ainda verificar a seguinte condição para $c < 1$
  $af(n/b) \leq cf(n)$
  $3f(n/4) \leq cf(n)$

$3n/4 \cdot lg\ (n/4) \leq c \cdot n\ lg\ n$
$3n/4 \cdot lg\ n - 3n/2 = (3/4)n\ lg\ n - (3/2) \cdot n \leq c \cdot n\ lg\ n$
$(3/4)lg\ n - 3/2 \leq c\ lg\ n$
$c\ lg\ n \geq (3/4)lg\ n - 3/2$
$c \geq 3/4 - 3/(2lg\ n)$
Dessa forma, quando n tende a infinito então $c \geq 3/4$
Dessa forma, para $c \geq 3/4$, essa condição é atendida.
Logo, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\ lg\ n)$.

- $T(n) = 4T(n/2) + n$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 4$
  $b = 2$
  $f(n) = n$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $n = O(n^{log_2 4 - \epsilon})$
  $n = O(n^{2-\epsilon})$
  Verdadeiro para $\epsilon = 1$.
  $n = O(n^{2-1}) = O(n)$
  Então, $T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^{log_2 4}) = \Theta(n^2))$ Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n = \Theta(n^{log_2 4})$
  $n = \Theta(n^2)$
  Falso
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
  $n = \Omega(n^{log_2 4 + \epsilon})$
  $n = \Omega(n^{2+\epsilon})$
  Falso.

- $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 4$
  $b = 2$
  $f(n) = n^2$

Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
Verificando cada caso temos:
Caso 1:
$f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
$n^2 = O(n^{log_2 4 - \epsilon})$
$n^2 = O(n^{2-\epsilon})$
Falso, pois fazendo $\epsilon \approx 0,001$ então
$n^2 = O(n^{2-0,001}) = O(n^{1,999})$
Falso.
Caso 2:
$f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
$n^2 = \Theta(n^{log_2 4})$
$n^2 = \Theta(n^2)$
Verdadeiro, logo $T(n) = \Theta(n^{log_a b} \cdot lg\ n)$.
$T(n) = \Theta(n^{log_2 4} \cdot lg\ n)$
$T(n) = \Theta(n^2 \cdot lg\ n)$
Caso 3:
$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
$n^2 = \Omega(n^{log_2 4 + \epsilon})$
$n^2 = \Omega(n^{2+\epsilon})$
Falso.

- $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 4$
  $b = 2$
  $f(n) = n^3$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
  $n^3 = O(n^{log_2 4 - \epsilon})$
  $n^3 = O(n^{2-\epsilon})$
  Falso.
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n^3 = \Theta(n^{log_2 4})$
  $n^3 = \Theta(n^2)$
  Falso
  Caso 3:

$f(n) = \Omega(n^{log_b a+\epsilon})$
$n^3 = \Omega(n^{log_2 4+\epsilon})$
$n^3 = \Omega(n^{2+\epsilon})$
Verdadeiro para $\epsilon = 1$.
Precisamos ainda verificar a seguinte condição para $c < 1$
$af(n/b) \leq cf(n)$
$4f(n/2) \leq cf(n)$
$4n^3/2^3 \leq cn^3$
$c \geq 1/2$
Dessa forma, temos $c \geq 1/2$, logo $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$.

- $T(n) = 8T(n/2) + n^3$.
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 8$
  $b = 2$
  $f(n) = n^3$
  Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
  Verificando cada caso temos:
  Caso 1:
  $f(n) = O(n^{log_b a-\epsilon})$
  $n^3 = O(n^{log_2 8-\epsilon})$
  $n^3 = O(n^{3-\epsilon})$
  Falso.
  Caso 2:
  $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
  $n^3 = \Theta(n^{log_2 8})$
  $n^3 = \Theta(n^3)$
  Verdadeiro, logo $T(n) = \Theta(n^3 \cdot lg\ n)$.
  Caso 3:
  $f(n) = \Omega(n^{log_b a+\epsilon})$
  $n^3 = \Omega(n^{log_2 8+\epsilon})$
  $n^3 = \Omega(n^{3+\epsilon})$
  Falso.

- $T(n) = 7T(n/2) + n^3$.
  Aplicando o teorema mestre:
  $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
  Nesse sentido temos:
  $a = 7$
  $b = 2$

$f(n) = n^3$
Como $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positivo, logo podemos aplicar o método mestre.
Verificando cada caso temos:
Caso 1:
$f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$
$n^3 = O(n^{log_2 7 - \epsilon})$
$n^3 = O(n^{2,807 - \epsilon})$
Falso.
Caso 2:
$f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
$n^3 = \Theta(n^{log_2 7})$
$n^3 = \Theta(n^{2,807})$
Falso.
Caso 3:
$f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$
$n^3 = \Omega(n^{log_2 7 + \epsilon})$
$n^3 = \Omega(n^{2,807 + \epsilon})$
Verdadeiro para $\epsilon \approx 0,193$.
$n^3 = \Omega(n^3)$
Precisamos ainda verificar a seguinte condição para $c < 1$
$af(n/b) \leq cf(n)$
$7f(n/2) \leq cf(n)$
$7n^3/8 \leq cn^3$
$c \geq 7/8$
Dessa forma, para $c \geq 7/8$, essa condição é atendida.
Logo, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$.

Resposta 2: Use o método mestre para provar que a recorrência $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ tem a solução $T(n) = \Theta(n \cdot lg\ n)$.
$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
$T(n) = 2T(n/2) + cn$
Resolvendo pelo método mestre temos:
$a = 2$
$b = 2$
$f(n) = cn$
Caso 1: $f(n) = O(n^{log_b a - \varepsilon})$
$cn = O(n^{log_2 2 - \varepsilon})$
$cn = O(n^{1 - \varepsilon})$
Falso
Caso 2: $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$
$cn = \Theta(n^{log_2 2})$
$cn = \Theta(n^1)$
Verdade, então:

$T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot lg\ n)$
$T(n) = \Theta(n \cdot lg\ n)$