Prova Física 1 - CM - 2do semestre 2107

Nestor Caticha

2 de outubro de 2017

Instruções: a prova deve ser feita individualmente. Ela não visa medir se o grupo sabe. O objetivo é obter informação sobre o que cada aluno sabe. A soma é maior que dez pontos. A nota V será dada por

$$V = \min(10, v_0 \sum_{i=1}^n p_i v_i),$$

onde v_i é a nota obtida na questão i e p_i seu peso. Quem não responder esta pergunta terá uma prova oral. Apresente as soluções cuidadosamente deixando claro as hipóteses feitas e mostrando o desenvolvimento matemático. Frases telegráficas ou equações soltas não são a forma adequada de comunicar os resultados. Tenha cuidado em deixar claras as unidades. Erros numéricos levarão à diminuição da nota. Erros de unidades acarretarão a ira e fúria. Não precisa fazer em Latex, provas manuscritas são bemvindas. Provas em Word não o serão. Numere as paginas e os exercícios. Grampeie as folhas.

Problema 0. Responda: Você fez a prova de forma individual? Resposta SIM terá nota $v_0 = 1$ e a resposta NÃO nota $v_0 = 0$.

Problema 1. Uma lavadora de vidros externos de um prédio está sentada em uma cadeira de cabos. Suponha que a única forma de movimento é na vertical. A massa da mulher é M e a da cadeira m . O cabo passa por uma polia e volta até ela, que pode puxar o cabo para subir. Ela puxa o cabo para baixo com tal força que a força que faz na cadeira é N .

- (1.a) Qual é a aceleração da lavadora e da cadeira.
- (1.b) Qual é a força sobre a polia.

Faça o diagrama de forças e no final do exercício substitua os valores $N = 300$ newtons, $M = 60$ kg e $m = 10$ kg e $g = 10$ m/s².

Problema 2. Um cabo flexível de comprimento L e massa M está pendurado numa polia de massa desprezível, de forma a estar equilibrado. Um pequeno toque faz com que o sistema se desequilibre e o cabo começa a acelerar para um dos lados até cair fora da polia. Qual é a velocidade do cabo quando sua ponta escapa?

Problema 3. Uma pessoa pula de uma altura de $h = 1$ m. Considere essa pessoa como uma massa pontual com toda a massa concentrada no seu umbigo. Ao tocar o chão as pernas se dobram de forma que seu umbigo desce uma distância l além de h .

- (3a) Qual é o trabalho feito pelas pernas para amortecer a queda?
- (3b) Qual é a força máxima exercida pelas pernas?

Problema 4. Suponha que um atleta de alto nível corra a uma velocidade máxima de $10m/s$. Considere novamente a massa concentrada no umbigo a uma altura de $1.20m$ do chão quando o atleta está de pé e $0.20m$ quando sentado no chão.

- Estime qual deve ser o recorde mundial para salto com vara.
- Estime qual deve ser o limite para o salto em distância para atletas saltando com um ângulo de lançamento de 45° .
- Qual é o ângulo ótimo no salto em distância?

Obviamente voce não deve obter os valores dos recordes mas uma estimativa dos valores superiores nas condições descritas. Tome $g = 10m/s^2$. Eu não deixei específicas todas as hipóteses que fiz para olhar para este problema porque quero ver o que você faz quando o problema não está bem delineado.

Problema 5. Considere um pêndulo: uma massa m presa por um fio sem massa de comprimento l_0 a temperatura T_0 , num campo gravitacional uniforme.

- Mostre as forças atuantes no sistema.
- Escreva as equações de movimento.
- Sob hipótese de amplitudes pequenas de movimento, o ângulo com a vertical satisfaz $\tan(\theta) \approx \theta$. Nestas condições resolva as equações de movimento, isto é, encontre $\theta(t)$ para as condições iniciais $\theta(t = 0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(t = 0) = u$.
- Suponha que l é afetado pela temperatura. O coeficiente linear de expansão é α , de forma que $l(T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0))$. Como muda o período do pêndulo com a temperatura? Faça a aproximação que $|\alpha(T - T_0)| \ll 1$.
- Olhe novamente para as equações de movimento e mantenha a temperatura fixa em T_0 . Faça um argumento para indicar se o período aumenta ou diminui se a amplitude for maior e a aproximação de baixos ângulos deixar de valer.

Problema 6. A teoria da relatividade começou com Galileu. Considere dois sistemas de referência e uma partícula cuja posição é descrita por (x, y, z, t) em um referencial e por (x', y', z', t') no outro. A transformação de Galileu é dada por

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Considere movimento da partícula numa região do espaço onde o potencial só depende da posição e não da sua velocidade.

- Mostre que a segunda lei de Newton tem a mesma forma nos dois referenciais descritos acima.

- Um pessoa, fixa no topo do mastro de um navio deixa cair uma pedra diretamente para baixo. Descreva as trajetória vistas por uma pessoa parada no barco e outra para no cais, vendo o barco passar na sua frente.
- Se a 2a lei de Newton tem a mesma forma para os dois observadores porque a trajetória descrita não é a mesma?

Problema 7. • A lua leva um tempo $T = 2.4 \times 10^6 s$ para orbitar (órbita circular, raio R_L que supomos desconhecido) em torno da terra. Se tivesse velocidade igual em módulo, mas perpendicular à linha entre os centros da lua e terra, quanto andaria em linha reta (em metros) em um segundo? Mas a trajetória tangente se afasta da circular. Quanto se afasta em 1 segundo? Chame de $d_1(R_L)$.

- A aceleração de um corpo que cai na superfície da terra (raio $R_T = 6.4 \times 10^6 m$) é $g = 10 m/s^2$. Quanto cai em um segundo? Chame de $d_2(R_L)$.
- Se um objeto cai na superfície da terra por influência da força da gravidade, se a lua cai em direção à terra também por influência da gravidade, e se a força da gravidade cai com a distância ao quadrado, então qual é a distância entre a terra e a lua.
- Um astronauta de massa M em órbita em torno da terra, a uma altura $h = 150 km$, se pesa numa balança de mola. Quanto pesa? Qual é a força gravitacional que a terra exerce no astronauta?
- Calcule a razão entre as força gravitacionais que a terra exerce na lua e que o sol exerce na lua. (Não leve em conta as variações das distâncias com o tempo). Pense como deve ser a resposta antes de fazer o cálculo.

Problema 8. Considere uma partícula cujo movimento pode ser descrito por uma coordenada x positiva. Duas forças agem na partícula. Uma força é atrativa em direção da origem $x = 0$ e tem magnitude proporcional à distância x . A outra age de forma a repelir a partícula da origem, e cai com o quadrado da distância, de forma que à distância $x = 1$ da origem tem intensidade B .

- Escreva o potencial $U(x)$
- Encontre o valor de x_0 de equilíbrio, i.e. a força é nula
- Suponha que a energia total seja $E > U(x_0)$. Quais são os pontos de retorno?
- Calcule o período de oscilações de pequenas amplitudes (aproxime por um potencial quadrático com mínimo em x_0).

Problema 9. Um bloco pode deslizar dentro de uma calha presa sobre uma superfície horizontal. O movimento do bloco é somente na direção da calha. Uma mola elástica com constante de mola k , tem uma ponta presa à calha (ponto A) e a outra presa ao bloco. A distância de equilíbrio do sistema bloco-mola é L

- Suponha que a superfície e calha girem no plano horizontal em torno de um eixo que passa por A com velocidade angular ω constante. Qual é a nova posição de equilíbrio do bloco.
- Suponha que a superfície é acelerada na direção da calha. Qual é a nova posição de equilíbrio do bloco em relação ao ponto A .
- Suponha que a superfície é uma membrana de um neurônio, que a mola é uma proteína elástica, que o bloco é uma massa que tampava um canal que atravessa a membrana. Quando o sistema é acelerado, o bloco abre o canal, permitindo a passagem de correntes iônicas através da membrana e gerando um sinal elétrico que será interpretado no cérebro como uma mudança da velocidade linear ou angular.

Problema 10. Aplicações da dinâmica a outros campos de estudo. Seja $N(t)$ a população de predadores e $P(t)$ a população de presas no instante t . Suponha que a taxa de reprodução das presas, na ausência de predadores seja tal que

$$P(t + \Delta t) = (1 + \alpha_0 \Delta t)P(t) \quad (1)$$

e que a de predadores, na ausência de presas, seja

$$N(t + \Delta t) = (1 - \beta_0 \Delta t)N(t) \quad (2)$$

com ambos $\alpha_0, \beta_0 > 0$.

- (10.a) Transforme as equações 1 e 2 em equações diferenciais. Encontre o valor das populações para tempos grandes. Discuta, dados esses valores se é possível que esse modelo seja bom para descrever o que acontece num sistema de predador-presa. Falta algo.

As interações entre as espécies levam a mudanças das taxas de reprodução e um modelo interessante surge quando substituímos nas equações 1 e 2 as taxas de reprodução por

$$\begin{aligned} \alpha_0 \rightarrow \alpha &= \alpha_0 - sN(t) \\ \beta_0 \rightarrow \beta &= \beta_0 - rP(t) \end{aligned} \quad (3)$$

onde r e s descrevem o acoplamento entre as espécies.

- (10.b) Escreva as novas equações diferenciais da dinâmica. Encontre o valor das populações de equilíbrio N^* e P^* , que tornam as populações constantes no tempo.

Agora estudaremos pequenas perturbações nos valores de equilíbrio

$$N(t) = N^* + n(t) \quad (4)$$

$$P(t) = P^* + p(t) \quad (5)$$

- (10.c) Escreva as equações de evolução temporal de $p(t)$ e $n(t)$, desprezando termos quadráticos (todo termo que contenha n^2, p^2 ou np será desprezado). Isto é análogo ao que fizemos com o pêndulo quando estudamos as pequenas oscilações.

- (10.d) Mostre que o sistema oscila em torno das populações de equilíbrio.
- (10.e) Qual é o período de oscilação?
- (10.f) Esboce o gráfico de $n(t)$, $p(t)$ como funções do tempo, esboce o gráfico da trajetória do sistema no espaço (n, p)
- (10.g) Encontre uma quantidade conservada (dentro da aproximação de pequenas amplitudes que fizemos)
- Interprete, compare com as equações do oscilador harmônico. Qual das duas espécies faz as vezes de posição, predador ou presa? Qual de velocidade?